VARIABLES ALEATOIRES A DENSITE

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la densité f est définie par :

$$f(x) = k(4x - x^2) \text{ si } x \in [0,4] \qquad f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1) Déterminer le réel k.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X.
4) Déterminer une densité de probabilité de $Y = \sqrt{X}$.

Exercice 2

1) Montrer que la fonction définie par : $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est une fonction de répartition.

   Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est F.
2) Préciser une densité de probabilité f de X.
3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 3 (d'après Oral ESCP 2012)

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$ est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3) On définit la variable aléatoire réelle $Y = e^X$.
   a) Déterminer une densité de Y.
   b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 4

1) Soit $\alpha > 0$. Déterminer le réel k pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{k}{x^{\alpha+1}}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$ soit une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si elle existe, la calculer.
   c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Si elle existe, la calculer.

Exercice 5

1) Soit X une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme $\mathscr{U}([0,2])$. Déterminer une densité des variables aléatoires suivantes :
   a) $Y = 2X + 3$.
   b) $Y = 1 - X$.
   c) $Y = X^2$.
   d) $Y = \dfrac{1}{X}$.
   e) $Y = \ln X$.
2) Soit X une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme $\mathscr{U}([-1,2])$. Déterminer une densité des variables aléatoires suivantes :
   a) $Y = X^2$.
   b) $Y = |X|$.
3) Soit X une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme $\mathscr{U}([-1,2])$. Déterminer la loi de probabilité de $Y = \text{Ent}(X)$.

Exercice 6

Soit $\alpha > 0$ et une variable aléatoire à densité X qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

1) Déterminer la loi de $Y = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-X)$.
2) Déterminer la loi de $Z = X^{-1/\alpha}$.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $a > 0$.

1) Déterminer une densité f de $Y = |X| + a$.
2) Montrer que Y a une espérance et la calculer.
3) Montrer que Y a une variance et la calculer.

Exercice 8

Une personne doit prendre un train à 8h30. Elle appelle un taxi qui arrive à son domicile entre 7h et 8h à un instant $7+T$ où T suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Etant donnée la circulation, la durée D de la course dépend de T :

$$D = \frac{3T+5}{6} \text{ si } T \le \frac{1}{2} \qquad D = \frac{4T+3}{6} \text{ si } T > \frac{1}{2}$$

Quelle est la probabilité que la personne rate son train ?

Exercice 9

Partie A : Densité

1) Montrer que la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{1}{t^2} \text{ si } t \ge 1 \\ g(t) = 0 \text{ si } t < 1 \end{cases}$ est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire admettant g pour densité. Déterminer pour tout réel t la probabilité $P(X \le t)$, et en déduire $P(X > t)$.
3) La variable X admet-elle une espérance ? La calculer éventuellement.

Partie B : Cas *n* = 2

Deux personnes se rendent (indépendamment) à une fête. On suppose que leurs heures d'arrivée respectives sont deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui admettent toutes les deux comme densité la fonction g définie dans la partie A.

1) On note U l'heure d'arrivée du premier arrivant.
   a) Pour tout réel t, exprimer l'événement $(U > t)$ en fonction des événements $(X > t)$ et $(Y > t)$. En déduire la fonction de répartition de la variable U.
   b) En déduire une densité de la variable U.
   c) La variable U admet-elle une espérance ? La calculer éventuellement.
2) On note V l'heure d'arrivée du dernier arrivant.
   a) Pour tout réel t, exprimer l'événement $(V \le t)$ en fonction des événements $(X \le t)$ et $(Y \le t)$. En déduire la fonction de répartition de la variable V.
   b) En déduire une densité de la variable V.
   c) La variable V admet-elle une espérance ? La calculer éventuellement.

Partie C : Généralisation

On suppose que n personnes se rendent (indépendamment) à une fête et que leurs heures d'arrivée respectives sont des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui admettent toutes comme densité la fonction g définie dans la partie A. On note $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les heures d'arrivées respectives du premier, du deuxième, … et du $n^{\text{ème}}$ arrivant.

1) On fixe un réel $t \ge 1$. On note N le nombre de personnes déjà arrivées à l'instant t.
   a) Déterminer la loi de la variable N.

b) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer l'événement $(T_k \leq t)$ à l'aide de la variable N, et en déduire la fonction de répartition de la variable T_k en fonction de t.

2) En déduire que la densité de T_k est : $\begin{cases} f_k(t) = \dfrac{k}{t^{n+1}}\dbinom{n}{k}(t-1)^{k-1} \text{ si } t \geq 1 \\ f_k(t) = 0 \text{ si } t < 1 \end{cases}$.

3) Montrer que les variables $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{n-1}$ ont une espérance (que l'on ne demande pas de calculer), mais que la variable T_n n'en a pas.

4) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $J_n(k) = \displaystyle\int_0^1 x^{n-k}(1-x)^k\,dx$.

a) Calculer l'intégrale $J_n(0)$.

b) Exprimer $J_n(k+1)$ en fonction de $J_n(k)$ pour tout entier $k \leq n-1$.

c) En déduire que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $J_n(k) = \dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$.

5) Calculer, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, l'espérance de la variable aléatoire T_k.

<u>Exercice 10 (d'après Ecricome 2001 voie E)</u>

Un système est constitué de n composants $(n \in \mathbb{N}^*)$. On suppose que les variables aléatoires $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$ mesurant le temps de bon fonctionnement de chacun de ces n composants sont indépendantes et de même loi : la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

<u>Partie A : Nombre de composants défaillants</u>

Pour tout réel $t \geq 0$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de composants défaillants entre les instants 0 et t.

1) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, calculer la probabilité de l'événement $(T_i \leq t)$.

2) Déterminer la loi de N_t et calculer son espérance $E(N_t)$.

3) A partir de quel instant t_0 le nombre moyen de composants défaillants dépasse-t-il la moitié du nombre de composants ?

<u>Partie B : Montage en série</u>

On suppose que les composants sont montés en « série ». Alors, le système fonctionne correctement à condition que tous les composants fonctionnent correctement. On note S_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1) Exprimer, pour $t \geq 0$, l'événement $(S_n > t)$ en fonction des événements $(T_1 > t)$, $(T_2 > t)$, …, $(T_n > t)$.

2) En déduire la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire S_n.

3) En déduire une densité f_n de S_n. Reconnaître la loi de S_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

<u>Partie C : Montage en parallèle</u>

On suppose que les composants sont montés en « parallèle ». Alors, le système fonctionne correctement à condition que l'un au moins des composants fonctionne correctement. On note U_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1) Exprimer, pour $t \geq 0$, l'événement $(U_n \leq t)$ en fonction des événements $(T_1 \leq t)$, $(T_2 \leq t)$, …, $(T_n \leq t)$.

2) En déduire la fonction de répartition G_n de la variable aléatoire U_n.

3) En déduire une densité g_n de la variable aléatoire U_n.

4) Montrer que U_n a une espérance (sans la calculer).
5) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $E(U_n) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$.
6) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $E(U_{n+1}) - E(U_n) = \dfrac{1}{\lambda(n+1)}$.
7) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
8) En déduire un équivalent simple de $E(U_n)$ quand *n* tend vers l'infini.

<u>Exercice 11 (d'après Ecricome 97 voie E)</u>

Dans tout le problème (qui comporte deux parties indépendantes), on suppose que la durée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique est une variable aléatoire réelle D qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

<u>Partie A : Comparaison de deux tarifications</u>

Pour ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifications T_1 et T_2 , exprimées en euros, définies de la façon suivante :

- La première tarification est : $T_1 = aD$, où le réel $a > 1$ représente le prix d'une minute de communication.
- La deuxième tarification T_2 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(T_2 = n) = P(n-1 < D \leq n)$.

1) Calculer $E(T_1)$ en fonction de *a* et de α.
2) Déterminer la loi de T_2. De quelle loi s'agit-il ? Exprimer $E(T_2)$ en fonction de α.
3) On pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(t) = \dfrac{t}{1-e^{-t}}$ et $\varphi(0) = 1$.
   a) Montrer que φ est une fonction continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.
   b) Etudier les variations de la fonction φ sur $[0,+\infty[$.
   c) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.
4) Comparaison des tarifications
   a) Montrer qu'il existe un unique réel α_0 strictement positif tel que $\varphi(\alpha_0) = a$.
   b) Préciser quelle est, en moyenne, la tarification la plus avantageuse suivant la valeur de la durée moyenne d'une communication.

<u>Partie B : Etude d'un standard téléphonique</u>

Dans toute cette partie, θ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant θ inclus.

1) <u>Cas d'une seule communication</u>
   On désigne par *n* un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle I_n telle que :
   $$I_n(\Omega) = \left\{\frac{\theta}{n}, \frac{2\theta}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\theta}{n}, \theta\right\} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!] \quad P\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$
   De plus les variables aléatoires I_n et *D* (durée de la communication) sont supposées indépendantes.
   a) Pour tout réel positif *t*, calculer $P(D > t)$ en fonction de *t* et α.
   b) Montrer que : $P(D + I_n > \theta) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{1-e^{-\alpha\theta/n}}\right)$.
   c) En déduire la limite de $P(D + I_n > \theta)$ quand *n* tend vers l'infini.

2) Etude de l'encombrement du standard
On suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de temps $[0,\theta]$ se poursuive au-delà de l'instant θ est $p = \dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}$.
On note N_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0,\theta]$ et l'on suppose que N_θ suit une loi de Poisson de paramètre θ.
On note C_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0,\theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant θ.
Les instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendants.
   a) Soit $r \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi conditionnelle de C_θ sachant que $(N_\theta = r)$?
   b) En déduire la loi de probabilité de la variable C_θ.
   c) En déduire l'expression de l'espérance $E(C_\theta)$ en fonction de θ et de α, et la limite de $E(C_\theta)$ lorsque θ tend vers $+\infty$.

Exercice 12 (d'après CCIP 2002 voie E)

On appelle durée de vie d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire *T* définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Si *F* est la fonction de répartition de cette variable aléatoire *T*, on appelle loi de survie du composant la fonction *D* définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad D(t) = 1 - F(t)$.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que *T* est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \quad D(n) \neq 0$.

A – Coefficient d'avarie

Le composant est mis en service à l'instant $t = 0$. Pour tout entier naturel *n* non nul, on appelle coefficient d'avarie du composant à l'instant *n*, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant *n*, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $(n-1)$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par : $\pi_n = P_{(T>n-1)}(T = n)$.

1) Montrer que $\pi_n = \dfrac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$ pour tout entier naturel non nul *n*.
2) On suppose que *p* est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que *T* suit la loi géométrique de paramètre *p*. Démontrer que $\pi_n = p$ pour tout entier naturel non nul *n*.
3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \pi_n = \alpha$.
   a) Calculer $D(n)$ pour tout entier naturel non nul *n*.
   b) En déduire la loi de *T*.

B – Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.
On suppose à nouveau, dans cette partie, que $p \in]0,1[$ et que *T* suit la loi géométrique de paramètre *p* et que, pour tout entier *i* strictement positif, la durée de vie du *i*-ème composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi que *T*.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$ (S_k désigne donc l'instant où se produit la k-ème panne et le k-ème remplacement).

1) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \geq m \quad \sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_2 = T_1 + T_2$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par : $\forall n \geq k \quad P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$.

3) Soit n un entier strictement positif. On note U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.
   a) Calculer $P(U_n = 0)$ et $P(U_n = n)$.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, l'événement $(U_n \geq k)$ à l'aide d'un événement faisant intervenir la variable aléatoire S_k et en déduire $P(U_n \geq k)$.
   c) Montrer que U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

4) Dans cette question, le nombre p est égal à $0{,}005$. On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T. A chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.
   a) Préciser la loi de la variable U désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant $n = 100$ inclus.
   b) On désire qu'avec une probabilité de $0{,}95$, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant $n = 100$ inclus. A combien peut-on évaluer le stock minimal ? En désignant par Φ la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite, on donne : $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$.

<u>Partie 2 : Cas continu</u>

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

A – Loi de survie et coefficient d'avarie

Pour tout réel t positif, on appelle coefficient d'avarie à l'instant t le nombre $\pi(t) = \dfrac{f(t)}{D(t)}$.

1) Soit t un réel positif. Pour tout réel $h > 0$, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t,h)$ défini par : $q(t,h) = P_{(T>t)}(T \in]t, t+h])$.
   a) Pour tout réel h strictement positif, montrer que : $q(t,h) = \dfrac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$.
   b) Montrer que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa dérivée.
   c) En déduire la limite de $\dfrac{q(t,h)}{h}$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures.

2) On suppose, dans cette question, que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.
   b) Calculer le coefficient de survie $\pi(t)$ pour tout réel t positif.

3) On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par : $f(t)=te^{-t^2/2}$ si $t\geq 0$ et $f(t)=0$ si $t<0$.
   a) Vérifier que la fonction f ainsi définie est une densité de probabilité.
   b) Montrer que la variable aléatoire T a une espérance et la calculer.
   c) Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire T.
   d) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.
   e) Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$.
4) On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on ait : $\forall t\in\mathbb{R}^+ \quad \pi(t)=\alpha$.
   a) Pour tout réel t positif, on pose : $g(t)=e^{\alpha t}D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}^+$.
   b) En déduire la loi de la variable aléatoire T.

B – Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (strictement positive) notée $E(T)$ et représentant la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K (C et K étant deux constantes strictement positives).

Une première méthode consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est : $c_1=\dfrac{K+C}{E(T)}$.

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par : $c_2(\theta)=\dfrac{K+[1-D(\theta)]C}{\int_0^\theta D(t)dt}$.

1) Montrer que : $\int_0^\theta D(t)dt=P(T>\theta)\times\theta+P(T\leq\theta)\times\int_0^\theta t\dfrac{f(t)}{F(\theta)}dt$. L'intégrale $\int_0^\theta D(t)dt$ peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.
2) Calculer c_1 et, pour tout réel θ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ. Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage.
3) On suppose que T suit la loi décrite dans la question **A.**3 de la **Partie 2**.
   a) Préciser la valeur de c_1 et montrer que l'on a : $\lim\limits_{\theta\to+\infty}c_2(\theta)=c_1$.
   b) Pour tout réel $\theta>0$, on pose : $\varphi(\theta)=C\int_0^\theta e^{-t^2/2}dt-\dfrac{1}{\theta}[K+C(1-e^{-\theta^2/2})]$. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier ses variations sur $]0,+\infty[$. En déduire le tableau de variation de φ.
   c) Etudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en un réel θ_0.
   d) Etablir l'égalité $c_2(\theta_0)=C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0<\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1+\dfrac{K}{C}\right)$.

Exercice 13 (d'après CCIP 1996 voie S)

On considère un entier $n \geq 1$.

Un banquier s'est imposé de vendre une action en *n* jours ouvrables. Chaque jour, suivant le cours du jour, il décide de vendre ou d'attendre dans l'espoir de vendre mieux plus tard. S'il n'a pas réalisé la vente avant, il s'impose de vendre son action au jour *n*. Quelle stratégie va-t-il choisir ? Le problème ci-dessous propose, dans un cadre théorique précis, d'évaluer diverses stratégies pour de tels choix en chaîne.

Le jour *i*, le cours de l'action est représenté par une variable aléatoire X_i. On obtient ainsi une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et toutes de même loi.

Chaque jour $i \leq n-1$, le banquier se fixe un seuil s_i : si le cours de l'action est supérieur à ce seuil ($X_i \geq s_i$), il vend l'action, sinon il attend. Et s'il ne l'a pas vendu avant, il décide de vendre son action le jour *n*.

On définit la variable aléatoire G_n égale au gain réalisé au moment de la vente de l'action et la variable aléatoire L_n égale au temps d'attente pour réaliser cette vente :

- si, pour tout $i < n$, on a $X_i < s_i$, alors $G_n = X_n$ et $L_n = n$.
- et sinon, $G_n = X_k$ et $L_n = k$ où *k* est le plus petit rang *i* tel que $X_i \geq s_i$.

A – Exemples d'expériences aléatoires discrètes

Dans cette partie *r* est un entier impair et $r \geq 3$. On suppose que, pour tout *i* entier naturel non nul, la variable aléatoire X_i est discrète et équirépartie sur l'ensemble $\left\{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \ldots, \frac{r}{r}\right\}$ (chacune des $r+1$ valeurs étant prise avec la même probabilité).

1) Première stratégie

   On pose $s_1 = 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc : $G_n = X_1$ et $L_n = 1$.

   Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n.

2) Deuxième stratégie,

   On suppose $n \geq 2$. Pour tout entier $i \leq n-1$, on pose $s_i = \frac{1}{2}$.

   a) Calculer $P\left(X_1 < \frac{1}{2}\right)$.

   b) Exprimer en fonction des variables X_1, …, X_n l'événement $\left(G_n = \frac{j}{r}\right)$ pour tout entier *j* tel que $0 \leq j \leq \frac{r-1}{2}$, puis tel que $\frac{r+1}{2} \leq j \leq r$.

   c) En déduire que la loi de G_n est définie par :

   $$P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1} \times \frac{1}{2^n} \text{ si } 0 \leq j \leq \frac{r-1}{2}$$

   $$P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \text{ si } \frac{r+1}{2} \leq j \leq r.$$

   d) Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

   Déterminer la limite de g_n quand *n* tend vers $+\infty$ avec *r* fixé.

   Déterminer la limite de g_n quand *r* tend vers $+\infty$ avec *n* fixé.

   e) Déterminer la loi de la variable aléatoire L_n et calculer son espérance ℓ_n.

   Déterminer la limite de ℓ_n quand *n* tend vers $+\infty$ avec *r* fixé.

3) <u>Troisième stratégie.</u>
On suppose $n \geq 2$. Pour tout entier $i \leq n-1$, on pose $s_i = 1$.
   a) Exprimer en fonction des variables X_1, …, X_n l'événement $\left(G_n = \dfrac{j}{r}\right)$ pour tout entier $0 \leq j \leq r-1$. En déduire la loi de la variable aléatoire G_n.
   b) Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.
   Déterminer la limite de g_n quand r tend vers $+\infty$ avec n fixé.
   c) Déterminer la loi de la variable aléatoire L_n et calculer son espérance ℓ_n.
   Déterminer la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.
   Déterminer la limite de ℓ_n, quand r tend vers $+\infty$ avec n fixé.
4) <u>Conclusion</u>
Comparer brièvement les trois stratégies de la partie A .

<u>B – Exemples d'expériences aléatoires continues</u>

Dans cette partie, on suppose que, pour tout entier $i \geq 1$, la variable aléatoire X_i suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

1) <u>Première stratégie</u>
On suppose que $n \geq 2$. On pose $s_1 = 0$.
Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n.
2) <u>Deuxième stratégie</u>
On suppose que $n \geq 2$. Soit un réel $\alpha \in [0,1[$. On pose $s_i = \alpha$ pour tout entier $i \leq n-1$.
   a) On note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire G_n.
   Que vaut $F_n(t)$ pour t n'appartenant pas à $[0,1[$?
   Pour $t \in [0,\alpha[$ décrire l'événement $(G_n \leq t)$ et en déduire $F_n(t)$.
   Pour $t \in [\alpha,1[$ décrire l'événement $(G_n > t)$ et en déduire $F_n(t)$.
   b) Montrer que G_n admet une densité f_n définie par :
   $$f_n(t) = \alpha^{n-1} \text{ si } t \in [0,\alpha[\qquad f_n(t) = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \text{ si } t \in [\alpha,1[\qquad f_n(t) = 0 \text{ sinon.}$$
   c) Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n en fonction de α. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$.
   d) Déterminer la loi de la variable aléatoire L_n et calculer son espérance ℓ_n.
   e) Dans cette question $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Calculer g_n et ℓ_n.
   Quelle remarque peut-on faire en comparant ces résultat avec ceux de la deuxième stratégie de la partie A ?