Réponses et Indications (Variables aléatoires discrètes)

Exercice 1 (d'après ESSEC 1999 voie T)

Partie A : Etude du temps d'attente pour obtenir un double six

1) $p=\dfrac{1}{36}$ par indépendance.
2) $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{36}\right)$ (temps d'attente du premier succès).
3) $E(X)=36$ et $V(X)=1260$.
4) Initialiser *X* à 0, puis dans une boucle, répéter $X := X+1$ et deux tirages aléatoires entre 1 et 6 jusqu'à ce qu'ils soient tous les deux égaux à 6. Afficher la valeur de *X*.

Partie B : Etude du temps d'attente pour qu'au moins un dé ait amené un six

1) $q=\dfrac{25}{36}$ par indépendance.
2) $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{11}{36}\right)$ car la probabilité de succès est $1-p_2$.
3) $E(Y)=\dfrac{36}{11}$ et $V(Y)=\dfrac{900}{121}$.
4) Initialiser *Y* à 0, puis dans une boucle, répéter $Y := Y+1$ et deux tirages aléatoires entre 1 et 6 jusqu'à ce que l'un des deux soit égal à 6. Afficher la valeur de *Y*.

Partie C : Etude du temps d'attente pour que chacun des dés ait amené un six

1) $p_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ par indépendance.
2) $P(Z\le n)=1-2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+\left(\dfrac{25}{36}\right)^n$.
3) $P(Z=n)=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\dfrac{11}{25}\left(\dfrac{25}{36}\right)^n$. Exprimer $P(Z\le n)$ en fonction de $P(Z\le n-1)$.
4) Utiliser les sommes des séries géométriques.
5) $E(Z)=\dfrac{96}{11}$. Utiliser les sommes des dérivées de séries géométriques.
6) $E[Z(Z-1)]=\dfrac{12720}{121}$ et $V(Z)=\dfrac{4560}{121}$.
   Utiliser les sommes des dérivées de séries géométriques.
7) Initialiser *Z* à 0, puis dans une boucle, répéter $Z := Z+1$ et deux tirages aléatoires entre 1 et 6 jusqu'à ce que l'un des deux soit égal à 6. S'ils ne sont pas tous les deux égaux à 6, dans une boucle, répéter $Z := Z+1$ et un tirage aléatoire entre 1 et 6 jusqu'à ce qu'il soit égal à 6. Afficher la valeur de *Z*.

Exercice 2 (d'après EM Lyon 2000 voie E)

A – Premier protocole

1) $P(E_k)=\dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$. Utiliser la formule des probabilités composées.
2) $X(\Omega)=[\![a-2n+1,a-1]\!]$ et $P(X=a-k)=\dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$ car $X=a-k$ si E_k est réalisé.

   $E(X)=a-\dfrac{2n+1}{3}$.

B – Deuxième protocole

1) $Y(\Omega) = [\![a-n, a-1]\!] \cap \{-n\}$.

2) et 3) $P(X = a-k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$ si $k \in [\![1,n]\!]$ et $P(Y = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

5) $E(Y) = \dfrac{3a(3n-1) - 7n^2 + 1}{6(2n-1)}$.

C – Comparaison des deux protocoles

Le protocole le plus favorable est le premier si $a > \dfrac{n+1}{3}$.

Le protocole le plus favorable est le second si $a < \dfrac{n+1}{3}$.

Exercice 3 (d'après Ecricome 2004 voie E)

1) a) $P(E) = 0{,}085$. Utiliser les probabilités totales.
   b) $P_E(A) \approx 0{,}82$. Utiliser la formule de Bayes.
   c) $N \hookrightarrow \mathscr{B}(100\,;0{,}085)$ donc $E(N) = 8{,}5$ et $V(N) = 7{,}7775$.
   d) $\lambda = 8{,}5$ et $P(N = k) \approx \dfrac{(8{,}5)^k}{k!} e^{-8{,}5}$.
   e) $P(E_1) \approx 0{,}28338$ et $P(E_2) \approx 0{,}89214$.

2) a) $T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(0{,}7)$ donc $E(T_1) = \dfrac{10}{7}$ et $V(X) = \dfrac{30}{49}$.
   b) Utiliser les probabilités totales avec le système complet d'événements $(T_1 = j)_{j \geq 1}$.
   c) Utiliser la somme d'une dérivée de série géométrique.
   d) $E(T_2) = \dfrac{20}{7}$. Utiliser la somme d'une dérivée de série géométrique.

3) a) $P(L_1 = k) = 0{,}3(0{,}7)^k + 0{,}7(0{,}3)^k$
   En effet $(L_1 = k) = (A_1 \cap ... A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap ... B_k \cap A_{k+1})$.
   b) Utiliser les somme de séries géométriques.
   c) $E(L_1) = \dfrac{58}{21}$. Utiliser les sommes de dérivées de séries géométriques.
   d) $P[(L_1 = k) \cap (L_2 = j)] = (0{,}7)^{k+1}(0{,}3)^j + (0{,}3)^{k+1}(0{,}7)^j$.
   En effet, l'événement $(L_1 = k) \cap (L_2 = j)$ est réalisé si l'on a soit d'abord k fois A, puis j fois B, puis A, soit d'abord k fois B, puis j fois A, puis B.
   e) $P(L_2 = j) = (0{,}7)^2(0{,}3)^{j-1} + (0{,}3)^2(0{,}7)^{j-1}$.
   Utiliser l'expression d'une loi marginale en fonction de la loi conjointe.
   f) $E(L_2) = 2$. Utiliser les sommes de dérivées de séries géométriques.

Exercice 4 (d'après ISC 1996 voie S)

Méthode 1

1) $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{10}{N+10}\right)$ donc $E(X) = 1 + \dfrac{N}{10}$ et $V(X) = \dfrac{N(N+10)}{100}$.

2) a) $E_n = 1 + \dfrac{N}{10}$ et $V_n = \dfrac{N(N+10)}{100n}$ (par indépendance).
   b) $P(|Z_n - E_n| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V_n}{\varepsilon^2}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Z_n - E_n| \geq \varepsilon) = 0$.

3) $N = 50$.

Méthode 2

1) $Y_N \hookrightarrow \mathscr{H}\left(N, 10, \dfrac{10}{N}\right)$ donc $Y(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ et $P(Y_N = k) = \dfrac{\dbinom{10}{k}\dbinom{N-10}{10-k}}{\dbinom{N}{10}}$.

2) $a_N \neq 0 \Leftrightarrow N \geq 18$ et $a_N = 4050 \times \dfrac{[(N-10)!]^2}{(N-18)!N!}$

3) Suite croissante jusqu'à 50 puis décroissante.

4) Le maximum est obtenu pour $N = 50$.

Exercice 5 (d'après EM Lyon 1995 voie E)

1) $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = \dfrac{2}{3}$, donc $P(B) > P(A)$.
Utiliser les probabilités totales en introduisant G « il tire le numéro gagnant"

2) a) $X \hookrightarrow \mathscr{H}\left(n, p, \dfrac{p}{n}\right)$ donc $X(\Omega) = [\![0, p]\!]$ et $P(X = k) = \dfrac{\dbinom{p}{k}\dbinom{n-p}{p-k}}{\dbinom{n}{p}}$.

Puis utiliser $\sum_{k=0}^{p} P(X = k) = 1$ pour montrer l'égalité.

b) $E(X) = \dfrac{p^2}{n}$ en utilisant l'égalité du a). Puis utiliser la définition de $E(X)$.

c) $P_{(X=k)}(Z = j) = \dfrac{\dbinom{p-k}{j}\dbinom{n-3p+k}{p-j}}{\dbinom{n-2p}{p}}$ si $j \in [\![0, p-k]\!]$ et $P_{(X=k)}(Z = j) = 0$ sinon.

Même raisonnement qu'au 2) a) avec $(n-2p)$ numéros, dont $(p-k)$ gagnants et $(n-3p+k)$ perdants. L'égalité est conséquence de $\sum_{j=0}^{p-k} P_{(X=k)}(Z = j) = 1$.

d) Utiliser l'expression de la loi marginale de Z à partir de la loi conditionnelle.

e) $E(Z) > E(X)$, donc, en moyenne, la stratégie B est meilleure.

Exercice 6 (d'après HEC 2003 voie E)

Partie A

1) $A^2 - 2aA = (b^2 - a^2)I$.

2) $A^{-1} = \dfrac{1}{b^2 - a^2}\begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

3) Si $a = b$, la matrice A n'est pas inversible.

4) Montrer que les matrices $A-(a+b)I$ et $A-(a-b)I$ ne sont pas inversibles.

Partie B

1) Utiliser les probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = k)_{k\geq 1}$ et l'indépendance de X et Y. $P(E) = \dfrac{2}{2-p}$ car E est l'événement contraire.

2) $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Donc $\operatorname{cov}(S, D) = 0$.

3) S et D ne sont pas indépendantes car $P[(S = 2) \cap (D = 0)] \neq P(S = 2)P(D = 0)$.

4) Utiliser les probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = k)_{k\geq 1}$ et l'indépendance de X et Y.
5) Etudier le sens de variations de la suite de terme général $u_n = P(S = n)$ et en déduire la valeur de n où elle atteint son maximum.

Exercice 7 (d'après CCIP 2004)

1) Evident car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
2) Décomposer l'événement $(X \geq k)$ en deux événements incompatibles.
3) Faire apparaître une somme télescopique.
4) Minorer k dans la somme.
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} nP(X \geq n+1) = 0$ car le majorant est le reste d'une série convergente.
6) Utiliser le 3) .
7) La série à termes positifs $\left(\sum kP(X = k)\right)$ est majorée par une série convergente.

Exercice 8 (d'après EDHEC 2004 voie S)

1) a) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\varepsilon = \lambda$.
   b) Remarquer que $(X \geq 2\lambda) \subset (|X - \lambda| \geq \lambda)$.
2) a) Expliciter $P(X = k)$ pour justifier la convergence.
   b) $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
   c) Minorer $G_X(t)$ par la somme correspondant à $k \geq a$.
   d) Le minimum est $g(2) = \dfrac{e}{4}$.
   e) Montrer que $P(X \geq 2\lambda)$ est un minorant de $\left\{[g(t)]^{\lambda} / t \geq 1\right\}$.
   f) Cette inégalité est toujours meilleure. Utiliser les variations de $x \mapsto x\left(\dfrac{e}{4}\right)^x$.

Exercice 9 (d'après EDHEC 2006 voie S)

Partie A : Etude de la variable X_n

1) $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
2) $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $P(X_2 = 0) = \dfrac{5}{12}$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4}$, $P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{3}$.
   Utiliser les probabilités totales avec le système d'événements $(X_1 = k)_{0\leq k\leq 1}$.
3) Dans l'hérédité, utiliser : $X_{n+1} = X_n + 1$ ou $X_{n+1} = 0$.
4) a) Remarquer que, si $k \geq 1$, $(X_n = k) \subset (X_{n-1} = k-1)$, et en déduire la probabilité de $(X_{n-1} = k-1) \cap (X_n = k)$.
   b) Récurrence sur k.
   c) Changement de variable : $j = n - k$.
   d) $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{5}{12}$ et $u_3 = \dfrac{3}{8}$.
5) a) Sommer l'égalité de 1 à n et faire un changement de variable pour avoir $E(X_{n-1})$.
   b) $E(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Sommer de 1 à n l'égalité précédente.
   c) $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j} = 1$. Puis utiliser le 4) c) pour exprimer u_n en fonction de u_0, ..., u_{n-1}.
   d) Récurrence forte. Série minorée par une série divergente, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$.

Partie B : Etude du premier retour à l'origine

1) a) $(T=k)=(X_1=1)\cap\ldots\cap(X_{k-1}=k-1)\cap(X_k=0)$ si $k\geq 2$ et $(T=1)=(X_1=0)$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées.

c) $P(T=0)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(T=k)$. Il est quasi-certain que le mobile reviendra en O.

2) T n'a pas d'espérance. Série divergente.

Partie C : Informatique

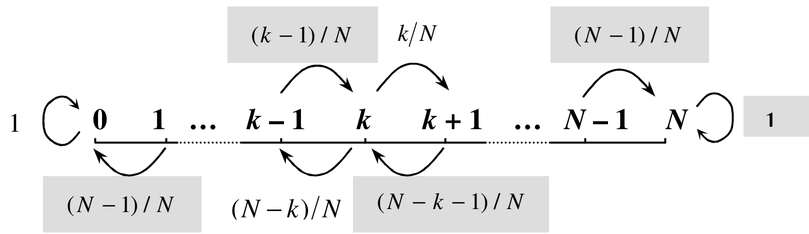
1) For i := 1 to k do s := $s+u[i-1]\,/\,(k-i+2)$;
$E := E+u[k]$;

2) hasard := random(T + 1) ;
Until hasard = 0 ;

Exercice 10 (d'après ESSEC 2005 voie E)

Partie A : Etude d'une suite de variables aléatoires

1)



2) $P(X_{n+1}=0)=P(X_n=0)+\dfrac{N-1}{N}P(X_n=1)$.

$P(X_{n+1}=k)=\dfrac{k-1}{N}P(X_n=k-1)+\dfrac{N-k-1}{N}P(X_n=k+1)$ si $1\leq k\leq N-1$.

$P(X_{n+1}=N)=\dfrac{N-1}{N}P(X_n=N-1)+P(X_n=N)$

3) $$M=\begin{pmatrix}
1 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & & & & \vdots\\
0 & \frac{1}{N} & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{N} & 0\\
\vdots & & & & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{N-1}{N} & 1
\end{pmatrix}$$. Récurrence.

Partie B : Etude d'un cas particulier

1) $M=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3&2&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&3\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Sp}(M)=\left\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1\right\}$.

2) $E_{-1/3}$ et $E_{1/3}$ sont les droites de base $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, E_1 le plan de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Récurrence. Calculer D^n et en déduire M^n puis U_n.

$$P(X_n = 0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad P(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad P(X_n = 3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

4) $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \frac{3}{4}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = \frac{1}{4}$

Partie C : Etude de l'arrêt du mobile

1) $p_0 = 0$, $p_N = 1$, $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.

2) a) Utiliser les probabilités totales pour la probabilité conditionnelle $P_{(X_0=k)}$ avec le système complet d'événements $(X_1 = j)_{0\le j\le N}$

b) $p_{k+1} - p_k = \dfrac{N-k}{k}(p_k - p_{k-1})$.

c) Récurrence sur k.

d) $p_1 = \dfrac{1}{2^{N-1}}$

3) Symétrie entre les deux extrémités. Montrer que : $\forall k \in [\![0, N]\!] \quad p_k + q_k = 1$.

Exercice 11 (d'après ESSEC 2002 voie E)

1) a) Primitive du polynôme P qui s'annule en 1, donc factorisable par $(x-1)$.

b) Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.
Utiliser la linéarité de l'intégrale et $Q = \Phi(P) \Leftrightarrow P = Q + (X-1)Q'$.

c) $\Phi(e_k) = \dfrac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} e_j$. Donc $M_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix}$

d) Φ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\Phi) = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p+1}\right\} = \left\{\frac{1}{k+1} / 0 \le k \le p\right\}$.

2) a) Les fonctions propres associés à $\lambda = 1$ sont les polynômes constants non nuls.

b) Ecrire $\Phi(P) = \lambda P$. Si $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, l'ordre de multiplicité est k.

c) $\forall k \in [\![0, p]\!] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_k(x) = (x-1)^k$.

d) $P = \sum_{k=0}^{p} a_k P_k$ avec $\forall k \in [\![0, p]\!] \quad a_k = \dfrac{1}{k!} P^{(k)}(1)$. Utiliser la formule de Taylor.

e) $\Phi_n = \sum_{k=0}^{p} \dfrac{a_k}{(k+1)^n} P_k$. Et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \Phi_n(x) = P(1)$.

3) a) $\forall k \in [\![0, p]\!] \quad P(X_{n+1} = k) = \sum_{j=k}^{p} \dfrac{1}{j+1} P(X_n = j)$. Utiliser les probabilités totales.

b) $M = M_\Phi$.

c) $(0 \quad 1 \quad \cdots \quad p)M = \dfrac{1}{2}(0 \quad 1 \quad \cdots \quad p)$. Donc $E(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2} E(X_n)$.

Donc $E(X_n) = \dfrac{p}{2^n}$ et $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 0$.

d) $U_n = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par récurrence. Utiliser 2) e) car c'est la matrice de $\Phi^n(e_p)$.

Il est quasi-certain que le mobile arrivera en 0 et y restera.

Exercice 12 (d'après Ecricome 2005 voie E)

1) a) Le discriminant est strictement positif.

b) $r_1 + r_2 = q$ et $r_1 r_2 = -pq$.

c) $f(1) = p^2 \qquad f(-1) = 1 + q^2 \qquad f(0) = -pq$.

d) Utiliser le signe du trinôme pour montrer $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$.

2) a) $a_1 = p^2 \qquad a_2 = p^2 q \qquad a_3 = p^2 q$.

b) $P_F(A_{n+2}) = a_{n+1}$ et $P_{\overline{F}}(A_{n+2}) = q a_n$. Etudier la série de tirages à partir du $2^{\text{ème}}$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales.

d) Récurrence linéaire d'ordre 2.

3) a) $M = \begin{pmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $M^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_2^{n+1} - r_1^{n+1} & r_1 r_2 (r_1^n - r_2^n) \\ r_2^n - r_1^n & r_1 r_2 (r_1^{n-1} - r_2^{n-1}) \end{pmatrix}$ et $X_n = M^n X_0$.

4) a) $T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et $\forall n \geq 2 \quad P(T = n) = a_{n-1} = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^{n-1} - r_1^{n-1})$.

b) Sommes de séries géométriques convergentes.

c) $E(T) = \dfrac{1+p}{p^2}$. Sommes de dérivées de séries géométriques convergentes.

d) $V(T) = \dfrac{1 + 6p - 10p^2 + 3p^3}{p^4}$. Commencer par calculer $E[T(T-1)]$ en utilisant des sommes de dérivées de séries géométriques convergentes.

Exercice 13 (d'après EDHEC 1998 voie S)

1) a) $P(X=2)=\dfrac{1}{4}$.

b) $P_{P_1}(X=k)=\dfrac{1}{2^{k-1}}$. Etudier la série de lancers à partir du $2^{\text{ème}}$.

c) $P_{F_1}(X=k)=P(X=k-1)$. Etudier la série de lancers à partir du $2^{\text{ème}}$.

d) Utiliser la formule des probabilités totales.

e) $u_k=k-1$ et $P(X=k)=\dfrac{k-1}{2^k}$. La suite (u_k) est arithmétique.

f) $P(X=0)=0$. Utiliser $P(X=0)+\sum_{k=2}^{+\infty}P(X=k)=1$.

g) $E(X)=4$. Somme de dérivée de série géométrique convergente.

2) a) $P(Y=2)=\dfrac{1}{4}$ et $P(Y=3)=\dfrac{1}{8}$.

b) Leur réunion est Ω et ils sont deux à deux incompatibles.

c) Utiliser la formule des probabilités totales.

d) $P(Y=k)=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}\right]$. Récurrence linéaire d'ordre 2.

e) $P(Y=0)=0$. Utiliser $P(Y=0)+\sum_{k=2}^{+\infty}P(Y=k)=1$.

f) $E(Y)=6$. Sommes de dérivées de séries géométriques convergentes.

Exercice 14 (d'après ESCP 1997 voie E)

1) a) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a)$. Temps d'attente du premier succès.

b) $E(X)=\dfrac{1}{1-a}$ et $V(X)=\dfrac{a}{(1-a)^2}$.

c) $P(X\geq k)=a^{k-1}$. Utiliser $P(X\geq k)=\sum_{j=k}^{+\infty}P(X=j)$ ou $P(X\geq k)=1-\sum_{j=1}^{k-1}P(X=j)$.

2) Dans les résultats précédents, remplacer *a* par *b*.

3) $P(Y\geq X)=\dfrac{1-a}{1-ab}$. Utiliser les probabilités totales avec le système $(X=k)_{k\geq 1}$.

4) $P(M\geq k)=(ab)^{k-1}$. Exprimer $(M\geq k)$ en fonction de $(X\geq k)$ et $(Y\geq k)$.
En déduire que $M \hookrightarrow \mathcal{G}(1-ab)$.

5) $P(U\leq k)=1-a^k-b^k+(ab)^k$. Exprimer $(U\leq k)$ en fonction de $(X\leq k)$ et $(Y\leq k)$.
$P(U=k)=a^{k-1}(1-a)+b^{k-1}(1-b)-(ab)^{k-1}(1-ab)$.

6) a) $\forall k\geq 2\quad P(S=k)=\begin{cases}\dfrac{(1-a)(1-b)(b^{k-1}-a^{k-1})}{b-a} & \text{si } a\neq b\\ (k-1)a^{k-2}(1-a)^2 & \text{si } a=b\end{cases}$. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système $(X=j)_{j\geq 1}$.

b) Si $a\neq b$: $\forall k\geq 2\quad P_{(S=j)}(Y=k)=\begin{cases}\dfrac{a^{j-k-1}b^{k-1}(b-a)}{b^{j-1}-a^{j-1}} & \text{si } k\leq j-1\\ 0 & \text{si } k\geq j\end{cases}$.

Si $a = b$: $\forall k \geq 2 \quad P_{(S=j)}(Y = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{j-1} \text{ si } k \leq j-1 \\ 0 \text{ si } k \geq j \end{cases}$.

7) a) $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

b) $P(V = 0) = \dfrac{(1-a)(1-b)}{1-ab}$ et $P[(M = k) \cap (V = 0)] = (ab)^{k-1}(1-a)(1-b)$.

c) $P[(M = k) \cap (V = j)] = (ab)^{k-1}(1-a)(1-b)(a^j + b^j)$ si $k \geq 1$ et $j \geq 1$.

d) $\forall j \geq 1 \quad P(V = j) = \dfrac{(1-a)(1-b)(a^j + b^j)}{1-ab}$ et $P(V = 0) = \dfrac{(1-a)(1-b)}{1-ab}$.

e) Les variables aléatoires M et V sont indépendantes. Pour tous les $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$, comparer $P[(M = k) \cap (V = j)]$ avec $P(M = k) \times P(V = j)$.

Exercice 15 (d'après EDHEC 2007 voie S)

Partie A

1) $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$. Utiliser les probabilités totales avec le système complet $(U, \overline{U})$.

2) $(X = k) = B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$. Puis utiliser les probabilités totales avec $(U, \overline{U})$.

Donc : $\forall k \geq 1 \quad P(X = k) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n-1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right]$.

3) $E(X) = \dfrac{n^2}{2(n-1)}$. Sommes de dérivées de séries géométriques convergentes.

4) $V(X) = \dfrac{n^2(3n^2 - 10n + 10)}{4(n-1)^2}$. Sommes de dérivées de séries géométriques convergentes.

5) Symétrie des boules noires et blanches entre *U* et *V*.

6) Else Repeat x := x + 1 ; tirage := random(n) ; Until (tirage = n - 1) ;

Partie B

1) $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.

2) $\forall k \geq 2 \quad P(X = k) = \dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$. La formule n'est pas vraie pour $k = 1$.

Utiliser la formule des probabilités composées.

3) $E(X) = \dfrac{3n-2}{2(n-1)}$. Somme de dérivée de série géométrique convergente.

4) Reprendre pour *Y* le raisonnement du 1) et du 2).

5) Les 6 premières lignes sont inchangées. Ensuite, initialiser x à 1 et affecter random(n) à tirage. La condition devient :

If ((hasard = 1) and (tirage = 0)) or ((hasard = 0) and (tirage <> 0)) Then ...

L'intérieur de la boucle ne change pas, mais la condition d'arrêt est : tirage <> 0.

Ensuite, afficher la valeur de x. (Il n'y a pas Else ...).

Partie C

1) $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.

2) $\forall k \geq 1 \quad P(X = k) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n-1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right]$. Même raisonnement que dans A car on reste toujours dans l'urne *U*.

3) Voir A - 3).
4) $(Y = 2k) = \overline{B_1} \cap ... \cap \overline{B_{2k-1}} \cap B_{2k}$. Utiliser la formule des probabilités composées.
A chaque tirage, on change d'urne.
5) $(Y = 2k+1) = \overline{B_1} \cap ... \cap \overline{B_{2k}} \cap B_{2k+1}$. Même raisonnement.
6) $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = \dfrac{n^2(n^2-2n+2)}{(n^2-n+1)^2}$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} T_m = \dfrac{n^2(n^2+n-1)}{2(n^2-n+1)^2}$. Et $E(Y) = \lim\limits_{m\to+\infty}(S_m + T_m)$.
Exprimer les sommes partielles de $\left(\sum jP(Y=j)\right)$ aux rangs pairs et impairs.
7) $E(X) = E(Y)$ si $n = 2$. Et $E(X) > E(Y)$ si $n \geq 3$.

Exercice 16 (d'après HEC 2000 voie E)

Partie A

1) a) Utiliser l'inégalité de la moyenne en remarquant : $\ln(k+1) - \ln k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$.
b) Sommer l'inégalité précédente de 1 à n et de 1 à $n-1$.
c) $u_n \sim \ln n$. Attention : $n+1 \sim n$ ne prouve pas $\ln(n+1) \sim \ln n$.
2) a) Calculer le second membre et minorer.
b) Sommer l'inégalité précédente de 2 à n et majorer.
c) $u_n - w_n \sim \ln n$ car $w_n = o(u_n)$.

Partie B

1) X_1 est la variable certaine égale à 1.
2) $X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}(2)$, donc $E(X_2) = \dfrac{3}{2}$ et $V(X_2) = \dfrac{1}{4}$.
3) a) $I_n \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$.
b) $P_{(I_n=1)}(X_n = j) = 1$ si $j = 1$ et $P_{(I_n=1)}(X_n = j) = 0$ si $j \geq 2$.
c) Si $I_n = k$, le deuxième tirage s'effectue parmi les numéros de 1 à $k-1$, et le nombre de tirages nécessaires ensuite est donc X_{k-1}, donc $X_n = 1 + X_{k-1}$.
4) a) $P_{(I_3=1)}(X_3 = 2) = 0 \quad P_{(I_3=2)}(X_3 = 2) = 1 \quad P_{(I_3=3)}(X_3 = 2) = \dfrac{1}{2}$.
b) $P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3} \quad P(X_3 = 2) = \dfrac{1}{2} \quad P(X_3 = 3) = \dfrac{1}{6} \quad E(X_3) = \dfrac{11}{6} \quad V(X_3) = \dfrac{17}{36}$
Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(X_3 = 2)$.
5) a) On tire au plus n boules.
b) $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n!}$ (il faut tirer les numéros par ordre décroissant).
c) Utiliser les probabilités totales avec le système complet d'événements $(I_n = k)_{1\leq k\leq n}$.
d) $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = P(X_{n-1} = j-1)$.
e) Egalité à vérifier pour $j = 1$.
6) a) Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} jP(X_n = j)$ en utilisant l'égalité précédente. Attention aux bornes.
b) $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $E(X_n) \sim \ln n$. Sommer $E(X_k) - E(X_{k-1})$.
c) $E(X_n^2) = E(X_{n-1}^2) + \dfrac{2}{n}E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.
d) $V(X_n) \sim \ln n$. Sommer $V(X_k) - V(X_{k-1})$.
7) a) La loi $\mathscr{B}(1)$ est la loi certaine égale à 1.

b) $S_n = S_{n-1} + T_n$ (somme de variables indépendantes) et $T_n(\Omega) = \{0,1\}$.

c) Récurrence. Dans l'hérédité, séparer les cas $j \leq n$ et $j = n+1$.

d) Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Partie C

1) Y_1 est la variable certaine égale à 1.

2) $Y_2(\Omega) = \{1,3\}$ $\quad P(Y_2 = 1) = P(Y_2 = 3) = \dfrac{1}{2}$.

3) a) Si $I_n = k$, le deuxième tirage s'effectue parmi les numéros de 1 à $k-1$, et donc $Y_n = k + Y_{k-1}$. On pourra compléter par le calcul de $P_{(I_n=1)}(Y_n = j)$.

b) Utiliser les probabilités totales avec le système complet d'événements $(I_n = k)_{1\leq k\leq n}$, en séparant les cas $j \geq 2$ et $j = 1$.

c) $E(Y_n) = n$. Déterminer $Y_n(\Omega)$, puis calculer $\displaystyle\sum_{j\in Y_n(\Omega)} jP(Y_n = j)$ en utilisant l'égalité précédente. Attention aux bornes.

Partie D

1) $Z_n^{(n)} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2) $Z_1^{(n)}$ est la variable certaine égale à 1.

3) Utiliser les probabilités totales avec le système complet d'événements $(I_n = k)_{1\leq k\leq n}$.

4) Récurrence forte. Dans l'hérédité, séparer les cas $i \leq n$ et $i = n+1$.

5)

6) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)} = X_n$. Donc $E(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(Z_i^{(n)})$.

7) Remarquer que $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} iZ_i^{(n)}$.

Partie E

n est le nombre de boules dans l'urne au départ, a est le nombre de tirages, donc X_n, alea est le numéro tiréet b est la somme des numéros tirés donc Y_n.

Donc dans les conditions du 1), on obtient $a = 5$ et $b = 23$.

Exercice 17 (d'après Ecricome 2004 voie S)

Partie I – Etude d'une variable discrète d'univers image fini

A – Préliminaire

1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$ si $n \geq 1$.

2) Raisonner par récurrence.

3) Suite croissante majorée par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (donc minorée par a_1).

B – Etude de cas particuliers

1) R_1 est la variable certaine égale à 0 et $P(R_2 = 0) = P(R_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

$P(R_3 = 0) = \dfrac{1}{4}$ $\quad P(R_3 = 1) = \dfrac{3}{8}$ $\quad P(R_3 = 2) = \dfrac{3}{8}$.

On pourra introduire l'événement A_k « on choisit l'urne A la k-ème fois ».

2) $E(R_1)=V(R_1)=0 \qquad E(R_2)=\dfrac{1}{2}$ et $V(R_2)=\dfrac{1}{4} \qquad E(R_3)=\dfrac{9}{8}$ et $V(R_3)=\dfrac{39}{64}$.

3) $R_n(\Omega)=[\![0,n-1]\!]$.

4) a) La probabilité est $\dbinom{n-1+k}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1+k}$ car on choisit k fois B et $n-1$ fois A.

b) $P(R_n=k)=\dfrac{1}{2^{n-1+k}}\dbinom{n-1+k}{k}$. Utiliser la symétrie entre A et B.

5) Utiliser l'expression avec les factorielles.

6) Sommer de 0 à $n-2$ et effectuer un changement d'indice.

7) $n-E(R_n)\sim\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$. Utiliser la partie A : $a_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

8) Sommer $2(k+1)^2P(R_n=k+1)$ de 0 à $n-2$ et effectuer un changement d'indice.

9) $V(R_n)=(2n+1)E(R_n)-[E(R_n)]^2-n(n-1)$.

10) En utilisant la partie A, remarquer que si $u_n=n-E(R_n)$, alors : $u_n=\dfrac{2n-1}{2n-2}u_{n-1}$.

Demander à l'utilisateur un entier n et lire cette valeur. Initialiser la variable u à 1, puis, dans une boucle de $k:=2$ à $n-2$, calculer $\dfrac{2k-1}{2k-2}u$. Afficher la valeur de $n-u$.

C – Retour au cas général

1) Les événements E_A et E_B « à la fin de l'expérience l'urne A (resp. B) est pleine » sont contraires. Calculer leur probabilité en utilisant les nombres N_A et N_B de boules contenues dans A et dans B à la fin de l'expérience.

2) a) Suite croissante majorée par $\dfrac{1}{p^n}$ d'après (1).

b) $\dbinom{m-1+k}{m-1}\sim\dfrac{m^k}{k!}$ (équivalent d'un polynôme).

c) et d) $\lim\limits_{m\to+\infty} q^m\sum\limits_{k=0}^{n-1}p^k\dbinom{m-1+k}{m-1}=0$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty}u_m=\dfrac{1}{p^n}$.

Partie II – Etude d'une variable discrète d'univers image infini

1) $T_n(\Omega)=\mathbb{N}$.

2) $P(T_n=k)=\dbinom{n+k-1}{n-1}p^nq^k$.

3) Utiliser la suite (u_m).

4) $Z_j(\Omega)=\mathbb{N}$ et $P(Z_j=k)=q^kp$ (utiliser la loi de Z_j+1). $E(Z_j)=\dfrac{q}{p}$ et $V(Z_j)=\dfrac{q}{p^2}$.

5) et 6) $T_n=\sum\limits_{j=1}^{n}Z_j$ donc $E(T_n)=\dfrac{nq}{p}$.

Exercice 18 (d'après Ecricome 2009 voie S)

Partie A

1) $Y(\Omega)=[\![1,b+1]\!]$.

2) $P(Y=k)=\dfrac{b!(a+k-1)}{(b-k+1)!N^k}$. Introduire les événements B_k « on obtient une boule blanche au k-ème tirage » et utiliser la formule des probabilités composées.

3) Réduire au même dénominateur le second membre.

4) Faire apparaître une somme télescopique.
5) Remarquer que $P(Y=k)$ est de la forme $a_{k-1}-a_k$.

Partie B

1) $p_{n,0}=\dfrac{a^n}{N^n}$ (tirages avec remise) et $p_{n,n}=\begin{cases}\dfrac{b!}{(b-n)!N^n} \text{ si } n\leq b\\ 0 \text{ si } n>b\end{cases}$ (tirages sans remise).

$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}=1$ (système complet d'événements).

2) Utiliser les probabilités totales en considérant la couleur de la n-ème boule tirée.
3) a) $E(X_n)=\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}$, donc utiliser le 2) en faisant apparaître une somme de la forme du A - 4).
   b) Développer la somme.
   c) $E(X_n)=b\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right]$. Suite arithmético-géométrique.
4) a) Utiliser le système complet d'événements $(X_n=k)_{0\leq k\leq n}$.
   b) $q_{n+1}=\dfrac{b}{N}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$.
5) a) Séparer Nu_n en deux sommes avec le B - 2) et faire un changement d'indice. Attention aux bornes des sommes.
   b) Séparer Nu_n en deux sommes et remplacer $E(X_{n-1})$ par son expression.
   c) Raisonner par récurrence.
   d) $V(X_n)=b\left[(b-1)\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n+\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n-b\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{2n}\right]$ et $\lim_{n\to+\infty}V(X_n)=0$.

Exercice 19 (d'après HEC 2005 voie E)

Partie I : Tirages avec remise

1) $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $E(Y)=n$ et $V(Y)=n(n-1)$.
2) a) $P(U=k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ et $P(E)=0$ si E « on n'obtient jamais la blanche n°1 ».
   b) $P_{(U=k)}(Z=j)=\dbinom{k}{j}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ si $j\leq k$ et $P_{(U=k)}(Z=j)=0$ si $j>k$.
   c) Utiliser la formule des probabilités totales.
   d) $P(Z=1)=\dfrac{4}{9}$ et $P(Z=0)=\dfrac{1}{3}$. Sommes de séries géométriques et dérivées.
   e) Séparer en deux sommes avec la formule de Pascal et changer d'indice.
   f) $\forall i\in\mathbb{N}^*\quad P(Z=i)=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{i-1}$ et $P(Z=0)=\dfrac{1}{3}$.
   g) $E(Z)=1$. Somme de série géométrique.

Partie II : Tirages sans remise

A – Etude de cas particuliers

1) X_1 est la variable certaine égale à 1.

2) $X_2(\Omega)=\{0,2\}$ et $P(X_2=0)=P(X_2=2)=\dfrac{1}{2}$.

B – Etude du cas général

1) Il y a $(n!)^2$ suites de tirages possibles et $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$ mais $P(X_n=n-1)=0$.

2) a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a(n,j)=(n!)^2$ (Système complet d'événements associé à X_n).

b) $a(n,n)=n!$ et $a(n,n-1)=0$.

3) a) Pour calculer $a(n,j)$, on choisit successivement les places des tirages des j paires, les numéros de ces j paires, puis les $(n-j)$ autres tirages sans paire.

b) $a(n,0)=(n!)^2-n!\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{a(j,0)}{j!}$ si $n\geq 1$. Faire le changement d'indice $k=n-j$ et utiliser a).

c) $\displaystyle\sum_{j=i}^{k-1}(-1)^j\binom{j}{i}\binom{k}{j}=(-1)^{k+1}\binom{k}{i}$. Utiliser $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$ (Binôme).

4) Raisonner par récurrence forte.

5) $\forall k\in[\![0,n]\!]\quad P(X_n=k)=\dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$.

6) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad E(X_n)-E(X_{n-1})=0$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad E(X_n)=1$.

Partie III : Tirages mixtes

$X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{n}\right)$, donc $E(X_n)=1$ et $V(X_n)=1-\dfrac{1}{n}$.

Exercice 20

Partie A

Ecrire $P(Y>k)=\displaystyle\sum_{j=k+1}^{N}P(Y=j)$, et dans les deux questions, calculer le second membre en intervertissant les $\sum$ dans les doubles sommes.

Partie B

1) $E(U_1)=\dfrac{N+1}{2}$ et $V(U_1)=\dfrac{N^2-1}{12}$.

2) a) $(T_n\leq k)=\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k}(U_j\leq k)$ et utiliser l'indépendance.

b) $\forall k\in[\![1,N]\!]\quad P(T_n=k)=\left(\dfrac{k}{N}\right)^n-\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$.

3) a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}d_n(N)=0$. Somme d'un nombre fini de termes de limite nulle.

b) $E(T_n)=N-d_n(N)$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(T_n)=N$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}V(T_n)=0$. Pour l'égalité, utiliser le A - 2).

d) Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$. Pour $V(T_n)$, chercher la limite de $\dfrac{V(T_n)}{d_n(N)}$ (Attention à l'équivalent d'une somme !).

4) $\forall k \in [\![1, N]\!] \quad P(Z_n = k) = \left(\dfrac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\dfrac{N-k}{N}\right)^n$.

$E(Z_n) = d_n(N) + 1$ et $V(Z_n) = V(T_n)$. Utiliser $(Z_n > k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} (U_j > k)$.

Partie C

1) a) Pour calculer $\varphi_n(k, \ell)$, utiliser $(T_n \leq k) \cap (Z_n > \ell) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} (l < U_j \leq k)$.

b) Dans $\varphi_n(k, \ell)$, écrire $(T_n \leq k) = (T_n \leq k-1) \cup (T_n = k)$. Même chose pour Z_n.

c) $P[(T_n = k) \cap (Z_n = \ell)] = \begin{cases} 0 \text{ si } k < \ell \\ \left(\dfrac{1}{N}\right)^n \text{ si } k = \ell \\ \left(\dfrac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\dfrac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n \text{ si } k > \ell \end{cases}$

2) a) Séparer en plusieurs sommes et changer d'indice pour les comparer.

b) $E(T_n Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{\ell=1}^{N} k\ell P[(T_n = k) \cap (Z_n = \ell)]$. Utiliser le a), et faire très attention aux bornes !

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n = 0$. Remarquer que $\sigma(T_n)\sigma(Z_n) = V(T_n)$, puisque $V(Z_n) = V(T_n)$.

3) a) $P_{(T_n = k)}(Z_n = \ell) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < \ell \\ \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} \text{ si } k = \ell \\ \dfrac{(k-\ell-1)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n}{k^n - (k-1)^n} \text{ si } k > \ell \end{cases}$

b) $E\left(Z_n \big/ T_n = k\right) = \dfrac{k^n}{k^n - (k-1)^n}$. Pour le calcul, séparer $k \geq 2$ et $k = 1$.

Exercice 21 (d'après ESSEC 2009 voie E)

1) a) $X(\Omega) = [\![s, +\infty[\![$.

b) $(X = n) = A_s \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}$ si $n \geq s+1$, et $(X = s) = \overline{A_s}$.

c) $\forall n \geq s \quad P(X = n) = p(1-p)^{n-s}$.

d) $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

e) $E(X) = \dfrac{1}{p} + s - 1$. Utiliser $E(Y)$.

2) a) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{N} nP(Z = n)$ a une limite réelle quand N tend vers $+\infty$ en séparant $n \leq d-s$ et $n > d-s$.

b) $D_s = E(Z) = \sum\limits_{k=s}^{d} (d-k)P(X = k) + \sum\limits_{k=d}^{+\infty} kP(X = k) - d\sum\limits_{k=d}^{+\infty} P(X = k)$.

c) Utiliser la loi de X et son espérance, ainsi que la dérivée $\sum\limits_{j=0}^{n} jx^{j-1}$ de $\sum\limits_{j=0}^{n} x^j$.

3) a) $D_{s+1} - D_s = 2(1-p)^{d-s} - 1$. En déduire le sens de variations de la suite (D_s).

b) Si $p \geq \frac{1}{2}$, alors $-1 \leq \frac{\ln 2}{\ln(1-p)} < 0$.

4) On doit commencer à chercher 6 numéros avant l'arrivée car $s_0 = d - 6$.

<u>Exercice 22 (d'après HEC 85 voie S)</u>

<u>Partie A</u>

1) Utiliser l'inégalité de la moyenne sur $[0, x]$ pour la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

2) (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

<u>Partie B</u>

1) a) $P(E_k) = \frac{1}{n}$ et $P(F_{k,s}) = \frac{s-1}{k-1}$, donc $P(E_k \cap F_{k,s}) = \frac{s-1}{n(k-1)}$.

b) $p_n(s)$ est la probabilité de $\bigcup_{k=s}^{n} (E_k \cap F_{k,s})$ (événements incompatibles).

c) $\lim_{n \to +\infty} p_n(s) = 0$. Utiliser la suite (u_n).

2) a) La probabilité est $\frac{s-1}{n}$ (le meilleur candidat est dans l'échantillon).

b) L'événement considéré est $(E_j \cap F_{j,s})$ car les $(j-1)$ premiers sont moins bons que ceux de l'échantillon et le $j^{\text{ème}}$ est meilleur que ceux de l'échantillon.

c) $\forall j \in [\![s, n-1]\!] \quad P(X = j) = \frac{s-1}{j(j-1)}$ et $P(X = n) = \frac{s-1}{n-1}$.

d) Utiliser $\frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$.

e) $E(X) = (s-1)\left[1 + \sum_{j=s-1}^{n-1} \frac{1}{j}\right]$.

<u>Partie C</u>

1) a) $p_n(s+1) - p_n(s) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j} - 1\right]$.

b) Comparer $w_s = \sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j}$ avec 1 en étudiant le sens de variations de la suite (w_s).

c) $s_5 = s_6 = 3$. Dans le programme, demander à l'utilisateur une valeur de *n*, lire cette valeur, initialiser *s* à 1 et *w* à 0, puis dans une boucle de $j := 1$ à $(n-1)$ calculer $w := w + \frac{1}{j}$, puis répéter $s := s+1$ et $w := w - \frac{1}{s-1}$ jusqu'à ce que $w < 1$. Afficher la valeur de *s*. On trouve $s_7 = 3$, $s_8 = 4$, ...

d) Comparer $\sum_{j=s_n}^{n} \frac{1}{j}$ avec 1 pour comparer s_n et s_{n+1}.

2) a) Pour la première, utiliser $k < 2q$ si $k \in [\![q+1, 2q-1]\!]$, et minorer $\sum_{k=2q+1}^{4q} \frac{1}{k}$.

b) Comparer $4(s_n - 1)$ avec $(n-1)$ en Utilisant la 2ème inégalité pour $q = s_n$.

3) a) Montrer que : $1 < \sum_{k=s_n}^{n} \frac{1}{k-1} < 1 + \frac{1}{s_n - 1}$ et utiliser 2) b).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{s_n - 1} p_n(s_n) = 1$.

c) Montrer que : $\frac{n}{s_n - 1} p_n(s_n) - \ln\left(\frac{n}{s_n - 1}\right) = v_{n-1} - v_{s_n - 2}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{s_n} = e$

e) Justifier que : $p_n(s_n) \sim \frac{s_n - 1}{n}$.

Exercice 23 (d'après CCIP 1998 voie S)

Partie A : Préliminaire

1) $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$ et $\text{cov}(X,X) = V(X)$.
2) $\text{cov}(aX, bY) = ab\,\text{cov}(X,Y)$.
3) Développer $V(\lambda X + Y) = \text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$.
4) Le discriminant est négatif car $\forall\lambda \quad V(\lambda X + Y) \geq 0$.
5) Raisonner par récurrence.

Partie B : Simulation informatique

Pour entrer les valeurs de $C[i, j]$, faire une double boucle et utiliser $C[i, j] = C[j, i]$.
La fonction **Variance** est constituée de l'initialisation de V à 0, et d'une double boucle dans laquelle $V := V + Q[r] * Q[m] * C[r, m]$ si r et m sont les indices variables.
Il suffira ensuite d'afficher **Variance(P)**.

Partie C

1) $V(R) = 6a^2 - 8a + 4$ est minimale si $a = \frac{2}{3}$. Le portefeuille est $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
2) a) $E(X) = 3$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 4$ et $V(Y) = 4$.
   b) $P(2X + Y \leq 8) = \frac{3}{35}$ et $P(R_0 \geq 3) = \frac{32}{35}$. Utiliser les probabilités totales.
3) Le portefeuille est $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et $P(R_0 \geq 3) = 1 - F_6(5)$. Justifier : $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(6)$.

Partie D

1) a) Utiliser A - 4).
   b) Utiliser les propriétés de la variance et de la covariance.
   c) Le portefeuille est $(0,1)$ si $c \in [3,6]$, et $\left(\frac{3-c}{15-2c}, \frac{12-c}{15-2c}\right)$ si $c \in [-6,3]$. Etudier les variations de $a \mapsto (15-c)a^2 + 2(c-3)a + 3$ suivant les valeurs de c.
2) a) $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 8) = \frac{3}{4}$, $P(Y = 4) = \frac{3}{4}$ et $P(Y = 8) = \frac{1}{4}$.
   b) $E(X) = 6$, $V(X) = 12$, $E(Y) = 5$, $V(Y) = 3$ et $\text{cov}(X,Y) = 0$.
   c) et d) Le portefeuille est $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et $P(R_0 \geq 3) = 1$.

Partie E

1) $V(R) = 7x^2 + 7y^2 + 4z^2 + 2xy - 8xz - 8yz$.
2) a) Utiliser $z = 1 - x - y$ avec $0 \leq z \leq 1$. K est l'intérieur du triangle OAB où A et B sont les points de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$.
   b) $h_a(x) = 12x^2 - 12ax + 19a^2 - 16a + 4$ est minimale pour $x = \frac{a}{2}$. Utiliser $a = x + y$.

c) $f(x,x) = 64x^2 - 32x + 4$ est minimale pour $x = \dfrac{1}{4}$. Et $f(x_0, y_0) = f\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right) = 0$.

d) Le portefeuille est $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Partie F

1) a) $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 2\}$. Le sous-espace propre E_{-1} est le plan de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace propre E_2 est la droite de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{Sp}(M) = \{1 - c, 1 + 2c\}$, et les sous-espaces propres sont $E'_{1-c} = E_{-1}$ et $E'_{1+2c} = E_2$.

Remarquer que $M = cB + I$, donc $M - \lambda I = c\left[B - \dfrac{\lambda - 1}{c} I\right]$.

c) Si $c = 0$, alors $M = I$.

2) a) $V(R) = x^2 + y^2 + z^2 + 2cxy + 2cxz + 2cyz$.

b) Utiliser A - 4) pour $(X + Y + Z, X)$.

c) $(U - W) \in E'_{1-c}$. Utiliser $x + y + z = 1$.

d) Utiliser ${}^t(U - W)M(U - W) = V\left[R - \dfrac{1}{3}(X + Y + Z)\right]$.

e) Si $c \neq 1$, le portefeuille est $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. Si $c = 1$, la variance est constante.

3) a) $V(R_0) = \dfrac{5}{6}$. Remarquer que les variables $X' = X\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $Y' = Y\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ et $Z' = Z\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ vérifient les hypothèses précédentes avec $c = 0$.

b) $P(R_0 \geq 4) = 1 - F(11)$. Justifier $X + Y + Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(30, \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 24 (d'après CCIP 1997)

Partie A : Préliminaires

1) $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p)$.

2) La loi conditionnelle de X_2 sachant que $X_1 = k$ est $\mathscr{B}\left(N, \dfrac{k}{N}\right)$.

3) La loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $X_n = k$ est $\mathscr{B}\left(N, \dfrac{k}{N}\right)$.

$P_{(X_n = k)}(X_{n+1} = j) = \dbinom{N}{j}\left(\dfrac{k}{N}\right)^j \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)^{N-j}$ pour tous *k* et *j* appartenant à $[\![0, N]\!]$.

4) Si $a = 0$ ou $a = N$, X_n est la variable certaine égale à *a*..

Partie B : Simulation

Après la lecture des valeurs de *n*, *a* et *N* (qui sera stocké dans une variable *NE*), initialiser *X* à *a*, faire une boucle de $k := 1$ à *n* dans laquelle on initialisera *p* à X / NE et *X* à 0, et dans laquelle on inclura une boucle de $i := 1$ à *NE* où $X := X + 1$ si random $< p$. Afficher la valeur de *X* pour chaque *k* et la valeur de X / NE à la fin.

Partie C : Cas $N = 3$

1) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système $(X_n = k)_{0\le k\le 3}$.
2) a) $SM = S$. Puis, calculer SU_n.
   b) $E(X_{n+1}) = E(X_n)$, donc $E(X_n) = 1$.
3) a) $WM = \frac{2}{3}W$. Puis, comparer WU_n et $E[X_n(3 - X_n)]$.
   b) $V(X_n) = 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$. Pour $E[X_n(3 - X_n)]$, suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Partie D : Cas général

1) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système $(X_n = k)_{0\le k\le N}$.
2) $E(X_n) = a$. Calculer $E(X_{n+1})$ sous forme d'une double somme dans laquelle on intervertit les deux $\sum$, et utiliser $j\binom{N}{j} = N\binom{N-1}{j-1}$ si $j \ge 1$.
3) a) Même méthode qu'au 2) : dans la double somme $E[X_{n+1}(N - X_{n+1})]$ intervertir les deux $\sum$, et utiliser $j(N-j)\binom{N}{j} = N(N-1)\binom{N-2}{j-1}$ si $1 \le j \le N-1$.
   b) $E[X_n(N - X_n)] = a(N-a)\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ et $V(X_n) = a(N-a)\left[1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right]$.
4) $u_{n+1} - u_n \ge 0$ et $u_n \le 2$.
5) a) Séparer $E(X)$ en deux sommes : $j < k$ et $j \ge k$. Et les minorer.
   b) f est croissante sur $\left[1, \frac{N}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{N}{2}, N-1\right]$, donc minorée par $f(1) = f(N-1) = N-1$.
   c) Dans $E[X_n(N - X_n)]$, minorer $f(k)$ et utiliser $a = Np$.
6) a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   b) $\forall k \in [\![1, N-1]\!] \quad 0 \le P(X_n = k) \le v_n$.
   c) Exprimer $E(X_n)$ en fonction de v_n.
   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 1 - p$.
   e) La « loi limite » de F_n est $\mathscr{B}(p)$. On tend vers une situation de consensus : toute la population est favorable à l'un des candidats, A avec la probabilité p ou B avec la probabilité $1 - p$.
7) a) $P(T = 0) = 0$. Utiliser la suite d'événements $A_n = (X_n \ne 0) \cap (X_n \ne N)$ qui est décroissante.
   b) Exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements A_k.
   c) Faire apparaître une somme télescopique.
   d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 0$, et que la série de terme général v_n est convergente.

Exercice 25 (d'après ESSEC 1998)

Partie A

1) Suite croissante majorée. Raisonner par récurrence. Utiliser les variations de *f*.
2) a) Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad 0 \le f'(x) \le a$.
   b) Raisonner par récurrence.
   c) $L(a) = 1$ si $0 < a < 1$.

3) a) (i) Utiliser par exemple la concavité de la fonction ln.

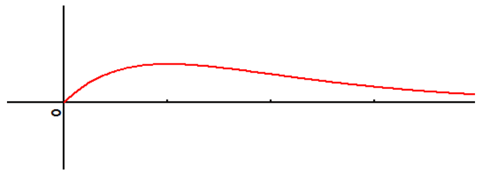
(ii) $f'(x)=1 \Leftrightarrow x=1-\dfrac{\ln a}{a}$.

(iii) La fonction est décroissante sur $\left]-\infty,1-\dfrac{\ln a}{a}\right[$ et croissante sur $\left]1-\dfrac{\ln a}{a},+\infty\right[$.

(iv) Si $a=1$, l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $r(1)=1$.
Si $a>1$, l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions $r(a)$ et $s(a)$ qui vérifient : $0<r(a)<1-\dfrac{\ln a}{a}<s(a)$.

b) (i) $\varphi[ar(a)]=\varphi(a)$. Utiliser $f[r(a)]=r(a)$.

x	0		1		$+\infty$
φ'	1	$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0



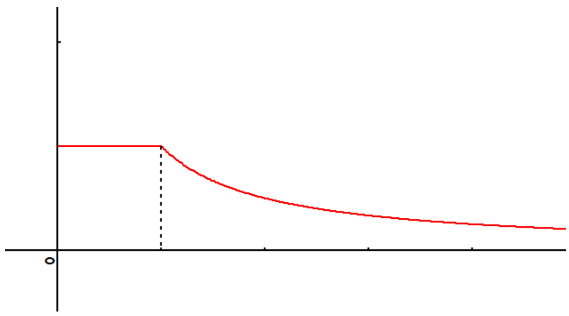
(ii) Théorème de bijection. φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$.

(iii) Montrer que $ar(a)\in]0,1[$ et utiliser $\varphi[ar(a)]=\varphi(a)$. Donc $\lim\limits_{a\to+\infty} r(a)=0$.

c) (i) Raisonner par récurrence.

(ii) $L(a)=r(a)=\dfrac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$ si $a\geq 1$.

4) L est constante sur $]0,1[$ et décroissante sur $[1,+\infty[$.



Partie B

1) $P_{(D=n)}(N_1=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ si $0\leq k\leq n$ et $P_{(D=n)}(N_1=k)=0$ si $k>n$.

2) Utiliser le système complet d'événements $(D=n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un changement d'indice.

3) $p_1=e^{-\lambda p}$.

4) Même raisonnement, mais la durée $D_1+\ldots D_k$ suit la loi $\mathscr{P}(k\lambda)$. Donc la loi conditionnelle est $\mathscr{P}(k\lambda p)$. Et $p_2=e^{-\lambda p(1-e^{-\lambda p})}$.

Partie C

1) a) (i) A est réalisé s'il existe une vague k sans aucun client.

(ii) Si $N_k=0$, alors $N_{k+1}=0$ car la durée de service est nulle.

(iii) Suite croissante majorée. Et $P\left[\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}(N_k=0)\right]=\lim\limits_{k\to+\infty}P(N_k=0)$.

b) Si $j\geq 2$, décomposer la $(k+1)^{\text{ème}}$ vague en « mini-vagues » issues des clients 1, ..., j de la première vague.

c) $p_{k+1}=e^{-\lambda p(1-p_k)}$ et $p_0=0$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty}p_k=L(\lambda p)=P(A)$. Utiliser f pour $a=\lambda p$.

2) a) Si $N_k=i$, alors $D_k=0$ si $i=0$, et D_k suit la loi $\mathscr{P}(i\lambda)$ si $i\geq 1$.

b) La loi conditionnelle de N_{k+1} sachant $(N_k = i)$ est $\mathscr{P}(i\lambda p)$.

c) $E(N_{k+1}) = \lambda p E(N_k)$. Ecrire $i = \dfrac{1}{\lambda p} E\left(N_{k+1} \big/ N_k = i\right) = \dfrac{1}{\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} j P_{(N_k = i)}(N_{k+1} = j)$.

d) $E(N_k) = (\lambda p)^k$.

e) $E(C_n) = \dfrac{1-(\lambda p)^{n+1}}{1-\lambda p}$ si $\lambda p \neq 1$ et $E(C_n) = n+1$ si $\lambda p = 1$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} E(C_n) = \dfrac{1}{1-\lambda p}$ si $\lambda p < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(C_n) = +\infty$ si $\lambda p \geq 1$.

Exercice 26 (d'après CCIP 2008 voie E)

Partie A : Premières propriétés

1) Calculer ${}^tAV$ et utiliser la définition de $\mathscr{S}_p$.
2) Une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.
3) Utiliser la caractérisation du 1) pour un produit AB de matrices de $\mathscr{S}_p$.

Partie B : Cas $p = 2$

1) Montrer $A^2 - (2-a-b)A = (a+b-1)I$. Les racines de P sont 1 et $(1-a-b)$.
2) Si $a+b=0$, alors $a=b=0$ et $A^n = I$.
3) Si $a+b=2$, alors $a=b=1$. Alors $A^{2n} = I$ et $A^{2n+1} = A$.
4) a) $R_n(X) = \dfrac{1-(1-a-b)^n}{a+b} X + \dfrac{(1-a-b)^n - 1 + a + b}{a+b}$.

   b) Utiliser la division euclidienne et $P(A) = 0$.

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$.

Partie C : Cas $p = 3$

1) A_1 n'est pas diagonalisable car $\mathrm{Sp}(A_1) = \left\{1, \dfrac{1}{2}\right\}$ et $\dim E_1 = \dim E_{1/2} = 1$.
2) $\mathrm{Sp}(A_2) = \{0,1\}$ mais $\dim E_0 = 1$ et $\dim E_1 = 2$.
3) a) $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$.

   b) E_1 est la droite de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_{1/2}$ la droite de base $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_{1/3}$ la droite de base $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   d) Raisonner par récurrence.

   e) $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) a) Utiliser la formule des probabilités totales.

   b) Raisonner par récurrence.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il est quasi-certain que l'objet finira dans $\mathscr{U}_1$ quelle que soit sa position au départ.

<u>Partie D : Matrices stochastiques strictement positives</u>

1) a) Déduire de $\lambda V = {}^tAV$ l'expression de λx_k et majorer.
   b) Montrer que $x_k \neq 0$ en raisonnant par l'absurde.

2) a) Utiliser $AV = V$ pour étudier le signe de $w_i = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}|x_j| - |x_i|$.
   b) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{p} w_i = 0$.
   c) Montrer que : $A|V| = |AV|$.
   d) Montrer que $\forall (j,k) \quad y_j y_k \geq 0$. Comparer tous les y_k à un $y_j \neq 0$.
   e) Donc $|V| = \pm V$.

3) a) Montrer qu'il existe un vecteur invariant $V \neq 0$ et prendre $V_\infty = \alpha|V|$.
   b) Raisonner par l'absurde.
   c) Calculer AV.
   d) Le minimum de $\dfrac{w_i}{v_i}$ est atteint.
   e) Raisonner par l'absurde.

4) Montrer que tout vecteur V du sous-espace propre est colinéaire à V_∞.

5) a) Raisonner par récurrence.
   b) Montrer que la suite (D^n) converge vers $D_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   c) Utiliser : $\forall n \quad AA^n = A^{n+1}$.
   d) Montrer que les vecteurs colonnes de A_∞ sont des vecteurs de probabilité invariants par A.

<u>Partie E : Application au moteur de recherche Google</u>

1) a) Somme de termes positifs dont l'un est non nul.
   b) Calculer les $g_{i,j}$ et leur somme.
   c) Calculer les $g_{i,j}$ si $i \in I$ et si $i \notin I$.
   d) Conséquence des questions précédentes.

2) a) $V = \begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$ est l'unique vecteur de probabilité invariant par G.
   b) Utiliser : $\forall (i,j) \quad g_{i,j} \geq \dfrac{1-r}{N}$ et $GV = V$.

3) a) Utiliser la formule des probabilités totales.
   b) Raisonner par récurrence.
   c) La suite (G^n) converge vers une matrice G_∞ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = G_\infty V_0$.