Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Révisions

Katia Barré

Lycée Lesage
Vannes

Mathématiques Spéciales PT

1. Revoir les primitives usuelles
2. **Relation de Chasles** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. **Linéarité** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Positivité (f à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et si $\int_a^b f(t)\ dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur $[a,b]$.
2. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t)\ dt > 0$.
3. Si f est continue par morceaux et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\ dt \geq 0$.
4. Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \quad \geq \quad \int_a^b g$.

1. Revoir les primitives usuelles
2. **Relation de Chasles** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. **Linéarité** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Positivité (f à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et si $\int_a^b f(t)\, dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur $[a,b]$.
2. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t)\, dt > 0$.
3. Si f est continue par morceaux et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \geq 0$.
4. Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \quad \geq \quad \int_a^b g$.

1. Revoir les primitives usuelles
2. **Relation de Chasles** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. **Linéarité** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Positivité (f à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et si $\int_a^b f(t)\ dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur $[a,b]$.
2. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t)\ dt > 0$.
3. Si f est continue par morceaux et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\ dt \geq 0$.
4. Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \quad \geq \quad \int_a^b g$.

1. Revoir les primitives usuelles
2. **Relation de Chasles** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
3. **Linéarité** (f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Positivité (f à valeurs dans $\mathbb{R}$).

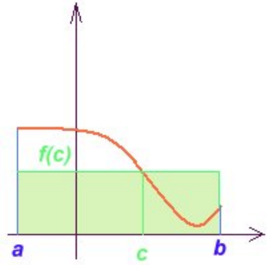
1. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et si $\int_a^b f(t)\ dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur $[a,b]$.
2. Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t)\ dt > 0$.
3. Si f est continue par morceaux et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\ dt \geq 0$.
4. Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \quad \geq \quad \int_a^b g$.

Formule de la moyenne

Formule de la moyenne (f à valeurs dans $\mathbb{R}$: il n'y a pas de Théorème des Valeurs Intermédiaires pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$)

Si f est **continue** sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a) \times f(c).$$



Preuve :

1) ou bien : On remarque que l'image par une application continue d'un segment est un segment : $f([a,b]) = [m,M]$, puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

2) ou bien : On écrit le théorème des accroissements finis pour une primitive F de f sur $[a,b]$.

Inégalité triangulaire :

(f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \quad si \quad a < b,$$

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| \quad dans \quad le \quad cas \quad général.$$

Sommes de Riemann

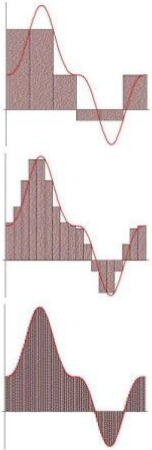
Si f est continue sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors les suites de termes

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

sont convergentes de même limite $\int_a^b f(t)\, dt$.



Intégrale fonction de ses bornes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$,
α et β deux applications dérivables définies sur I et à valeurs dans le segment $[a,b]$,
f une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors l'application g définie sur I par $\begin{array}{cccc} g & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt \end{array}$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x)).$$

Preuve : Si F est une primitive de f, alors $g = F(\beta) - F(\alpha)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f , $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Preuve :
$P : x \mapsto \int_a^b (f(t) + x\ g(t))^2\ dt$ est un polynôme de degré au plus 2 à valeurs positives ; son discriminant réduit est donc négatif ou nul.

Intégration par parties

Soient f , $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b fg' = [gf]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Preuve : $(fg)' = f'g + fg'$.

Changement de variable

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $[\alpha,\beta]$ un segment de $\mathbb{R}$,
$\phi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],I)$ et $f \in \mathcal{C}(I)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(t).f(\phi(t))\ dt.$$

Preuve : Soit F une primitive de f : calculer la dérivée de $F(\phi)$.

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a-\epsilon, a+\epsilon[)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\forall x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]-\epsilon, \epsilon[)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\forall x \in]-\epsilon, \epsilon[, \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Preuve :
Récurrence sur n et Intégration par parties

Inégalité de Taylor-Lagrange

Entre a et x

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a-\epsilon, a+\epsilon[)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\forall x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$,

$$\left| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq Max_{t\in|a,x|} |f^{(n+1)}(t)| \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Entre 0 et x

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]-\epsilon, \epsilon[)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que :

$$\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \ \ |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}.$$

Alors $\forall x \in]-\epsilon, \epsilon[$

$$\left| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M_{n+1} \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Applications de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$ch(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad sh(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Primitives de polynômes en cos et sin

- Pour intégrer $\cos^p \sin^{2n+1} = \cos^p(1-\cos^2)^n \times \sin$, on fait le changement de variable $u = \cos$,
- Pour intégrer $\sin^p \cos^{2n+1} = \sin^p(1-\sin^2)^n \times \cos$, on fait le changement de variable $u = \sin$,
- Pour intégrer $\sin^{2n} \cos^{2m}$, on linéarise.

Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx$.Règles de Bioche

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, \cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi - x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$,en se rappelant que
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx.$$

Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x), \cos(x))\ dx$.Règles de Bioche

- Lorsque le changement de variable $x \rightarrow -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, \cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \rightarrow \pi - x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$,en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

- Lorsque le changement de variable $x \rightarrow \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx.$$

Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx$.Règles de Bioche

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, \cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi - x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$,en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx.$$

Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x), \cos(x))\ dx$.Règles de Bioche

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, \cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi - x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$,en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2} dx.$$

Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx$.Règles de Bioche

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, \cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi - x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$,en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2} dx.$$

$\int f(sh(x), ch(x))\, dx$

On examine avec les règles de Bioche l'intégrale $\int f(\sin, \cos)$:

- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \cos(x)$, alors on fait le changement de variable $u = ch(x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \sin(x)$, alors on fait le changement de variable $u = sh(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = ch(2x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \tan(x)$, alors on fait le changement de variable $u = th(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

$\int f(sh(x), ch(x))\, dx$

On examine avec les règles de Bioche l'intégrale $\int f(\sin, \cos)$:

- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \cos(x)$, alors on fait le changement de variable $u = ch(x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \sin(x)$, alors on fait le changement de variable $u = sh(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = ch(2x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \tan(x)$, alors on fait le changement de variable $u = th(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

$\int f(sh(x), ch(x))\,dx$

On examine avec les règles de Bioche l'intégrale $\int f(\sin, \cos)$:

- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \cos(x)$, alors on fait le changement de variable $u = ch(x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \sin(x)$, alors on fait le changement de variable $u = sh(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = ch(2x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \tan(x)$, alors on fait le changement de variable $u = th(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

$\int f(sh(x), ch(x))\, dx$

On examine avec les règles de Bioche l'intégrale $\int f(\sin, \cos)$:

- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \cos(x)$, alors on fait le changement de variable $u = ch(x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \sin(x)$, alors on fait le changement de variable $u = sh(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = ch(2x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \tan(x)$, alors on fait le changement de variable $u = th(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

$\int f(sh(x), ch(x))\, dx$

On examine avec les règles de Bioche l'intégrale $\int f(\sin, \cos)$:

- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \cos(x)$, alors on fait le changement de variable $u = ch(x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \sin(x)$, alors on fait le changement de variable $u = sh(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = ch(2x)$,
- Lorsque $\int f(\sin, \cos)$ se calcule avec $t = \tan(x)$, alors on fait le changement de variable $u = th(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

$\int P(x)e^{ax}\, dx$ où P est un polynôme

On fait $degré(P)$ intégrations par parties successives en dérivant toujours le polynôme pour faire chuter son degré.

Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$

On fait deux I.P.P successives en dérivant toujours le même type de fonction (exponentielle, ou trigonométrique) : on retombe à constante près sur l'intégrale de départ.

Fractions rationnelles : quelques exemples

Calculer des primitives de

$$t \longmapsto \frac{1}{t^2-1} \quad et \quad t \longmapsto \frac{1}{t^3+1}.$$

1. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+3n^6k^2+3n^4k^4+n^2k^6}}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 arctan(x)\ dx$, $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin(t).ch(t)\ dt$, $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(t)\ dt$.
3. Soit $f\in\mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt\quad et\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$
4. Déterminer des primitives de
$$x\mapsto\frac{\sin(2x)}{1+tan(x)},\quad x\mapsto\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-4\sin(x)-6}.$$
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x e^{t^2}\ dt$.
6. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites $(x=0)$, $(x=4)$ et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1. Étudier $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{n^8 + 3n^6k^2 + 3n^4k^4 + n^2k^6}}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.
2. Calculer $\int_0^1 arctan(x)\ dx$, $\int_{-1}^1 \sin(t).ch(t)\ dt$, $\int_0^{\pi} t^2 \cos(t)\ dt$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$
4. Déterminer des primitives de
$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}.$$
5. Déterminer $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x e^{t^2}\ dt$.
6. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites $(x = 0)$, $(x = 4)$ et les graphes des fonctions f et g où $f(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

1. Étudier $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+3n^6k^2+3n^4k^4+n^2k^6}}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.
2. Calculer $\int_0^1 arctan(x)\ dx$, $\int_{-1}^{1}\sin(t).ch(t)\ dt$, $\int_0^{\pi} t^2\cos(t)\ dt$.
3. Soit $f\in\mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$

4. Déterminer des primitives de

$$x\mapsto\frac{\sin(2x)}{1+tan(x)},\quad x\mapsto\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-4\sin(x)-6}.$$

5. Déterminer $\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x e^{t^2}\ dt$.
6. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites $(x=0)$, $(x=4)$ et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1. Étudier $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{n^8+3n^6k^2+3n^4k^4+n^2k^6}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.
2. Calculer $\int_0^1 arctan(x)\ dx$, $\int_{-1}^1 \sin(t).ch(t)\ dt$, $\int_0^\pi t^2\cos(t)\ dt$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$
4. Déterminer des primitives de
$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-4\sin(x)-6}.$$
5. Déterminer $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x e^{t^2}\ dt$.
6. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites $(x=0)$, $(x=4)$ et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{n^8+3n^6k^2+3n^4k^4+n^2k^6}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.
2. Calculer $\int_0^1 arctan(x)\ dx$, $\int_{-1}^{1} \sin(t).ch(t)\ dt$, $\int_0^{\pi} t^2\cos(t)\ dt$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$
4. Déterminer des primitives de
$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-4\sin(x)-6}.$$
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\int_3^x e^{t^2}\ dt$.
6. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites $(x=0)$, $(x=4)$ et les graphes des fonctions f et g où $f(x) = -x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^3}{\sqrt{n^8+3n^6k^2+3n^4k^4+n^2k^6}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$.
2. Calculer $\int_0^1 arctan(x)\ dx$, $\int_{-1}^1 \sin(t).ch(t)\ dt$, $\int_0^\pi t^2\cos(t)\ dt$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$
4. Déterminer des primitives de
$$x \longmapsto \frac{\sin(2x)}{1+tan(x)}, \quad x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-4\sin(x)-6}.$$
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{x-3}\int_3^x e^{t^2}\ dt$.
6. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites $(x=0)$, $(x=4)$ et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.