Réponses et Indications (Dénombrement)

Exercice 1

1) $N_1 = 220$.
2) $N_2 = 15$. Séparer en trois cas selon les couleurs.
3) $N_3 = 136$. Eliminer les tirages sans boule verte.
4) $N_4 = 140$. Séparer en deux cas : trois boules impaires ou deux boules impaires.
5) $N_5 = 33$. Séparer en deux cas : la boule paire est rouge ou pas.

Exercice 2

1) $N_1 = 625$. Il s'agit de 4-listes des jours possibles.
2) $N_2 = 120$. Il s'agit de 4-listes sans répétition.
3) $N_3 = 620$. Eliminer les listes où toutes les boulangeries sont fermées le même jour.

Exercice 3

1) Tous les chemins minimaux ont la même longueur 12 (6 horizontaux et 6 verticaux).
2) $N_2 = 924$. Il s'agit d'ordonner les 6 déplacements horizontaux et les 6 verticaux.
3) $N_3 = 225$. Raisonner comme au 2) entre A et O, puis entre O et B.

Exercice 4

$N = 377$.

Séparer en plusieurs cas selon le nombre de sauts de deux marches : si elle effectue k sauts de 2 marches, compter combien elle fera de sauts d'une marche, et donc quel est le nombre total de sauts effectués dans ce cas ; il reste à les ordonner.

Exercice 5

1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
3) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

Exercice 6

$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. Transformer la somme en somme télescopique avec la formule de Pascal.

Exercice 7

$\sum_{k=0}^{p} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n+1}{p}$. Même méthode que dans l'exercice 6.

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $\operatorname{Card} E = p$ et $\operatorname{Card} F = n$.

On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F. On pose $S_0^p = 0$.

1) $S_n^p = 0$ si $n > p$ et $S_n^p = n!$ si $n = p$.
2) $S_1^p = 1$ car si $F = \{a\}$, il n'y a qu'une application (surjective).
3) $S_2^p = 2^p - 2$ car si $F = \{a, b\}$ il n'y a que 2 applications non surjectives.

4) $n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k^p$. Toute application *f* de *E* dans *F* est surjective de *E* dans $f(E)$, donc effectuer une partition de l'ensemble de ces applications selon le cardinal de $f(E)$.
5) Une application *f* est déterminée par sa restriction f_a à $E-\{a\}$ et par $f(a)$.
   a) $N_1 = nS_n^{p-1}$ car on choisit $f(a)$ et une surjection de $E-\{a\}$ dans *F*.
   b) $N_2 = nS_{n-1}^{p-1}$ car on choisit $f(a)$ et une surjection de $E-\{a\}$ dans $F-\{f(a)\}$.
   c) $S_n^p = N_1 + N_2$ car on a une partition de l'ensemble des surjections selon que $f(a)$ a un ou plusieurs antécédents.
6) Déclarer une variable « tableau » *S* de dimension 100×100, demander à l'utilisateur deux entiers *n* et *p* entre 1 et 100, lire ces valeurs. Initialiser $S(0,0):=1$. Puis dans une boucle de $i:=1$ à *n*, initialiser $S(i,0):=0$, faire une boucle de $j:=1$ à *p* avec $S(0,j):=0$, et $S(i,j):=0$ si $i>j$ et $S(i,j):=i*[S(i,j-1)+S(i-1,j-1)]$ sinon. Afficher $S(n,p)$.

Exercice 9

1) $\Gamma_1^p = 1$ et $\Gamma_2^p = p+1$.
2) $\Gamma_n^p = \sum_{k=0}^{p} \Gamma_{n-1}^k$. Effectuer une partition en rangeant $(p-k)$ boules dans T_n.
3) $\Gamma_3^p = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ et $\Gamma_4^p = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}$.
4) Dans l'hérédité, supposer que la propriété est vraie pour tout entier *p* et utiliser la formule de Pascal pour transformer la somme du 2) en somme télescopique.
5) Déclarer une variable « tableau » *G* de dimension 100×100, demander à l'utilisateur deux entiers *n* et *p* entre 2 et 100 et lire ces valeurs. Initialiser $G(0,0):=1$. Puis dans une boucle de $i:=1$ à *n*, initialiser $G(i,0):=1$, faire une boucle de $j:=1$ à *p* avec $G(0,j):=0$ et, en initialisant $G(i,j):=0$, faire une boucle de $k:=1$ à *j* avec $G(i,j):=G(i,j)+G(i-1,k)$. Afficher $G(n,p)$.

Exercice 10

Soit *n* un entier naturel non nul.
On possède *n* boules numérotées de 1 à *n* que l'on veut ranger dans *n* casiers numérotés de 1 à *n*. On suppose que l'on ne peut mettre qu'une boule par casier.
Une boule est « bien rangée » si elle est mise dans le casier qui porte son numéro. Sinon, on dit qu'elle est « dérangée ».

1) $N = n!$ car il s'agit d'ordonner les *n* boules.
2) Les dispositions possibles sont : 1-2-3 (3 boules BR et 0 boule D), 1-3-2 (1 boule BR et 2 boules D), 2-1-3 (1 boule BR et 2 boules D), 2-3-1 (0 boule BR et 3 boules D), 3-1-2 (0 boule BR et 3 boules D) et 3-2-1 (1 boule BR et 2 boules D).
3) a) $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ et $d_3 = 2$.
   b) $N_k = \binom{n}{k} d_k$ car on choisit les *k* boules dérangées, puis on range les autres, puis on place les *k* boules dérangées dans les *k* casiers vides.
   c) En faisant varier *k*, on effectue une partition de l'ensemble des dispositions.
   d) $d_4 = 9$.
4) Calculer le second membre et vérifier qu'il est égal au premier.
5) a) Introduire l'expression avec les factorielles.
   b) Utiliser le 5) a) et le 3) c).

c) Dans la somme de 0 à $(n-1)$, effectuer le changement de variable $j=k+1$ et utiliser l'hypothèse du 5).

d) $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k=0$ donc $\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^k=(-1)^n-1$.

e) Utiliser le 3) c) pour $(n+1)$ et isoler la somme de 1 à *n*.

6) Récurrence.

7) $d_6=265$.

8) On utilisera une variable p pour stocker les puissances de (-1). Demander à l'utilisateur un entier $n>0$, lire cette valeur. Initialiser $d:=1$ et $p:=1$. Puis faire une boucle de $k:=1$ à *n* avec $p:=-p$ et $d:=k*d+p$. Afficher *d*.

<u>Exercice 11 (d'après ESCP 93 voie S)</u>

<u>Partie A : Etude du nombre d'involutions de *E*</u>

1) Il y a équivalence entre bijectivité et injectivité car *f* est une application de *E* dans *E*.

2) $T_1=1$, $T_2=2$ et $T_3=4$.

3) a) Evident car $f(1)$, ..., $f(n-1)$ sont deux à deux distincts, et distincts de $f(n)=n$.

b) Le nombre d'involutions *f* de *E* telles que $f(n)=n$ est T_{n-1}.

c) Le nombre d'involutions *f* de *E* telles que $f(n)=k$ est T_{n-2} car $f(k)=n$.

d) Effectuer une partition de l'ensemble des involutions selon la valeur de $f(n)$.

4) Comme il s'agit d'une récurrence double, on utilise 3 variables : *T* pour stocker T_n, *U* pour stocker T_{n-1} et *V* pour stocker T_{n-2}. Demander à l'utilisateur un entier $n\geq 3$, lire cette valeur. Initialiser $U:=1$ et $T:=2$, puis faire une boucle de $k:=3$ à *n* avec $V:=U$, $U:=T$ et $T:=U+(k-1)*V$. Afficher la valeur de *T*.

<u>Partie B : Interprétation à l'aide d'une suite de polynômes</u>

Soit *u* la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\quad u(x)=e^{x^2/2}$.

1) $u'(x)=xu(x)$ et $u''(x)=(x^2+1)u(x)$.

2) *u* est de classe C^∞ par composition de fonctions C^∞.
Dériver $(n-1)$ fois la relation $u'(x)=xu(x)$ avec la formule de Leibniz.

3) a) $H_0(x)=1$, $H_1(x)=x$ et $H_2(x)=x^2+1$.

b) $H_n(x)=xH_{n-1}(x)+(n-1)H_{n-2}(x)$.

c) Par récurrence double, H_n est un polynôme de degré *n*, de même parité que *n* et strictement positif sur $]0,+\infty[$.

d) Les deux suites ont mêmes premiers termes et même relation de récurrence.

4) a) Calculer de deux manières différentes $u^{(n+1)}(x)$.

b) $H_{2p}(0)=\dfrac{(2p)!}{2^p\times p!}$ et $H'_{2p}(0)=0$. Et $H_{2p+1}(0)=0$ et $H'_{2p+1}(0)=\dfrac{(2p+1)!}{2^p\times p!}$.

5) a) Calculer de deux manières différentes $u^{(n+2)}(x)$. Utiliser le 3) b).

b) $\forall x\in]0,+\infty[\quad v_n(x)>0$ et $v'_n(x)>0$.

$v_{2p}(0)=\dfrac{(2p)!}{2^p\times p!}$ et $v'_{2p}(0)=0$. Et $v_{2p+1}(0)=0$ et $v'_{2p+1}(0)=\dfrac{(2p+1)!}{2^p\times p!}$.

c) $v''_n(x)=\left(n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{4}\right)v_n(x)$.

d) Encadrer $\dfrac{x^2}{4}$ sur [0,1] et vérifier $v_n(x)\geq 0$.

Partie C : Recherche d'un équivalent

1) a) $\lambda = \mu = \dfrac{a}{2}$.

b) $\forall x \in [0,1] \quad \varphi(x) > 0$ et $\varphi''(x) = \beta^2 \varphi(x)$.

c) $w(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1] \quad w'(x) \geq 0$, donc $\forall x \in [0,1] \quad w(x) \geq 0$.

d) Etudier les variations de la fonction h définie par $\forall x \in [0,1] \quad h(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

e) Utiliser l'expression de $\varphi(x)$ et majorer $e^{-\beta x}$.

f) Introduire une fonction ψ telle $\psi(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{-\alpha x}$ avec $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = 0$.

On trouve $\lambda = \mu = \dfrac{a}{2}$. Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad \psi(x) > 0$ et $\psi''(x) = \alpha^2 \psi(x)$.
Introduire la fonction z définie par $\forall x \in [0,1] \quad z(x) = f(x)\psi'(x) - f'(x)\psi(x)$.
Montrer que $z(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1] \quad z'(x) \leq 0$, donc $\forall x \in [0,1] \quad z(x) \leq 0$.
En déduire $\forall x \in [0,1] \quad \psi(x) \leq f(x)$, puis l'inégalité demandée.

2) a) Utiliser en $x = 1$ l'encadrement obtenu au 1) pour la fonction v_{2p} et $a = H_{2p}(0)$.

b) Evident en remplaçant $H_{2p}(0)$ et $H_{2p}(1)$.

c) Montrer que T_{2p} est encadré par deux membres équivalents. On montrera :

$$\frac{(2p)!}{2^{p+1}\, p!} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2p}{e}\right)^p \qquad e^{\alpha_{2p}} \sim e^{\sqrt{2p}} \qquad e^{\beta_{2p}} + 1 \sim e^{\sqrt{2p}}$$