Réponses et Indications (Probabilités)

Exercice 1

1) $P(F)=\dfrac{7}{12}$ et $P_F(T)=\dfrac{3}{7}$.

2) a) $P(F_1\cap ...\cap F_n)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Utiliser les probabilités totales.

   b) $p_n=\dfrac{1}{1+2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$ (après simplification), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=1$.

   c) Résoudre $p_n \geq 0{,}95$. A partir de 9 faces consécutifs, on peut dire que l'on a la pièce truquée avec moins de 5% de risque d'erreur.

Exercice 2 (d'après CCIP 2004 voie E)

1) B_n : « Face apparaît au rang *n* après deux Piles »
   U_n : « Dans les *n* lancers, on obtient au moins une fois Pile-Pile-Face ».

2) La suite (u_n) est croissante (car $U_n \subset U_{n+1}$) et majorée par 1.

3) a) $P(B_n)=\dfrac{1}{8}$ par indépendance.

   b) Leurs intersections deux à deux sont vides.

   c) $u_3=\dfrac{1}{8}$, $u_4=\dfrac{1}{4}$ et $u_5=\dfrac{3}{8}$. Utiliser l'incompatibilité.

4) a) $P(U_n\cap B_{n+1})=\dfrac{1}{8}u_{n-2}$. Exprimer U_n en fonction de U_{n-2} et utiliser le 3) b).

   b) $U_{n+1}=U_n\cup B_{n+1}$. Attention ! Ils ne sont pas incompatibles. Utiliser a).

   c) Calculer le second membre pour $n=3$ et $n=4$ et vérifier l'égalité.

   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ par passage à la limite dans l'égalité du b).

Exercice 3

1) $p_{n+1}=-\dfrac{3}{5}p_n+\dfrac{7}{10}$. Utiliser les probabilités totales.

2) $p_n=\dfrac{7}{16}\left[1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\right]$. Suite arithmético-géométrique.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\dfrac{7}{16}$.

Exercice 4

1) $a_1=b_1=c_1=\dfrac{1}{3}$.

2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n \qquad b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n \qquad c_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n+c_n$.
   L'énoncé donne les probabilités conditionnelles, puis utiliser les probabilités totales.

3) $c_{n+2}=\dfrac{3}{2}c_{n+1}-\dfrac{1}{2}c_n$. Récurrence linéaire d'ordre 2, donc $c_n=1-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

4) $a_n=b_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Remarquer que $\forall n \quad a_n=b_n$ et $a_n+b_n+c_n=1$.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=1$. On est quasi-certain que la souris réussira à sortir.

Exercice 5

1) $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

2) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \qquad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \qquad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

Traduire les données de l'énoncé pour obtenir les probabilités conditionnelles, puis utiliser les probabilités totales.

3) $b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$. Récurrence linéaire d'ordre 2, donc $b_n = \frac{4}{5}(q^{n+1} + r^{n+1})$.

4) $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$. Or q et r sont solutions de $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{16} = 0$.

5) $a_n + b_n + c_n = 1$ (système complet d'événements), donc $a_n = 1 + \frac{16}{5\sqrt{5}}(q^{n+2} - r^{n+2})$.

6) $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

7) $P(J) = 0$ car $J = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$ (suite décroissante d'événements).

Exercice 6

1) $a_1 = c_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

2) $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \qquad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \qquad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$.

Calculer les probabilités conditionnelles en examinant tous les tirages possibles, puis utiliser les probabilités totales.

3) $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$. Récurrence linéaire d'ordre 2, donc $b_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{2}{3}$.

4) $a_n = c_n = \frac{1}{6}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$ si $n \geq 1$ (faux pour $n = 0$). Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{6}$.

Exercice 7

Partie A : Première méthode de calcul d'une puissance de matrice

1) Récurrence. On trouve $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ v_{n+1} = qu_n + pv_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $u_{n+2} = 2pu_{n+1} + (q^2 - p^2)u_n$.

3) $u_n = \frac{1}{2}(p+q)^n + \frac{1}{2}(p-q)^n$ et $v_n = \frac{1}{2}(p+q)^n - \frac{1}{2}(p-q)^n$.

4) $M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (p+q)^n + (p-q)^n & (p+q)^n - (p-q)^n \\ (p+q)^n - (p-q)^n & (p+q)^n + (p-q)^n \end{pmatrix}$

Partie B : Deuxième méthode de calcul d'une puissance de matrice

1) $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $D = \begin{pmatrix} p+q & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix}$ donc $D^n = \begin{pmatrix} (p+q)^n & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix}$.

3) Récurrence.

4) On retrouve la matrice M^n de la partie **A**.

<u>Partie C : Calcul des probabilités des événements *A*</u>

1) R_2 est réalisé si l'on obtient Pile-Pile ou Face-Face.
2) R_4 est réalisé si l'on obtient Pile-Face-Pile-Face, ou Pile-Face-Face-Pile, ou Face-Pile-Pile-Face ou Face-Pile-Face-Pile.
3) Soit N_U et N_V le nombre de fois où on a choisi *U* et *V*. On a $N_U + N_V = 2n+1$, donc l'un est pair et l'autre impair. Or pour vider une urne, il faut la choisir deux fois. Donc l'une est vide et l'autre est pleine, donc $a_{2n+1} = 0$.
4) Ona $N_U + N_V = 2n$, donc les deux sont pairs ou les deux sont impairs. Donc *U* et *V* sont vides, ou *U* et *V* sont pleines.
5) a) $a_2 = p^2 + q^2$ et $b_2 = 2pq$.

   b) $\begin{cases} P_{A_{2n}}(A_{2n+2}) = p^2+q^2 \\ P_{A_{2n}}(B_{2n+2}) = 2pq \end{cases}$ et $\begin{cases} P_{B_{2n}}(A_{2n+2}) = 2pq \\ P_{B_{2n}}(B_{2n+2}) = p^2+q^2 \end{cases}$.

   c) Evident ! Calculer M^2.

   d) Récurrence. Donc $a_{2n} = \frac{1}{2}(p+q)^{2n} + \frac{1}{2}(p-q)^{2n}$.

<u>Partie D : Calcul des probabilités des événements *R*</u>

1) $r_{2n+1} = 0$.
2) $r_2 = p^2 + q^2$.
3) $R_{2n} = B_2 \cap B_4 \cap \ldots \cap B_{2n-2} \cap A_{2n}$. Donc $r_{2n} = 4p^2q^2(p^2+q^2)^{n-2}$ si $n \geq 2$.
   Utiliser la formule des probabilités composées.
4) *R* : « Les deux urnes seront vides en même temps au moins une fois ».
   Introduire la suite croissante d'événements $V_n = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$ en remarquant $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n$.
   Donc $P(R) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n) = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} P(V_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} P(V_{2n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R_{2n})$.

<u>Exercice 8 (d'après EDHEC 2002 voie E)</u>

<u>Partie A</u>

1) $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{4}d_n \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{2}d_n$

   $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}d_n \qquad d_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$

   Calculer les probabilités conditionnelles, puis utiliser les probabilités totales.
2) $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Récurrence et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Partie B</u>

1) $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 4\}$.

2) $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4^n + 2(-2)^n & 4^n & 4^n - 2(-2)^n & 4^n \\ 4^n & 4^n + 2(-2)^n & 4^n & 4^n - 2(-2)^n \\ 4^n - 2(-2)^n & 4^n & 4^n + 2(-2)^n & 4^n \\ 4^n & 4^n - 2(-2)^n & 4^n & 4^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}$.

Attention ! Cette formule n'est vraie que pour $n \geq 1$ car le troisième terme de la diagonale de $D^0 = I$ n'est pas nul.

4) $U_n = \dfrac{1}{4^n} A^n U_0$ donc : $a_n = \dfrac{1}{4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \quad c_n = \dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \quad b_n = d_n = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 9 (d'après ESC 2007 voie S)

Partie A

1) $a_1 = q \quad b_1 = p \quad c_1 = 0$.

2) $P_{A_n}(A_{n+1}) = q \quad P_{A_n}(B_{n+1}) = p \quad P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.

3) $P_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}q \quad P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2} \quad P_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}p$. Examiner les 4 cas possibles.

4) $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \quad P_{C_n}(B_{n+1}) = q \quad P_{C_n}(C_{n+1}) = p$ (symétrie entre blanc et noir).

5) $a_{n+1} = qa_n + \dfrac{1}{2}qb_n \quad b_{n+1} = pa_n + \dfrac{1}{2}b_n + qc_n \quad c_{n+1} = \dfrac{1}{2}pb_n + pc_n$

Partie B

1) $\mathrm{Sp}(M) = \{0,1,2\}$. Ecrire $M = pJ + qK$ et remarquer que $\mathrm{Sp}(J) = \mathrm{Sp}(K)$.

2) E_0, E_1 et E_2 sont les droites de bases respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q \\ p-q \\ -p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} q^2 \\ 2pq \\ p^2 \end{pmatrix}$.

3) $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -q & p^2 \end{pmatrix}$

4) $a_n = q^2 + pq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad b_n = 2pq + p(p-q)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad c_n = p^2 - p^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ si $n \geq 1$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^n}PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^n}PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour éviter de calculer P^{-1}, remarquer que $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = q^2 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2pq \quad \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = p^2$.