DENOMBREMENT

Exercice 1

Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5, 4 boules noires numérotées de 1 à 4 et 3 boules vertes numérotées de 1 à 3. On tire simultanément 3 boules.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur ?
3) Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule verte ?
4) Combien y a-t-il de tirages contenant au plus un numéro pair ?
5) Combien y a-t-il de tirages contenant un numéro pair et deux boules rouges ?

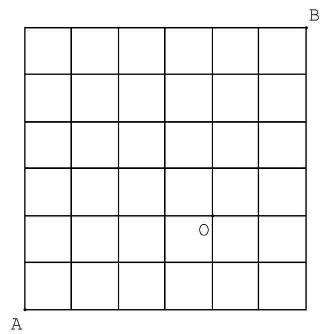
Exercice 2

Dans une commune, il y a 4 boulangeries. Le journal publie la liste des jours de fermeture hebdomadaire de ces boulangeries. Elles doivent fermer chacune un jour de la semaine autre que le samedi ou le dimanche.

1) Combien y a-t-il de listes possibles ?
2) Combien y a-t-il de listes possibles si l'on impose qu'il ne doit jamais y avoir deux boulangeries fermées le même jour ?
3) Combien y a-t-il de listes possibles si l'on impose que chaque jour il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte ?

Exercice 3

Les traits du quadrillage ci-contre représente les rues d'une ville. Un promeneur (pressé !) veut se rendre de A à B (en suivant les rues !). Un chemin de A à B est minimal s'il n'existe pas de chemin plus court pour aller de A à B.



1) Quel est la longueur d'un chemin minimal allant de A à B en prenant pour unité le côté d'un petit carré ?
2) Déterminer le nombre de chemins minimaux que peut emprunter le promeneur pour aller de A à B.
3) Déterminer le nombre de chemins minimaux qu'il peut emprunter s'il veut passer par O.

Exercice 4

Une grenouille monte un escalier de treize marches. Elle peut progresser soit en sautant d'une marche à la suivante, soit en sautant par dessus une marche. De combien de façons distinctes peut-elle arriver au sommet de l'escalier ?

Exercice 5

1) Rappeler $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
2) Montrer que $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ si $1\leq k\leq n$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.
3) Montrer que $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ si $2\leq k\leq n$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$.

Exercice 6

Démontrer que si $1\leq p\leq n$, alors : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 7

Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $0 \le p \le n$, alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n+1}{p}$.

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $\operatorname{Card} E = p$ et $\operatorname{Card} F = n$.

On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F. On pose $S_0^p = 0$.

1) Calculer S_n^p lorsque $n > p$ et lorsque $n = p$.
2) Calculer S_1^p.
3) Si $n = 2$, quelles sont les applications non surjectives de E dans F ? En déduire S_2^p.
4) Démontrer que : $n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k^p$.
5) Soit a un élément de E.
   a) Déterminer le nombre de surjections f de E dans F telles que la restriction de f à $E - \{a\}$ soit une surjection de $E - \{a\}$ dans F.
   b) Déterminer le nombre de surjections f de E dans F telles que la restriction de f à $E - \{a\}$ soit une surjection de $E - \{a\}$ dans $F - \{f(a)\}$.
   c) En déduire, si $2 \le n \le p$, que : $S_n^p = n\left[S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}\right]$.
6) Ecrire un programme demandant à l'utilisateur deux entiers n et p et affichant la valeur de S_n^p.

Exercice 9

Dans cet exercice, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

On dispose de p boules indiscernables et de n tiroirs $T_1, \ldots, T_n$ qui peuvent chacun contenir autant de boules que l'on veut.

On note Γ_n^p le nombre de manières de ranger ces p boules dans les n tiroirs et on pose : $\Gamma_n^0 = 1$ (il y a une seule manière de ranger 0 boule dans n tiroirs !)

Comme les boules sont indiscernables, deux rangements ne se distinguent que par le nombre de boules dans chaque tiroir.

1) Calculer Γ_1^p et Γ_2^p.
2) En considérant le nombre de boules dans le tiroir T_n, démontrer que : $\Gamma_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \Gamma_{n-1}^k$.
3) En déduire Γ_3^p et Γ_4^p.
4) Démontrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.
5) Ecrire un programme demandant à l'utilisateur deux entiers n et p et affichant la valeur de Γ_n^p.

Exercice 10

Soit n un entier naturel non nul.

On possède n boules numérotées de 1 à n que l'on veut ranger dans n casiers numérotés de 1 à n. On suppose que l'on ne peut mettre qu'une boule par casier.

Une boule est « bien rangée » si elle est mise dans le casier qui porte son numéro. Sinon, on dit qu'elle est « dérangée ».

1) Combien y a-t-il de dispositions possibles des n boules ?

2) On suppose (dans cette question seulement) que $n=3$. Faire un tableau représentant toutes les dispositions possibles et compter pour chacune le nombre de boules bien rangées et le nombre de boules dérangées.
3) On note d_n le nombre de dispositions des *n* boules dans les *n* casiers dans lesquels toutes les boules sont dérangées. Et on pose $d_0 = 1$.
   a) Calculer d_1, d_2 et d_3.
   b) Soit *k* un entier naturel vérifiant $0 \le k \le n$. Calculer en fonction de d_k le nombre de manières de ranger les *n* boules dans les *n* casiers avec *k* boules dérangées et $(n-k)$ boules bien rangées.
   c) En déduire que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
   d) Application : Le facteur a 4 lettres à mettre dans 4 boîtes aux lettres. De combien de manières différentes peut-il les répartir de sorte qu'aucune lettre ne parvienne à son destinataire ?
4) Vérifier que, pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$, on a : $d_k = kd_{k-1} + (-1)^k$.
5) On suppose que, pour tout entier *k* tel que $1 \le k \le n$, on a : $d_k = kd_{k-1} + (-1)^k$.
   a) Montrer que : $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$.
   b) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1} d_k = (n+1)!$.
   c) En déduire que : $(n+1)! = (n+1)d_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} d_k - \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k$.
   d) Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k$.
   e) En déduire que $d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$.

   On a ainsi démontré par récurrence (forte) que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$.
6) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$.
7) Application : A Chicago, 6 couples participent à un concours de danse. De combien de manières peut-on répartir les danseurs pour qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?
8) Ecrire un programme demandant à l'utilisateur un entier *n* strictement positif et affichant la valeur de d_n.

Exercice 11 (d'après ESCP 93 voie S)

On appelle involution d'un ensemble *E* toute application bijective de *E* dans *E* qui vérifie : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, et donc $f^{-1} = f$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1, n]\!]$. Une application *f* de *E* dans *E* est déterminée par les images $f(1)$, $f(2)$,…, $f(n)$ des éléments de *E* qui ne peuvent prendre chacune que *n* valeurs. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'applications de *E* dans *E*, et donc un nombre fini d'involutions de *E*. On note T_n le nombre d'involutions de $E = [\![1, n]\!]$.

L'objectif du problème est l'étude du nombre T_n d'involutions de *E* et, en particulier, la recherche d'un équivalent de T_n quand *n* tend vers $+\infty$.

Partie A : Etude du nombre d'involutions de *E*

1) Démontrer qu'une application f de E dans E est bijective si et seulement si les éléments $f(1)$, $f(2)$,…, $f(n)$ sont tous distincts.
2) Dans les cas $n=1$, $n=2$ et $n=3$, déterminer toutes les applications bijectives de E dans E, puis celles qui sont des involutions. En déduire T_1, T_2 et T_3.
3) On suppose maintenant que $n \geq 3$. On note $E = [\![1,n]\!]$ et $F = [\![1,n-1]\!]$.
   a) Démontrer que si f est une bijection de E dans E telle que $f(n)=n$, la restriction de f à F est une bijection de F dans F.
   b) En déduire en fonction de certains des nombres T_1, …, T_{n-1} le nombre d'involutions f de E telles que : $f(n)=n$.
   c) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Déterminer en fonction de certains des nombres T_1, …, T_{n-1} le nombre d'involutions f de E telles que : $f(n)=k$.
   d) En déduire que : $\forall n \geq 3 \quad T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}$.
4) Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur un entier n et qui affiche la valeur de T_n.

Partie B : Interprétation à l'aide d'une suite de polynômes

Soit u la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = e^{x^2/2}$.

1) Montrer que u est dérivable deux fois et exprimer $u'(x)$ et $u''(x)$ en fonction de x et de $u(x)$.
2) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, u est dérivable n fois et que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u^{(n)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)u^{(n-2)}(x)$$
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction H_n par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) = \dfrac{u^{(n)}(x)}{u(x)}$.
   a) Déterminer les fonctions H_0, H_1 et H_2.
   b) Exprimer $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et x.
   c) Démontrer que H_n est un polynôme dont on précisera le degré, la parité et le signe sur $]0,+\infty[$.
   d) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = H_n(1)$.
4) a) En dérivant la relation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x)$, et en utilisant le **3) b)**, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $H_n(0)$ et $H'_n(0)$ en fonction de n (on distinguera deux cas selon la parité de n).
5) a) En dérivant deux fois la relation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x)$, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad H''_n(x) + xH'_n(x) - nH_n(x) = 0.$$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad v_n(x) = H_n(x)e^{x^2/4}$. Etudier le signe de v_n et de v'_n sur $]0,+\infty[$. Calculer $v_n(0)$ et $v'_n(0)$.
   c) Exprimer $v''_n(x)$ en fonction de $v_n(x)$, de x et de n.
   d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \left(n+\dfrac{1}{2}\right)v_n(x) \leq v''_n(x) \leq \left(n+\dfrac{3}{4}\right)v_n(x)$.

Partie C : Recherche d'un équivalent

Dans la suite du problème, on pose : $\alpha_n = \sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$ et $\beta_n = \sqrt{n+\dfrac{3}{4}}$.

1) (*Cette question établit un résultat préliminaire qui sera utilisé dans la question suivante*) Soit a, α et β trois réels strictement positifs et soit f une fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, dérivable deux fois sur $[0,1]$ et telle que : $\forall x \in [0,1] \quad \alpha^2 f(x) \leq f''(x) \leq \beta^2 f(x)$ avec $f(0) = a$ et $f'(0) = 0$.
   a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ que l'on calculera tels que la fonction φ définie par : $\forall x \in [0,1] \quad \varphi(x) = \lambda e^{\beta x} + \mu e^{-\beta x}$ vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$.
   b) Déterminer le signe de φ sur $[0,1]$ et exprimer $\varphi''(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
   c) Soit w la fonction définie par : $\forall x \in [0,1] \quad w(x) = f(x)\varphi'(x) - \varphi(x)f'(x)$. Calculer $w(0)$ et étudier le signe de w', puis celui de w sur $[0,1]$.
   d) En déduire que : $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leq \varphi(x)$.
   e) En déduire que : $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leq \dfrac{a}{2}(e^{\beta x} + 1)$.
   f) Démontrer de même que : $\forall x \in [0,1] \quad \dfrac{a}{2} e^{\alpha x} \leq f(x)$.
2) On suppose dans cette question que n est pair : $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
   a) Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{2} e^{\alpha_{2p}} H_{2p}(0) \leq H_{2p}(1) e^{1/4} \leq \dfrac{1}{2}(e^{\beta_{2p}} + 1) H_{2p}(0)$.
   b) D'après la partie **B**, on a : $H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p \times p!}$. En déduire que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(2p)!}{2^{p+1} \times p!} e^{\alpha_{2p}} e^{-1/4} \leq T_{2p} \leq \frac{(2p)!}{2^{p+1} \times p!}(e^{\beta_{2p}} + 1) e^{-1/4}$$
   c) On admet la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. En déduire que si n est pair, alors : $T_n \sim \dfrac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{n}} \left(\dfrac{n}{e}\right)^{n/2}$.

   Une démonstration analogue peut être faite dans le cas où n est impair, et l'on obtient la même expression d'équivalent.