Corrigé Problème 1

Partie A

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. $P_N(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & q \\ 1 & -x & p \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x(x^2 - p) + q = -x^3 + px + q$

2. x_0 est une racine double de $P(x)$ donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que
   $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ avec $Q(x_0) \neq 0$.
   $P'(x) = 2(x - x_0)Q(x) + (x - x_0)^2 Q'(x)$
   $P'(x_0) = 0$ donc x_0 est aussi une racine du polynôme dérivé $P'(x)$.

On suppose qu'il existe un réel α racine double du polynôme caractéristique $P_N(x)$.

3. $P_N(x) = -x^3 + px + q$ donc $P_N'(x) = -3x^2 + p$
   $P_N'(\alpha) = -3\alpha^2 + p = 0$ donc $p = 3\alpha^2$
   $P_N(\alpha) = 0$ donc $-\alpha^3 + 3\alpha^3 + q = 0$ et $q = 2\alpha^3$
   on vérifie facilement que $4p^3 = 27q^2$

4. (R) est vérifié pour $p^3 = 27$ et $q^2 = 4$ soit $p = 3$ et $q = 2$

Partie B

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. $P_N(x) = -x^3 + 3x + 2$
2. $\lambda_1 = -1$ est racine double du polynôme $P_N(x)$ et $\lambda_2 = 2$ est racine simple du $P_N(x)$.

3. Soit E_1, sous-espace propre de N associé à la valeur propre λ_1.
   $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow NV = -V \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = -x \\ x + 3z = -y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$
   E_1 est un espace vectoriel de dimension *1* de base $V_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Soit E_2, sous-espace propre de N associé à la valeur propre λ_2 .

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow NV = 2V \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 2x \\ x + 3z = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

E_2 est un espace vectoriel de dimension *1* de base $V_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

5. La matrice N n'est pas diagonalisable car dim E_1 + dim E_2 = 2 (ou encore dim $E_1 = 1$ alors que -1 est racine double)

6. $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$P = \frac{1}{9}M^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 4 & 8\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

On peut calculer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de P de façon classique.
On peut aussi montrer que $P^2 = P$ .Donc P est la matrice d'une projection.
Ses valeurs propres sont donc *0* et *1*
Le noyau est le sous espace propre associé à la valeur *0*, l'image est le sous espace propre associé à la valeur *1.*

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Ker\ P \Leftrightarrow PV = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 4z = 0$$

$Ker\ P$ est un espace vectoriel de dimension *2* de base $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ par exemple

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Im\ P \Leftrightarrow PV = V \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 9x \\ 2x + 4y + 8z = 9y \\ x + 2y + 4z = 9z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

$Im\ P$ est un espace vectoriel de dimension *1* de base $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$