Réponses et Indications (Variables aléatoires à densité)

Exercice 1

1) $k = \frac{3}{32}$.
2) $F(x) = 0$ si $x < 0$ $\quad F(x) = \frac{1}{32}x^2(6-x)$ si $0 \le x \le 4$ $\quad F(x) = 1$ si $x > 4$.
3) $E(X) = 2$ et $V(X) = \frac{4}{5}$.
4) $g(x) = \frac{3}{16}x^3(4-x^2)$ si $0 \le x \le 2$ et $g(x) = 0$ sinon.
   Exprimer la fonction de répartition de *Y* en fonction de celle de *X*.

Exercice 2

1) *F* est continue, croissante, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.
3) $E(X) = 0$. Montrer la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ et de $\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$.

Exercice 3 (d'après Oral ESCP 2012)

1) *f* est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
   Pour le calcul de l'intégrale, utiliser le changement de variable $u = e^x$.
2) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(e^x)$.
   b) *X* a une espérance et $E(X) = 0$.
3) a) $g(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ sinon. Exprimer la fonction de répartition de *Y* en fonction de celle de *X*.
   b) La variable aléatoire *Y* n'admet pas d'espérance.

Exercice 4

1) $k = \alpha$.
2) a) $F(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)$ si $x \ge 1$ et $F(x) = 0$ si $x < 1$.
   b) *X* a une espérance si et seulement si $\alpha > 1$. Alors $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.
   c) *X* a une variance si et seulement si $\alpha > 2$. Alors $V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$.

Exercice 5

1) Dans chaque cas, exprimer la fonction de répartition de *Y* en fonction de celle de *X*.
   a) $g(x) = \frac{1}{4}$ si $3 \le x \le 7$ et $g(x) = 0$ sinon.
   b) $g(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \le x \le 1$ et $g(x) = 0$ sinon.

c) $g(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}$ si $0<x\leq 4$ et $g(x)=0$ sinon.

d) $g(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ si $x\geq \dfrac{1}{2}$ et $g(x)=0$ sinon.

e) $g(x)=\dfrac{1}{2}e^x$ si $x\leq \ln 2$ et $g(x)=0$ sinon.

2) Même méthode. Attention aux signes !

a) $g(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$ si $0<x\leq 1$, $g(x)=\dfrac{1}{6\sqrt{x}}$ si $1<x\leq 4$ et $g(x)=0$ sinon.

b) $g(x)=\dfrac{2}{3}$ si $0\leq x\leq 1$, $g(x)=\dfrac{1}{3}$ si $1<x\leq 2$ et $g(x)=0$ sinon.

3) Y est une variable aléatoire discrète qui suit la loi uniforme $\mathscr{U}([\![-1,1]\!])$.

Exercice 6

Soit $\alpha>0$ et une variable aléatoire à densité X qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

1) Y suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\alpha)$.

2) Z a pour densité la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ si $x\geq 1$ et $h(x)=0$ sinon.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite $\mathscr{N}(0,1)$. Soit $a>0$.

1) $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2}$ si $x\geq a$ et $g(x)=0$ si $x<a$.

2) et 3) $E(Y)=a+\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}$ et $V(Y)=1+\dfrac{2}{\pi}$. Utiliser les propriétés de la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Exercice 8

La probabilité est $\dfrac{41}{90}$. Exprimer cette probabilité avec la fonction de répartition de T.

Exercice 9

Partie A : Densité

1) g est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$, positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx=1$. (Voir l'exercice 4).

2) $P(X\leq t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<1\\ 1-\dfrac{1}{t} \text{ si } t\geq 1\end{cases}$ donc $P(X>t)=\begin{cases}1 \text{ si } t<1\\ \dfrac{1}{t} \text{ si } t\geq 1\end{cases}$.

3) La variable X n'admet pas d'espérance.

Partie B : Cas *n* = 2

1) a) $(U>t)=(X>t)\cap(Y>t)$. Donc $F_U(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$ si $t\geq 1$ et $F_U(t)=1$ si $t<1$.

b) $u(t)=\dfrac{2}{t^3}$ si $t\geq 1$ et $u(t)=0$ si $t<1$.

c) $E(U)=2$.

2) a) $(V\leq t)=(X\leq t)\cap(Y\leq t)$. Donc $F_V(t)=\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^2$ si $t\geq 1$ et $F_V(t)=0$ si $t<1$.

b) $v(t)=\dfrac{2(t-1)}{t^3}$ si $t\geq 1$ et $v(t)=0$ si $t<1$.

c) La variable V n'admet pas d'espérance.

Partie C : Généralisation

1) a) Si $t \geq 1$, la variable N suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, 1-\frac{1}{t}\right)$.

b) $(T_k \leq t) = (N \geq k)$. Donc $F_k(t) = \frac{1}{t^n}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(t-1)^j$ si $t \geq 1$ et $F_k(t) = 0$ si $t < 1$.

2) f_k est la dérivée de F_k avec $f_k(1) = 0$. Transformer avec la relation de Pascal.

3) $tf_k(t) \underset{+\infty}{\sim} k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-k}$. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} tf_k(t)dt$ converge si et seulement si $k < n$.

4) a) $J_n(0) = \frac{1}{n+1}$.

b) $J_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k}J_n(k)$. Intégrer par parties.

c) Raisonner par récurrence.

5) $E(T_k) = \frac{n}{n-k}$. Utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ pour se ramener au 4).

Exercice 10 (d'après Ecricome 2001 voie E)

Partie A : Nombre de composants défaillants

1) $P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$.

2) $N_t \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-e^{-\lambda t})$ et $E(N_t) = n(1-e^{-\lambda t})$.

3) $t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Résoudre l'inéquation $E(N_t) \geq \frac{n}{2}$.

Partie B : Montage en série

1) $(S_n > t) = \bigcap_{i=1}^{n}(T_i > t)$.

2) $F_n(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$ si $t \geq 0$ et $F_n(t) = 0$ si $t < 0$.

3) $S_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n\lambda)$. Donc $E(S_n) = \frac{1}{n\lambda}$ et $V(S_n) = \frac{1}{n^2\lambda^2}$.

Partie C : Montage en parallèle

1) $(U_n \leq t) = \bigcap_{i=1}^{n}(T_i \leq t)$.

2) $G_n(t) = (1-e^{-\lambda t})^n$ si $t \geq 0$ et $G_n(t) = 0$ si $t < 0$.

3) En déduire la fonction de répartition G_n de la variable aléatoire U_n.

4) $g_n(t) = n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$ si $t \geq 0$ et $g_n(t) = 0$ si $t < 0$.

5) $tg_n(t) \underset{+\infty}{\sim} n\lambda te^{-\lambda t}$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} tg_n(t)dt$ converge.

6) Utiliser la formule du binôme et une intégration par parties.

7) Utiliser la formule du binôme et la relation de Pascal.

8) Montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ et sommer.

9) $E(U_n) \sim \frac{1}{\lambda}\ln n$.

Exercice 11 (d'après Ecricome 1997 voie E)

Partie A : Comparaison de deux tarifications

1) $E(T_1) = \dfrac{a}{\alpha}$.

2) $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-e^{-\alpha})$. Donc $E(T_2) = \dfrac{1}{1-e^{-\alpha}}$.

3) φ est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$.

4) a) Utiliser la bijection : $\alpha_0 = \varphi^{-1}(a)$.

   b) La tarification la plus avantageuse est la première si la durée moyenne d'une communication est inférieure à $\dfrac{1}{\alpha_0}$, et c'est la deuxième sinon. Comparer $E(T_1)$ et $E(T_2)$ suivant les valeurs de $E(D) = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Etude d'un standard téléphonique

1) Cas d'une seule communication

   a) $P(D > t) = e^{-\alpha t}$.

   b) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système associé à I_n.

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(D + I_n > \theta) = \dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}$.

2) Etude de l'encombrement du standard

   a) La loi conditionnelle de C_θ sachant que $(N_\theta = r)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(r, p)$.

   b) La variable C_θ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(p\theta)$.

   c) $E(C_\theta) = \dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha}$ donc $\lim\limits_{\theta\to+\infty} E(C_\theta) = \dfrac{1}{\alpha}$.

Exercice 12 (d'après CCIP 2002 voie E)

Partie 1 : Cas discret

A – Coefficient d'avarie

1) Exprimer $P(T = n)$ à l'aide de D.

2) Montrer que $D(n) = (1-p)^n$.

3) a) Suite géométrique de raison $1-\alpha$, donc $D(n) = (1-\alpha)^n$.

   b) $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$.

B – Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

1) Raisonner par récurrence et utiliser la relation de Pascal.

2) a) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![\quad P(S_2 = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$.

   b) Utiliser $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ (variables indépendantes), et le 1).

3) a) $P(U_n = 0) = (1-p)^n$ et $P(U_n = n) = p^n$.

   b) $(U_n \geq k) = (S_k \leq n)$. Donc $P(U_n \geq k) = \sum\limits_{j=k}^{n} \dbinom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k}$.

   c) $U_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

4) $U \hookrightarrow \mathcal{B}(100000\,;0{,}005)$ donc $P(U \leq N) \geq 0{,}95$ si et seulement si $N \geq 537$.

Partie 2 : Cas continu

A – Loi de survie et coefficient d'avarie

1) a) Exprimer $P(t < T < t+h)$ à l'aide de D.

   b) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad D'(t) = -f(t)$.

c) $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{q(t,h)}{h} = \pi(t)$.

2) a) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad D(t) = e^{-\lambda t}$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \pi(t) = \lambda$.

3) a) f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

b) $E(T) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Utiliser la variance de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

c) $T^2 \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Donc $V(T) = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

d) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad D(t) = e^{-t^2/2}$.

e) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \pi(t) = t$.

4) a) Montrer que la dérivée de g est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

b) $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.

B – Entretien préventif

1) Intégrer par parties.

2) $c_1 = \lambda(K+C)$ et $c_2(\theta) = \lambda\left(\dfrac{K}{1-e^{-\lambda\theta}} + C\right)$. Donc $c_1 < c_2(\theta)$ pour tout $\theta > 0$.

3) a) $c_1 = (K+C)\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. Pour la limite, utiliser l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

b) φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \varphi(\theta) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta\to+\infty} \varphi(\theta) = C\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

c) $c'_2(\theta)$ est du signe de $\varphi(\theta)$ donc c_2 admet un minimum en θ_0 tel que $\varphi(\theta_0) = 0$.

d) Utiliser $\varphi(\theta_0) = 0$ et le sens de variations de c_2 pour comparer avec c_1.

Exercice 13 (d'après CCIP 1996 voie S)

A – Exemples d'expériences aléatoires discrètes

1) Première stratégie

$g_n = \dfrac{1}{2}$.

2) Deuxième stratégie,

a) $P\left(X_1 < \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Si $0 \le j \le \dfrac{r-1}{2}$: $\left(G_n = \dfrac{j}{r}\right) = \left[\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\left(X_k < \dfrac{1}{2}\right)\right] \cap \left(X_n = \dfrac{j}{r}\right)$. (Vente le jour n).

Si $\dfrac{r+1}{2} \le j \le r$: $\left(G_n = \dfrac{j}{r}\right) = \left(X_1 = \dfrac{j}{r}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{k=2}^{n}\left[\left(X_1 < \dfrac{1}{2}\right) \cap \ldots \left(X_{k-1} < \dfrac{1}{2}\right) \cap \left(X_k = \dfrac{j}{r}\right)\right]\right)$

c) Utiliser l'indépendance et l'incompatibilité des événements.

d) $g_n = \dfrac{3r+1}{4r} - \dfrac{r+1}{2^{n+1}r}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \dfrac{3r+1}{4r}$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} g_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

e) $P(L_n = j) = \dfrac{1}{2^j}$ si $1 \le j \le n-1$ et $P(L_n = n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Donc $\ell_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = 2$.

3) Troisième stratégie.

a) Si $0 \leq j \leq r-1$: $\left(G_n = \dfrac{j}{r}\right) = \left[\bigcap_{k=1}^{n-1}\left(X_k < \dfrac{1}{2}\right)\right] \cap \left(X_n = \dfrac{j}{r}\right)$.

Donc $P\left(G_n = \dfrac{j}{r}\right) = \dfrac{r^{n-1}}{(r+1)^n}$ si $0 \leq j \leq r-1$ et $P(G_n = 1) = 1 - \dfrac{r^n}{(r+1)^n}$

b) $g_n = 1 - \dfrac{r^{n-1}}{2(r+1)^{n-1}}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = 1$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} g_n = \dfrac{1}{2}$.

f) $P(L_n = j) = \dfrac{r^{j-1}}{(r+1)^j}$ si $1 \leq j \leq n-1$ et $P(L_n = n) = \dfrac{r^{n-1}}{(r+1)^{n-1}}$.

$\ell_n = r + 1 - \dfrac{r^n}{(r+1)^{n-1}}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = r+1$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} \ell_n = n$.

4) Conclusion

La comparaison des limites de g_n dans les trois cas montre que la troisième stratégie est la plus avantageuse pour un entier *n* suffisamment grand.

B – Exemples d'expériences aléatoires continues

1) Première stratégie

$g_n = \dfrac{1}{2}$.

2) Deuxième stratégie

a) $F_n(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_n(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Si $0 \leq t < \alpha$: $(G_n \leq t) = \left[\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k < \alpha)\right] \cap (X_n \leq t)$ donc $F_n(t) = \alpha^{n-1} t$.

Si $\alpha \leq t < 1$: $(G_n > t) = (X_1 > t) \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n}[(X_1 < \alpha) \cap \ldots \cap (X_{k-1} < \alpha) \cap (X_k > t)]\right)$

donc $F_n(t) = t\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - \dfrac{\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha}$.

b) Il suffit de dériver F_n avec des valeurs arbitraires en 0, α et 1.

c) $g_n = \dfrac{1}{2}(1 + \alpha - \alpha^n)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \dfrac{\alpha+1}{2}$.

d) $P(L_n = j) = \alpha^{j-1}(1-\alpha)$ si $1 \leq j \leq n-1$ et $P(L_n = n) = \alpha^{n-1}$. Donc $\ell_n = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$.

e) $g_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\ell_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. On retrouve les limites obtenues au A-2)-d) et e) quand *r* tend vers l'infini.