Corrigé problème 3

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. On remarque que les éléments non diagonaux de A et de A^2 sont

opposés et que $A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$ donc $A^2 = -A + 2I_3$

2. $A^2 = -A + 2I_3 \Leftrightarrow A^2 + A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A + I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A(A + I_3) = I_3$.

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)$, soit $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n A + v_n I_3$ (P_n)

$A^0 = u_0 A + v_0 I_3 = I_3$ donc (P_0) est vraie.

Supposons (P_n) vraie. Alors (P_{n+1}) vraie.

$$A^{n+1} = A^n A = (u_n A + v_n I_3) A = u_n A^2 + v_n A = u_n (-A + 2I_3) + v_n A = (-u_n + v_n) A + 2u_n I_3$$

soit $A^{n+1} = u_{n+1} A + v_{n+1} I_3$, donc (P_n) vraie $\Rightarrow$ (P_{n+1})

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n A + v_n I_3$

4. a.

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = u_n + v_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = -u_n + v_n + 2v_n = u_n + v_n = x_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n$, ce qui signifie que la suite (x_n) est constante et égale à

$$x_0 = u_0 + v_0 = 1 \text{ et on a donc : } \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = 2u_n - v_n$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = 2u_{n+1} - v_{n+1} = -2u_n + 2v_n - 2 = -2(2u_n - v_n) = -2y_n$$

On en déduit que la suite (y_n) est géométrique de raison égale à -2 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = (-2)^n y_0$$

Or $y_0 = 2u_0 - v_0 = -1$ et finalement $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = -(-2)^n$

$$c. \begin{cases} x_n = u_n + v_n \\ y_n = 2u_n - v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) \\ v_n = \frac{1}{3}(2x_n - y_n) \end{cases}$$

En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{3}(2 + (-2)^n)$$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n A + v_n I_3 = \frac{1}{3} \left((1 - (-2)^n) A + (2 + (-2)^n) I_3 \right)$$

$$\text{soit } A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 + (-2)^n & 2(1 - (-2)^n) \\ 2(1 - (-2)^n) & -2 + 3(-2)^n & 4(1 - (-2)^n) \\ 1 - (-2)^n & -1 + (-2)^n & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}$$

En prenant $n = -1$, on obtient : $A^{-1} = \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right) A + \left(2 - \frac{1}{2}\right) I_3 \right) = \frac{1}{2} (A + I_3)$ donc le résultat est encore valable pour $n = -1$.

6. On cherche le polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 6 \\ 6 & -8-\lambda & 12 \\ 3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 6 \\ 6 & -8-\lambda & 12 \\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 7-\lambda \\ 6 & -8-\lambda & 18 \\ 2+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2+\lambda)(-\lambda^2 - \lambda + 2)$$

$$\text{soit } \chi_A(\lambda) = (2+\lambda)^2(1-\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont -2 (double) et 1.

Recherche des vecteurs propres sous la forme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\underline{\lambda = -2}$$

$$3x - 3y + 6z = 0$$

$$AX = -2X \Leftrightarrow 6x - 6y + 12z = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$$

$$3x - 3y + 6z = 0$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre -2 est de dimension 2.

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en sont des vecteurs propres.}$$

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$\begin{aligned}
 & 3y + 6z = 0 \\
 AX = X \Leftrightarrow & \begin{cases} 6x - 9y + 12z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en est un vecteur propre}$$

La somme des dimensions des sous espaces propres est 3 donc A est diagonalisable

On a donc $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 1 \\ (-2)^n & 2(-2)^n & 2 \\ 0 & (-2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-2)^n - 1 & -2(-2)^n + 2 \\ -2(-2)^n + 2 & 3(-2)^n - 2 & -4(-2)^n + 4 \\ -(-2)^n + 1 & (-2)^n - 1 & -(-2)^n + 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$