

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g(x, y) = \int_0^y (x - t)f(t) dt$ . Prouver que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et déterminer sa différentielle. e1-2
2. Montrer que l'application définie par  $f(X) = X^2$  sur  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et déterminer sa différentielle. e1-45
3. Déterminer les extrema de  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ . e2-036
4. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $f_{a,b} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a \sin y, y + b \sin x) \in \mathbb{R}^2$ .  
Montrer que  $f_{a,b}$  est surjective. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b)$  pour que  $f_{a,b}$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . E1-51

5. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :  $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & (x, y) \in D_f \Rightarrow (tx, ty) \in D_f \\ \forall t \in \mathbb{R}^+ & f(tx, ty) = t^k f(x, y) \end{cases}$   
 $f$  est dite  $k$ -positivement homogène.

(a) Démontrer que, si  $f$  est  $k$ -positivement homogène et de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors :

$$\forall (x, y) \in D_f^2 \quad xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y) = kf(x, y)$$

Etudier la réciproque.

(b) Démontrer que, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors :  $D_1f$  et  $D_2f$  sont  $(k - 1)$ -positivement homogènes.  
Etudier la réciproque. e2-060b

6.  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit une fonction  $G_n$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$G_n(x, y) = \int_0^y f(u) \frac{(x - u)^n}{n!} du$$

Démontrer que  $G_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer sa différentielle. E1-9

7. On approche la solution de  $(Dy = f(t, y), y(t_0) = y_0)$  pour  $h \in \mathbb{R}^*$  fixé par la suite

$$\forall n \geq 0 \quad t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)).$$

On suppose que  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ . Déterminer un  $DL_3$  quand  $h \rightarrow 0$  de  $y(t_1) - y_1$ .

On suppose que  $h = \frac{1}{p}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer un majorant de  $y(t_p) - y_p$ . e1-41

8. Soit  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  une fonction harmonique et  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, D^2f(t) \neq 0$ .  
A quelle condition  $f \circ g$  est-elle harmonique? E1-18

9. Soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\psi(x, y) = \frac{g(y, x) - g(x, y)}{y - x}$  si  $x \neq y$ .

Démontrer que  $\psi$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

En déduire la valeur de  $\zeta(a) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{x^y - y^x}{e^{x/y} - e^{y/x}}$ . E1-48

10. Soit  $f(x, y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq [0, 0]$ .  $f$  admet-elle un prolongement continu sur  $\mathbb{R}^2$ ? Ce prolongement est-il de classe  $\mathcal{C}^1$ ? E1-14

11. Soit  $f$  la fonction de  $(]0, +\infty[)^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :  $f(x, y) = \left( \frac{x^2}{2y}, \frac{y^2}{2x} \right)$ .

Etudier l'existence d'une fonction réciproque  $f^{-1}$  et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 après avoir démontré leur existence. E1-20

12. Déterminer un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi : (x, y) \mapsto (x - y, xy)$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $\varphi(U)$ . E1-50

13. Soit le carré de  $\mathbb{R}^2$  donné par  $[0, 1]^2$  de diagonale  $\Delta$  et  $f(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$ . Montrer que  $f$  admet un maximum sur le carré en un seul point à préciser. *Mines* e2-007

14. Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle donné. e2-032

15. Quel est le pavé de volume maximal dont la somme des longueurs des arêtes est  $L$  ? dont la somme des aires des faces est  $A$  ? e2-057
16.  $M$  et  $M'$  décrivent respectivement deux cercles tangents extérieurement en  $O$ . Quelle est l'aire maximale du triangle  $(O, M, M')$  ? *Centrale* E2-67