Les incontournables :

1. **Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.**

$\forall x \in]0,1],\ x^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ où $u_n(x) = \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$.

- La série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur $]0,1]$ de somme $S = (x \mapsto x^{-x}) \in CM(]0,1])$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n admet un prolongement dans $\mathcal{C}([0,1])$ donc est $L^1(]0,1])$.
- On étudie $\sum I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 |u_n|$.

  Pour tout $0 \le i \le j$, $f_{i,j} = (x \mapsto (\ln x)^i x^j) \in L^1(]0,1])$ (prolongement dans $\mathcal{C}([0,1])$) et $\displaystyle\int_0^1 f_{i,j} = -\frac{i}{j+1}\int_0^1 f_{i-1,j}$ d'où $\displaystyle\int_0^1 f_{i,i} = (-1)^i \frac{i!}{(i+1)^i}\int_0^1 f_{0,i} = (-1)^i \frac{i!}{(i+1)^{i+1}}$.

  $\forall n,\ I_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et $\forall n \ge 1,\ I_n \le \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum I_n$ est une série numérique convergente.

D'après le thm d'intégration terme à terme, $S \in L^1(]0,1])$ et $\displaystyle\int_0^1 S = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

2. **Etudier $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_1^{+\infty} e^{-nx}\sin(x)\ \ \mathrm{d}x$.**

Soit $u_n(x) = e^{-nx}\sin(x)$.

- La série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur $]0,+\infty[$ de somme $S = (x \mapsto \dfrac{e^{-x}\sin x}{1-e^{-x}} = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}) \in CM(]0,+\infty[)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in L^1(]0,+\infty)$ car $\forall x \in]0,+\infty[,\ |u_n(x)| \le e^{-nx}$.
- On étudie $\sum I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$.

  $\forall n \ge 1,\ I_n = Im\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx+ix}\ \mathrm{d}x = Im\left[\frac{e^{-nx+ix}}{-n+i}\right]_0^{+\infty} = Im\frac{1}{n-i} = \frac{1}{n^2+1}$ donc $\sum I_n$ est une série numérique convergente.

D'après le thm d'intégration terme à terme, $S \in L^1(]0,+\infty[)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} S = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

3. **Soit $\zeta : t \mapsto \displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^t}$. Limite en 1, en $+\infty$, continuité, variations, convexité de la fonction ζ.**

Soit $u_n(t) = \dfrac{1}{n^t}$.

$\forall n \ge 1,\ u_n(t) \ge \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^t}$ et, si $t > 1$, alors $(x \mapsto x^{-t}) \in L^1([1,+\infty[)$ donc $\zeta(t) \ge \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-t}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t-1}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 1^+}\zeta(t) = +\infty$.

Plus précisément, $\forall n \ge 2,\ u_n(t) \le \displaystyle\int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{x^t}$ donc $\dfrac{1}{t-1} \le \zeta(t) \le 1 + \dfrac{1}{t-1}$: $\displaystyle\lim_{t\to 1^+}(t-1)\zeta(t) = 1$ ie $\zeta(t) \underset{t\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$.

Etude en $+\infty$:

- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = 1 = l_1$ et $\forall n \ge 2,\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} u_n(t) = 0 = l_n$.
- Soit un $[a,+\infty[\in V(+\infty)$ $(a > 1)$. $\|u_n\|_{+\infty}^{[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$ donc $\sum u_n$ CV normalement sur $[a,+\infty[$.

D'après le thm de la double limite, ($\sum l_n$ converge) et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^t} = \sum_1^{+\infty} l_n = 1$ ie $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\zeta(t) = 1$.

Prouvons que ζ est $\mathcal{C}^2(]1,+\infty[)$ et que $\zeta^{(k)} = (t \mapsto \displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{(-\ln n)^k}{n^t})$ pour $k = 0..2$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \mathcal{C}^2(]1,+\infty[)$ et $u_n^{(k)} = (t \mapsto \dfrac{(-\ln n)^k}{n^t})$ pour $k = 0..2$.
- Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$. $\|u_n^{(k)}\|_{+\infty}^{[a,b]} = \dfrac{(\ln n)^k}{n^a} = o(\dfrac{1}{n^c})$ où $c \in]1,a[$ donc $\sum u_n^{(k)}$ $(k = 0..2)$ CV normalement sur tout segment de $]1,+\infty[$ (CVN locale).

d'où le résultat d'après les thm de transfert de continuité et de dérivation terme à terme.
En particulier, ζ est décroissante et convexe sur $]1,+\infty[$.

4. **Soit $f(x) = \sum_1^{+\infty} \dfrac{1}{n} \cos^n x \sin nx$. Etudier l'existence de $f(x)$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Calculer Df ; en déduire f.** D2-048

Soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n} \cos^n x \sin nx$.
Existence de $f(x)$:
Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $\sum u_n(x) = \sum 0$ converge de somme $S(x) = 0$.
Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $\forall n,\ |u_n(x)| \leq |\cos x|^n$ ce qui est le TG d'une série géométrique convergente donc $\sum u_n(x)$ est ACV.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est $2\pi-$périodique et impaire.
Dérivation sur $]0,\pi[$:

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u_n' = (x \mapsto \cos^{n-1} x \cos(n+1)x)$.
- Soit $[a, \pi-a] \subset]0,\pi[$. $\|u_n'\|_{+\infty}^{[a,\pi-a]} \leq \cos^{n-1} a$ et $0 \leq \cos a < 1$ donc $\sum u_n'$ CV normalement sur tout segment de $]0,\pi[$ (CVN locale).
- On a déjà prouvé que u_n CV ponctuellement sur $]0,\pi[$.

D'après le thm de dérivation terme à terme, $f \in \mathcal{C}^1(]0,\pi[)$ et $\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x \cos(n+1)x$.

Soit $x \in]0,\pi[$ fixé. $\sum \cos^{n-1} x \exp(i(n+1)x)$ est ACV de somme α où
$\alpha = \exp(2ix)\dfrac{1}{1-\cos x \exp(ix)} = \dfrac{2\exp(2ix)}{1-\exp(2ix)} = \dfrac{2\exp(ix)}{-2i \sin x}$ donc $f'(x) = -1$.
$f(\pi/2) = 0$ donc $\forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = -(x-\pi/2)$ et $f(0) = f(\pi) = 0$. f étant $2\pi-$périodique et impaire, elle est maintenant connue sur $\mathbb{R}$ (et on peut constater qu'elle est discontinue en tout point de $\pi\mathbb{Z}$).

Pour aller plus loin :

5. *On pose $\phi(x) = \inf\{|x-n|, n \in \mathbb{Z}\}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$.*
   (a) *Prouver que ϕ est lipschitzienne et $1-$périodique.*
   (b) *Prouver que f est définie, $1-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$.*
   (c) *Prouver que f n'est pas dérivable en 0.* D2-056

   [(a) $\Phi(\mathbb{R}) \subset [0,1/2]$ et Φ est $1-$périodique donc il suffit d'étudier $|\Phi(x)-\Phi(y)|$ quand $x \in [0,1]$ et $0 \leq y-x \leq 1/2$;
   (c) Soit $0 < x < 1$. Déterminer $n_1(x), n_2(x)$ pour que $\dfrac{1}{4} \leq 4^n x \leq \dfrac{3}{4}$ pour tout $n \in [\![n_1(x), n_2(x)]\!]$;
   $f(x) \geq \sum_{n_1(x)}^{n_2(x)} (3/4)^n 1/4 \underset{x\to 0}{\sim} (3/4)^{n_1(x)}$ (car $\lim_{x\to 0} n_2(x) - n_1(x) = +\infty$) et $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.]

Pour s'entraîner :

6. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. Prouver que $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Calculer $S(1)$. Prouver que $\forall x > 0 \quad xS(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{e}$.
   Prouver que $S(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et déterminer un DL_3 en $\dfrac{1}{x}$ quand $x \to +\infty$.

Prouver que $\forall x \geq 1 \quad S(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \ \mathrm{d}t$. *CCP* d2-061

$[S(1) = \dfrac{e-1}{1},\ xS(x) \to_{x\to 0} S(1) + \dfrac{1}{e},\ S(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}(1+\dfrac{n}{x})^{-1}$ et $(1+\dfrac{n}{x})^{-1} = 1 - \dfrac{n}{x} + \dfrac{n^2}{x^2} - \dfrac{n^3}{x^3(1+n/x)}$
d'où $S(x) = \dfrac{1}{ex} + \dfrac{1-e}{ex^2} + \dfrac{1}{x^3} + O(1/x^4)]$

7. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \int_1^x (\ln t)^n \ \mathrm{d}t \right)$. D2-016

   $[\ \dfrac{(x-1)^2}{2}]$

8. Calculer $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} \ \mathrm{d}x$ en fonction de n. Calculer $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - ix} \ \mathrm{d}x$. *CCP* d2-012

   $[I = \sqrt{\pi} e^{-1/4}\ ]$

9. On note E la fonction partie entière et $D = x \mapsto x - E(x)$.
   Prouver que la série de fonctions de terme général $u_n = x \mapsto \dfrac{D(nx)}{2^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note U sa somme.
   Prouver que U est périodique, continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, continue à droite et discontinue à gauche en tout point $a \in \mathbb{Q}$ et calculer $U(a) - \displaystyle\lim_{x \to a, x<a} U(x)$. d2-029

   [Si $a = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, alors $U(a) - \displaystyle\lim_{a^-} U = -\dfrac{1}{1 - 1/2^q}$]

10. (a) On admet que $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\displaystyle\int_{]0,1[} \ln t . \ln(1-t)\ dt = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

    (b) Existence et calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| dt$.

    (c) Existence et calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{\ln x}{x-1} dx$. D2-044

    [(b) : $-\pi^2/2$, (c) : $\pi^2/6$]

11. (a) Equivalent en 0^+ de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$. (Encadrer par des intégrales)

    (b) Equivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

    (c) Montrer que $\dfrac{1}{\sinh x}$ est un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh nx}$. D2-50

    [(a) : $-\ln x$, (b) : $\pi^2/(6x)$]