Les incontournables :

1. **Prouver que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_a^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer le DL_2 en 0 de la fonction réciproque.**

   Soit $f = y \mapsto \int_a^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   $h = t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de dérivée h (thm fondamental). De plus $h = Df \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   $\lim\limits_{\varepsilon\infty} f = \varepsilon\infty$ car $t \mapsto e^{t^2}$ est non intégrable sur $\mathbb{R}_\varepsilon$ et AVP, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et Df ne s'annule pas, donc f est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ existe.
   De plus, $D(f^{-1}) = \dfrac{1}{Df \circ f^{-1}}$ donc $D(f^{-1}) = \exp[-(f^{-1})^2]$ et, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{-1} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ donc $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   $f^{-1}(0) = a$, donc $D(f^{-1})(0) = e^{-a^2}$.
   $D^2(f^{-1})(x) = -2f^{-1}(x)D(f^{-1})(x)e^{-(f^{-1}(x))^2}$, en particulier $D^2(f^{-1})(0) = -2ae^{-a^2}e^{-a^2} = -2ae^{-2a^2}$.
   D'après la formule de Taylor-Young : $f^{-1}(x) = a + e^{-a^2}x - ae^{-2a^2}x^2 + o(x^2)$.

2. **Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que f et D^2f soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que Df est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|Df\|_\infty \leq \sqrt{2\,\|f\|_\infty \|D^2f\|_\infty}$. (On pourra utiliser des développements de $f(x+h)$ et $f(x-h)$)** C4-020

   $f(x+h) = f(x) + hDf(x) + R_2(h)$ et $f(x-h) = f(x) - hDf(x) + R_2(-h)$ d'après la formule de Taylor donc $\dfrac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h) - R_2(h) + R_2(-h)) = Df(x)$.
   $|R_2(t)| \leq \dfrac{t^2M_2(t)}{2!}$ où $M_2(t)$ est un majorant de $|Df|$ sur $[x, x+t]($ ou $[x+t, x])$; on peut choisir $M_2(t) = \|D^2f\|_\infty$.
   Supposons $h > 0$.
   $|Df(x)| \leq \dfrac{1}{2h}(|f(x+h)|+|f(x-h)|+|R_2(h)|+|R_2(-h)|) \leq \dfrac{1}{2h}(2\|f\|_\infty + 2\dfrac{h^2\|D^2f\|_\infty}{2!}) = \dfrac{\|f\|_\infty}{h} + \dfrac{h\|D^2f\|_\infty}{2}$.
   D^2f est donc bornée et pour tout $h > 0$, $M(h) = \dfrac{\|f\|_\infty}{h} + \dfrac{h\|D^2f\|_\infty}{2}$ est un majorant de $|D^2f|$.
   $DM(h) = -\dfrac{\|f\|_\infty}{h^2} + \dfrac{\|D^2f\|_\infty}{2}$ s'annule en $h = h_0 = \sqrt{\dfrac{2\|f\|_\infty}{\|D^2f\|_\infty}}$ et M a un minimum en ce point, donc en particulier $\|Df\|_\infty \leq M(h_0) = \sqrt{2\|f\|_\infty\|D^2f\|_\infty}$.

3. **Etude et courbe représentative de $\left(x \mapsto \int_{1/x}^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}\right)$.** C6-017

   Soit $h = t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ et $f = x \mapsto \int_{1/x}^{x^2} h$.
   - Ensemble de définition :
     h n'est définie que sur $I =]-1, +\infty[$ donc pour que $f(x)$ existe, il est nécessaire que $]1/x, x^2[\subset I$ ou bien $]x^2, 1/x[\subset I$.
     Cas 1 : $]1/x, x^2[\subset I \iff -1 \leq 1/x$ et $1/x \leq x^2 \iff -1 \leq 1/x$ et $0 \leq x^4 - x = x(x^3-1) \iff x \geq 1$ ou $x \leq -1$.
     Si $x > 1$ ou $x < -1$, alors h est continue sur le segment $[1/x, x^2]$ donc $f(x)$ existe (et $f(x) \geq 0$).
     Si $x = 1$, alors $f(x) = 0$.
     Si $x = -1$, alors $h \in CM(]-1, 1])$ et est AVP. $h(t) \underset{t\to-1}{\sim} \dfrac{1/\sqrt{3}}{(1+t)^{1/2}}$ donc $f(-1)$ existe.
     Cas 2 ; $]x^2, 1/x[\subset I \iff -1 \leq x^2$ et $x^2 \leq 1/x \iff 0 \geq x^4 - x = x(x^3-1) \iff 0 \leq x \leq 1$.
     Si $0 < x < 1$, alors h est continue sur le segment $[x^2, 1/x]$ donc $f(x)$ existe (et $f(x) \leq 0$).
     Si $x = 0$, $1/x$ n'existe pas donc $f(x)$ non plus.
     Conclusion : f est définie sur $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.
   - Variations :
     h est continue sur $I =]-1, +\infty[$ et $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x$ sont $\mathcal{C}^1$ sur leurs domaines de

définition donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ et $Df(x) = 2xh(x^2) - \dfrac{-1}{x^2}h(1/x)$ (thm fondamental), ie $Df(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}}$.
Si $x > 0$, alors $Df(x) > 0$.
Si $x < -1$, alors $Df(x) > 0 \iff \dfrac{-2x}{\sqrt{1+x^6}} < \dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}} \iff 3x^6+4x^3-1 < 0 \iff x > \alpha = -\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{18+9\sqrt{7}}$.
Conclusion : f est décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha,-1[$ et sur $]0,+\infty[$.

– Limites :
$h \in CM(]-1,+\infty[)$ donc $\lim\limits_{u\to 0}\displaystyle\int_0^u h = 0$.
$h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty}\displaystyle\int_0^u h = L$ existe.
Etude en $\pm\infty$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} h - \int_0^{1/x} h \to L$; $y = L$ est asymptote.
Etude en -1 : $\lim\limits_{-1} Df = +\infty$ donc la tangente en $(-1, f(-1)$ est parallèle à Oy.
Etude en 0^+ : $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} h - \int_0^{1/x} h \to -L$ et $\lim\limits_0 Df = +\infty$; $(0,-L)$ est point limite et la tangente y est parallèle à Oy.

4. **Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\exists k > 0 \quad \forall x > 0 \quad f(x) \leq k\displaystyle\int_0^x f$.**
Démontrer que $f = 0$. C6-011

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \in \mathbb{R}_+$ donc $F = x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée f (thm fondamental).
$\forall x > 0,\ DF(x) \leq kF(x) \iff \forall x > 0,\ e^{-kx}DF(x) - ke^{-kx}F(x) \leq 0 \iff G = x \mapsto e^{-kx}F(x)$ décroit sur $\mathbb{R}_+$, or $G(0) = 0$ donc $G = 0$.
$\forall x > 0,\ 0 \leq f(x) \leq ke^{kx}G(x) = 0$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue en 0, donc nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin :

5. *Soit* $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 f - \frac{1}{2n}\left(f(0) + f(1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
   (a) *On suppose* $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *et* f' *lipschitzienne sur* $[0,1]$; *démontrer que* $\lim n\Delta_n = 0$.
   (b) *On suppose* $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *et* $f"$ *lipschitzienne sur* $[0,1]$; *démontrer que* $\lim n^2\Delta_n = \dfrac{1}{12}(f'(0) - f'(1))$.

   On pourra utiliser des développements de Taylor de la fonction $G_k : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^x f$ *en* $\dfrac{k}{n}$. C6-100

Pour s'entraîner :

6. Soit f définie par $\begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow & f(x) = 0 \\ x > 0 & \Rightarrow & f(x) = e^{-1/x} \end{cases}$
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ où P_n est un polynôme dont on précisera le degré. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(n)}(0)$.
   Déterminer g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, positive strictement sur $]a,b[$ et nulle partout ailleurs. *Mines* c4-006

   [$g = f \circ h$ où $h = t \mapsto x = h(t) = (t-a)(b-t)$.]

7. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$.
   Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)f"(x) \leq f'^2(x)$. C4-003

   [$\varphi = y \mapsto f^2(x) - f(x+y)f(x-y)$ est $\mathcal{C}^2$, $D\varphi(0) = 0$ et φ est AVP d'où $D^2\varphi(0) \geq 0$.]

8. Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $n \geq 2$.
   (a) Montrer qu'il existe $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tels que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)$.

   Mines c4-008

   [(a) : $x_k = F^{-1}(\frac{k}{n}\int_a^b f)$ où $F = x \mapsto \int_a^x f$;(b) : $\frac{\int_a^b f^2}{\int_a^b f}$]

9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f\circ f(x) = ax+b$ où a et b sont deux réels, $a \neq 0$ et $a \neq 1$.
   (a) Montrer que f est monotone, bijective et que a est positif.
   (b) Trouver une relation analogue pour f^{-1}.
   (c) Montrer que f' est constante, puis exprimer f.
   (d) Dans le cas où $a = 1$, montrer que b est nul ou f croissante.

   Centrale c4-047

   [(b) : $f^{-1}\circ f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$; (c) : $\forall n,\ f'(x) = f'(u_n)$ où $u_0 = x, u_{n+1} = au_n + b$ (cas $a < 1$; sinon, on étudie f^{-1})]

10. Prouver que $\begin{array}{ccc}]-\pi/2,\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \tan x - x \end{array}$ admet une réciproque $(y \mapsto x = F(y)$.

    Existence et calcul de $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $F(y) = \frac{\pi}{2} + \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + o_{y\to 0}\left(\frac{1}{y^2}\right)$. c4-059

    [$x \mapsto z = \frac{1}{\tan x - x}$ a un prolongement en $\pi/2$ qui induit un $\mathcal{C}^1-$difféo de $]0,\pi/2]$ sur $[0,+\infty[$ de réciproque g qui est en fait $\mathcal{C}^2$ d'où $g(z) = \pi/2 + zg'(0) + z^2g"(0)/2 + o(z^2)$.]

11. Etudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $F(x) = e^{1/x}\int_0^x e^{-1/t}dt$. C6-084

    [F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; étude en 0 : $0 \leq F(x) \leq \frac{x^{3/2}}{\sqrt{6}}$; étude en $+\infty$: $F(x) = ke^{1/x} + e^{1/x}\int_1^x e^{-1/t}\ \mathrm{d}t$ et si $t \geq 1$, on peut encadrer (TSSA) $1 - 1/t \leq e^{-1/t} \leq 1 - 1/t + 1/2t^2$ d'où une BP de direction Oy.]

12. Soit f une fonction définie et continue sur $[0\ 1]$ et telle que $\forall x\in[0\ 1] \quad f(x) = \int_0^x f(t-t^2)dt$.

    Montrer que, si $M = \sup\limits_{0\leq t\leq 1/2} |f(t)|$, alors $\forall x \in [0\ 1/2] \quad |f(x)| \leq M/2$.

    En déduire la valeur de f. C6-076

    [$f = 0$]

13. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\ dt$ pour une valeur $a \in]0\ 1]$.

    Démontrer que f est la fonction nulle. *Mines* C6-024

    [$\|f\|_\infty \leq a\|f\|_\infty$.]

14. Déterminer toutes les fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad g(x) - g(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} g(t)\ \mathrm{d}t.$ C6-034

    [$\forall(x,y),\ g'(2x+y) = g'(x+2y)$ d'où $\forall n\in\mathbb{N},\ g'(x) = g'(x/2^n)$ et g' est constante ; de plus $g(x) = g'(x/3)$ donc g est constante et $g = 0$.]