Fiche 1 : outils

Exercice 1

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(k\times k!) = (n+1)! - 1$.

Exercice 2

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les expressions suivantes (les écrire sans les signes $\sum$ ou $\prod$ et en utilisant des factorielles) :

$A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$; $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$ (penser à $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ et simplifier $\frac{k}{k!}$) ;

$C_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}\right)$ (indication : réduire au même dénominateur pour utiliser un résultat connu pour calculer le numérateur)

Exercice 4

a) Développer $f(x) = (1+x)^n$ à l'aide de la formule du binôme.

b) En déduire $S_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$, $S_0' = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

puis utiliser ces résultats pour calculer $S_0'' = \sum_{0 \le 2k \le n} C_n^{2k} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots..$

c) Dériver f de 2 façons différentes et utiliser le résultat pour calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$.

d) En s'inspirant de la méthode du c), calculer $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$