PROBABILITES

Exercice 1

On dispose de trois pièces de monnaie. Deux d'entre elles sont équilibrées et la troisième est truquée : en la lançant, vous avez trois fois plus de chances d'obtenir « Face » que « Pile ». Malheureusement, ces trois pièces ne sont pas reconnaissables.

1) Vous choisissez au hasard une pièce et vous la lancez une fois.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir « Face » ?
   b) Si vous obtenez « Face », quelle est la probabilité que vous ayez la pièce truquée ?
2) Vous choisissez toujours au hasard une pièce, mais vous la lancez n fois de suite. On suppose les lancers indépendants.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir n fois « Face » ?
   b) Si vous obtenez n fois « Face », quelle est la probabilité p_n que vous ayez choisi la pièce truquée ? Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.
   c) A partir de quelle valeur de n serez-vous « sûr » à 95% d'avoir choisi la pièce truquée ? On donne : $\ln 2 \approx 0{,}7$; $\ln 3 \approx 1{,}1$; $\ln 19 \approx 2{,}9$.

Exercice 2 (d'après CCIP 2004 voie E)

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « Pile » et de « Face » sont équiprobables, les différents lancers étant indépendants les uns des autres.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par F_n l'événement « Face apparaît au lancer de rang n »

1) Interpréter les événements $B_n = \overline{F}_{n-2} \cap \overline{F}_{n-1} \cap F_n$ et $U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$ pour $n \geq 3$.
2) On pose $u_1 = u_2 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 3$: $u_n = P(U_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone et convergente.
3) a) Calculer, pour tout entier $n \geq 3$, la probabilité de l'événement B_n .
   b) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 3$, les événements B_n , B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
   c) En déduire les valeurs des nombres u_3 , u_4 et u_5 .
4) Soit n un entier supérieur ou égal à 5.
   a) Justifier que : $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leur probabilité.
   b) Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1}. En déduire l'égalité suivante : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
   c) Vérifier que la relation est également vraie pour $n = 3$ et $n = 4$.
   d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3

Un fumeur impénitent décide d'essayer d'arrêter de fumer. Mais c'est difficile !

On suppose que le premier jour, plein de bonnes résolutions, il ne fume pas, et que :

- s'il ne fume pas un jour, alors la tentation est forte et il y a 7 chances sur 10 qu'il fume le lendemain.
- par contre, s'il succombe un jour, alors il est pris de remords et il y a 9 chances sur 10 qu'il ne fume pas le lendemain.

On note F_n l'événement « il fume le jour n » et $p_n = P(F_n)$.

1) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n pour tout entier naturel non nul n.
2) En déduire le calcul de p_n en fonction de n.

3) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 4

Dans un laboratoire, des chercheurs font des expériences sur le comportement d'une souris. Ils disposent trois tunnels A, B et C. Les deux premiers sont des cul-de-sac et le troisième permet à la souris de sortir. On constate que :

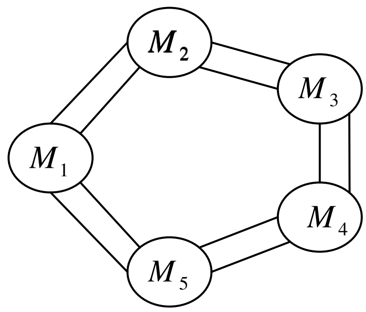
- la première fois, elle choisit au hasard l'un des trois tunnels.
- lorsque la souris se trompe (donc aboutit dans un cul-de-sac), la fois d'après, elle choisit au hasard l'un des deux autres tunnels.
- lorsqu'elle réussit à sortir, la fois d'après, elle reprend le même tunnel.

Soit A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « lors de la $n^{\text{ième}}$ expérience, la souris choisit le tunnel A (respectivement B et C) », et a_n, b_n et c_n leurs probabilités.

1) Calculer a_1, b_1 et c_1.
2) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3) Exprimer c_{n+2} en fonction de c_{n+1} et c_n. En déduire c_n en fonction de n.
4) En déduire a_n et b_n en fonction de n.
5) Déterminer les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini. Interpréter.

Exercice 5

Pour profiter des soldes, deux amies Amélie et Caroline se donnent rendez-vous dans un centre commercial formé de cinq magasins M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 disposés comme sur le schéma ci-contre.
Elles arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais, suite à un malentendu, Amélie se présente au magasin M_1, et Caroline au magasin M_2.



Chacune d'elles décide alors de partir à la recherche de l'autre. Elles empruntent les différentes routes du centre commercial selon les règles suivantes :

- A partir d'un magasin, chacune choisit de se rendre dans l'un des deux magasins voisins, les deux possibilités étant équiprobables.
- Les déplacements d'Amélie et de Caroline se font simultanément.
- Tous les choix de déplacements se font indépendamment les uns des autres.

Elles continuent à se déplacer ainsi jusqu'à ce qu'elles se retrouvent dans le même magasin (elles ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvées, elles ne se déplacent plus. Pour tout entier naturel n, on définit les événements :

- A_n : Amélie et Caroline sont dans le même magasin à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.
- B_n : Amélie et Caroline sont dans des magasins voisins à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.
- C_n : Amélie et Caroline sont dans des magasins distants de deux routes à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.

On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
2) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3) Exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n. En déduire b_n en fonction de n. On pourra poser $q = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $r = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(r^n - q^n)$.

5) Calculer $a_n + b_n + c_n$. En déduire a_n en fonction de n.
6) Calculer les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini.
7) Quelle est la probabilité que Caroline et Amélie ne se retrouvent jamais ?

Exercice 6

On dispose de deux urnes : une urne U_1 dans laquelle on met deux boules blanches et une urne U_2 dans laquelle on met deux boules noires. On suppose les boules indiscernables au toucher. On effectue une série de tirages de la manière suivante : on prend une boule dans U_1 et une boule dans U_2, puis on les échange en remettant la boule extraite de U_1 dans l'urne U_2 et la boule extraite de U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements :
A_n « à l'issue du n-ième échange, U_1 contient deux boules blanches ».
B_n « à l'issue du n-ième échange, U_1 contient une boule blanche et une boule noire ».
C_n « à l'issue du n-ième échange, U_1 contient deux boules noires ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
On a donc à l'origine : $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1) Calculer a_1, b_1 et c_1.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3) Exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n. En déduire l'expression de b_n en fonction de n, puis sa limite quand n tend vers l'infini.
4) En déduire les expressions de a_n et c_n en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 7

On dispose de deux urnes U et V, et d'une pièce qui amène « pile » avec une probabilité p et « face » avec une probabilité q. On a donc : $p + q = 1$ et $p \in]0,1[$.
Au début, les deux urnes sont vides. On réalise indéfiniment l'expérience suivante :

- On lance la pièce.
- Si elle amène « pile », on choisit l'urne U, sinon on choisit l'urne V.
- Si l'urne choisie est vide, on y met une boule. Sinon, on la vide.

On définit les événements :
A_n « à l'instant n, les deux urnes sont vides »
R_n « à l'instant n, pour la première fois les deux urnes sont vides »
On note : $a_n = P(A_n)$ et $r_n = P(R_n)$. On convient que $a_0 = 1$.

Partie A : Première méthode de calcul d'une puissance de matrice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n & u_n \end{pmatrix}$.

   On précisera u_0 et v_0, puis u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2) En déduire u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n.
3) En déduire u_n, puis v_n en fonction de n, p et q.
4) En déduire la matrice M^n.

Partie B : Deuxième méthode de calcul d'une puissance de matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Montrer que la matrice $D = P^{-1}MP$ est diagonale. En déduire D^n.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
4) En déduire la matrice M^n.

Partie C : Calcul des probabilités des événements *A*

1) Quelles sont les deux premiers lancers de la pièce pour lesquels R_2 est réalisé ?
2) Donner un exemple de succession de lancers pour lesquels R_4 est réalisé.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'instant $2n+1$, il y a une boule dans une urne et zéro dans l'autre. En déduire a_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'instant $2n$, soit les deux urnes sont vides, soit elles contiennent chacune une boule.
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement B_{2n} « à l'instant $2n$, chacune des deux urnes contient une boule » et on note $b_{2n} = P(B_{2n})$.
   a) Calculer a_2 et b_2.
   b) Calculer les probabilités $P_{A_{2n}}(A_{2n+2})$, $P_{B_{2n}}(A_{2n+2})$, $P_{A_{2n}}(B_{2n+2})$ et $P_{B_{2n}}(B_{2n+2})$.
   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_{2n+2} \\ b_{2n+2} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{pmatrix}$.
   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{pmatrix} = M^{2n} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. En déduire a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie D : Calcul des probabilités des événements *R*

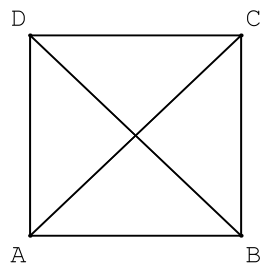
1) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n \subset A_n$. En déduire r_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Calculer r_2.
3) Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'événement R_{2n} en fonction des événements B_{2k} et A_{2k} où $k \in [\![1, n]\!]$. En déduire r_{2n} pour tout entier $n \geq 2$.
4) Donner une définition simple de l'événement $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n$ et montrer que R est un événement quasi-certain (on dit aussi presque sûr).

Exercice 8 (d'après EDHEC 2002 voie E)

Partie A

Un pion se déplace sur les quatre sommets d'un carré :

- Il se trouve en A au départ (instant 0).
- Si à un instant donné n, il se trouve sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant sur un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité $1/4$, et sur le sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1/2$.



On note A_n (respectivement B_n, C_n et D_n) l'événement « le pion se trouve en A (respectivement en B, C et D) à l'instant n ».

On note a_n, b_n, c_n et d_n leurs probabilités respectives et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

1) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.

2) Montrer qu'il existe une matrice M telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = MU_n$.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = M^n U_0$. Préciser U_0.

Partie B

1) Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que la matrice A est diagonalisable. La diagonaliser.
3) En déduire la matrice A^n.
4) En déduire a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.

Exercice 9 (d'après ESC 2007 voie S)

Partie A

Sur une table sont posées deux boules noires. On réalise l'expérience suivante :

- On choisit au hasard l'une des deux boules que l'on élimine de la table.
- On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Si on a obtenu pile, on remet sur la table une boule blanche, sinon on remet sur la table une boule noire.

Et on recommence …

Ainsi à chaque étape (début d'expérience), on a donc sur la table deux boules qui sont soit blanches soit noires. Pour tout entier naturel n, on définit les événements :

- A_n : « à la $n^{\text{ème}}$ étape, les deux boules sont noires ».
- B_n : « à la $n^{\text{ème}}$ étape, il y a une boule blanche et une boule noire ».
- C_n : « à la $n^{\text{ème}}$ étape, les deux boules sont blanches ».

Et on note leurs probabilités : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1) Calculer a_1, b_1 et c_1.
2) Calculer les probabilités conditionnelles : $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$ et $P_{A_n}(C_{n+1})$.
3) Calculer les probabilités conditionnelles : $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{B_n}(C_{n+1})$.
4) Calculer les probabilités conditionnelles : $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.
5) En déduire a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

Partie B

1) Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2q & q & 0 \\ 2p & 1 & 2q \\ 0 & p & 2p \end{pmatrix}$.
2) Déterminer les sous-espaces propres de M.
3) En déduire la diagonalisation de M.
4) En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n, p et q.
5) Déterminer les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$.