

Corrigé Problème 2

Exercice 1

1. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto x - y - z + t$.

Montrons que f est linéaire :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \forall (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} f((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) &= f(x + x', y + y', z + z', t + t') \\ &= x + x' - (y + y') - (z + z') + t + t' \\ &= x - y - z + t + x' - y' - z' + t' \\ &= f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t') \end{aligned}$$

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(\lambda(x, y, z, t)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda t = \lambda(x - y - z + t) = \lambda f(x, y, z, t)$$

Donc f est linéaire.

$\text{Im } f = \mathbb{R}$ car tout élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par f :

$\forall a \in \mathbb{R}, (a, 0, 0, 0)$ est un antécédent de a par exemple, donc f est surjective et

$$\dim \text{Im}(f) = 1$$

2. Montrons que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$E = \text{Ker } f$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker } f = 4 - 1 = 3$

$$u = (0, 0, 1, 1), v = (1, 0, 1, 0), w = (1, 1, 0, 0)$$

On vérifie facilement que u, v, w sont des éléments de E

Montrons que la famille (u, v, w) est libre :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, au + bv + cw = 0 \Rightarrow a(0, 0, 1, 1) + b(1, 0, 1, 0) + c(1, 1, 0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ c = 0 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

donc la famille (u, v, w) est libre .

la famille (u, v, w) est libre de cardinal 3 qui est la dimension de E

la famille (u, v, w) est une base de E

3. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = t \text{ et } y = z = 0\} = \{(x, 0, 0, x), x \in \mathbb{R}\}$

Donc $G = \text{Vect}(1, 0, 0, 1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1, de base $(1, 0, 0, 1)$.

4. Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x = t \\ y = z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$$

$$\text{Donc } F \cap G = \{0\}$$

$$\text{De plus } \dim F + \dim G = 4$$

$$\text{Donc } E = F \oplus G.$$

$$5. (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z, t) = (x - a, y, z, t - a) + (a, 0, 0, a)$$

$$\text{avec } x - a - y - z + t - a = 0 \text{ donc } a = \frac{1}{2}(x - y - z + t)$$

$$\text{on a donc } p((x, y, z, t)) = \frac{1}{2}(x + y + z - t, 2y, 2z, -x + y + z + t)$$

et la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection p est :

$$6. u = (0, 0, 1, 1), v = (1, 0, 1, 0), w = (1, 1, 0, 0) : (u, v, w) \text{ est une base de } E$$

$$p(u) = u$$

$$p(v) = v$$

$$p(w) = w$$

u, v, w sont donc des vecteurs propres associés à la valeur propre 1

$(1, 0, 0, 1) \in G$ donc $p(1, 0, 0, 1) = 0$ et $(1, 0, 0, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0

Exercice 2

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) - (-2 + \lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

f admet 2 comme valeur propre simple et 1 comme valeur propre double.

$$\lambda = 2 : \text{on cherche } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } AU = 2U \text{ soit } \begin{cases} -y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_2 = \text{vect}(0, 1, 1)$$

$$\dim E_2 = 1$$

$$\lambda = 1 : \text{on cherche } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } AU = U \text{ soit } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_1 = \text{vect}(1, 1, 0)$$

$$\dim E_1 = 1$$

A la valeur propre double 1 correspond un sous espace propre de dimension 1 donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. D'après la question qui précède :

$$\text{Si } u = (0, 1, 1), \text{ alors } f(u) = 2u$$

Si $v = (1,1,0)$, alors $f(v) = v$

On cherche w tel que $f(w) = v + w$ soit $f(w) - w = v$ et avec les mêmes notations

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ z=1 \\ -x+y=0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \text{ donc } w = (0,0,1)$$

En conclusion : $f(u) = 2u$, $f(v) = v$, $f(w) = v + w$

On vérifie que la famille (u, v, w) est libre : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Donc la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}'$ est $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$3. \quad T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conjecture que

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On va le prouver par récurrence :

C'est vrai pour $n = 1$

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc si la propriété est vraie pour le rang n , elle l'est encore pour le rang $n + 1$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $A = PTP^{-1}$ donc $A^n = P T^n P^{-1}$ et le calcul nous donne

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n+1-2^n & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$$