

1. Domaines de convergence des séries $\sum n^\alpha z^n$, $(\sqrt[n]{n} - 1)z^n$, $\sum \frac{(2n)!z^{2n}}{n!n^n}$.
2. Domaine de convergence et somme des séries entières $\sum \frac{x^n}{2n+1}$, $\sum \frac{2 \operatorname{sh} n}{n(n+1)}z^n$, $\sum \frac{z^{3n}}{(3n)!}$,
 $\sum \frac{n^2 + 4n - 1}{n+4} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})t^n$. d3-118
3. Prouver que $\ln 2 = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
4. Soit $f(t) = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}$ sur \mathbb{R}^* . Prouver que f admet un prolongement de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . d3-140
5. Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. D2-027
6. Recherche des solutions développables en série entière de $t^2 D^2 y + 6t D y + (6 - t^2)y = -1$.
7. Développer en série entière $f(t) = \ln(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t})$. d3-044

8. Domaine de convergence de la série $\sum n!z^{n^2}$. D3-3
9. Comparer les rayons de convergence et les sommes des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum s_n z^n$ où $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. D3-82
10. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite $a \neq 0$.
 (a) Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n} t^n$.
 (b) On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n} t^n$ ($t \in \mathbb{R}$). Calculer $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(t)}{\ln(1-t)}$. D3-130
11. Soit : $f_1(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-n} \cos(n^2 x)$ (ou $f_2(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(in^2 x)}{2^n}$) et $f_3(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos 2^n x}{n!}$.
 Montrer, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, que $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que sa série de Mac-Laurin est de rayon de convergence nul. D3-124

12. Domaine de convergence de $\sum \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} z^n$. d3-001
13. Etudier la série entière $\sum \frac{x^n}{(\operatorname{ch} \frac{1}{n})^{n^\alpha}}$, où α est un réel donné. CCP d3-020
14. Domaine de convergence de la série $\sum n^{\ln(n)} z^n$. Même question pour $\sum n^{\sqrt{n}} z^n$. D3-8
15. Domaine de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où a_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π . D3-80
16. Soit $\varphi(x) = x e^{-x}$, $u_n = \varphi(n)$, $v_n = \varphi(-n)$, $w_n = \varphi(1/n)$.
 Convergence et somme éventuelle de $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$. d3-110
17. Soit $f = x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Prouver que f admet un DL_n en 0. On le note $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$.
 Exprimer a_n en fonction des a_i , $i \leq n - 1$. Prouver que $\forall n, |a_n| \leq 1$.
 Soit $\Phi(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$. Prouver que Φ est définie sur un voisinage V de 0 et que $\Phi = f$ sur V . d3-106
18. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $(a_{n+1} - a_n)$ décroît. Démontrer que $R \sum a_n z^n \geq 1$. D3-138
19. Rayon de convergence et somme de $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$? CCP d3-024

20. Soit $\sum a_n x^n$ la série entière telle que $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$. Donner l'intervalle de convergence I de la série entière.

Calculer la somme de la série entière. Trouver les coefficients du développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{(1-x)^2}$. CCP

d3-019

21. Prouver que $\frac{\pi}{4} = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

22. Soit (u_n) définie par $(u_0 = u_1 = 1, \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n)$ et $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$.

Montrer que le rayon de convergence de S est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

Calculer $S(x)$; en déduire une expression de u_n .

D3-136

23. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1; \quad \forall n \geq 2, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}$$

Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction f somme de la série entière. En déduire f .

D3-137

24. Développer en série entière $f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

d3-122

25. Déterminer les solutions développables en série entière de $(1+x^2)D^2y - 2y = 0$.

D3-57

26. Soit l'équation (E) $(1-x^2)Dy - xy = 2$.

Démontrer que (E) admet une solution impaire développable en série entière.

Résoudre directement (E) sur $] -1, 1[$.

En déduire le développement en série entière de $x \mapsto (\arcsin x)^2$.

d3-088

27. Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , impaire, et solution de l'équation différentielle $Dy + xy = 1$.

Déduire de ce qui précède le développement en série entière de f .

d3-090