Les incontournables :

1. **Convergence et somme des séries :** $\sum \arctan \dfrac{1}{n^2+3n+3}$ $\qquad \sum 3^{n-1}\sin^3 \dfrac{\alpha}{3^n}$. D1-17

   (a) – $\sum u_n$ est une SATP (série à termes dans $\mathbb{R}_+$).
   – $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n^2+3n+3} \sim \dfrac{1}{n^2}$, ce qui est le TG (terme général) d'une série de Riemann convergente.
   Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est convergente.
   Ou bien directement :
   $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $u_k = \arctan \dfrac{\tan v_k - \tan v_{k-1}}{1+\tan v_k \tan v_{k-1}} = \arctan(\tan(v_k - v_{k-1}))$ en notant $k+2 = \tan v_k$.
   $k+2 \in \mathbb{R}_+$ donc on peut choisir $v_k \in [0,\pi/2[$ et alors $v_k - v_{k-1} \in]-\pi/2, \pi/2[$ (en fait $\in [0,\pi/2[$) donc $u_k = v_k - v_{k-1}$.
   s_n est une somme partielle télescopique : $s_n = v_n - v_{-1} = \arctan n+2 - \arctan 1$.
   (s_n) a une limite $S = \pi/4$ donc $\sum u_n$ est convergente de somme S.

   (b) $\sum |u_n|$ est une SATP.
   $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $u_n \underset{3^{n-1}}{\sim} \left(\dfrac{\alpha}{3^n}\right)^3 = O((\dfrac{1}{9})^n)$ qui est le TG d'une série géométrique convergente.
   Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est absolument convergente.
   Ou bien directement :
   $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $u_k = 3^{k-1}\left(\dfrac{1}{4}(3\sin\dfrac{\alpha}{3^k} - \sin 3\dfrac{\alpha}{3^k})\right) = \dfrac{1}{4}\left(3^k \sin\dfrac{\alpha}{3^k} - 3^{k-1}\sin\dfrac{\alpha}{3^{k-1}})\right)$.
   s_n est télescopique : $s_n = \dfrac{1}{4}\left(3^n\sin\dfrac{\alpha}{3^n} - 3^{-1}\sin\dfrac{\alpha}{3^{-1}})\right)$.
   $\sin\dfrac{\alpha}{3^n} \sim \dfrac{\alpha}{3^n}$ donc (s_n) a une limite $S = \dfrac{1}{4}(\alpha - \dfrac{\sin 3\alpha}{3})$ donc $\sum u_n$ est convergente de somme S.

2. **Etudier** $\sum \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ $\qquad \sum \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^3$ $\qquad \sum \dfrac{1}{\sqrt{n \ln n}}$ $\qquad \sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.
   Valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

   (a) $\sum u_n$ est une SATP.
   $\ln u_n = (\ln n)^2 - n\ln\ln n \sim -n\ln\ln n$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\ln u_n}{-n\ln\ln n} \geq 1/2$ si $n \geq n_0$. Soit un tel n_0.
   $\ln u_n \leq 1/2(-n\ln\ln n) \leq -n/2$ si $n \geq n_0$ et $\ln\ln n \geq 1$.
   $u_n \leq (e^{-1/2})^n$ pour $n \geq n_1$ et on reconnait le TG d'une série géométrique convergente.
   Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est convergente.

   (b) $\sum u_n$ est une SATP.
   $(\ln n)^3 = o(n)$ donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui est le TG d'une série de Riemann convergente.
   Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est convergente.(C'est une série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha > 1$)

   (c) $\sum u_n$ est une SATP.
   $\ln n = o(n)$ donc $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$ et $\dfrac{1}{n}$ est le TG d'une série de Riemann divergente.
   Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est divergente.(C'est une série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha < 1$)

(d) $\sum u_n$ est une SATP.
$\phi : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est une fonction continue et décroissante sur $[2,+\infty[$ donc $u_n = \phi(n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \phi = v_n$
si $n \geq 3$ et $t_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} v_k = \int_2^n \phi = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$ est le TG d'une suite qui a une limite $(\dfrac{1}{\ln 2})$
donc $\sum v_n$ est une série convergente.
Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est convergente.(C'est une série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$
avec $\alpha = 1$ et $\beta > 1$)
Pour tout $n \geq 2$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ est une valeur approchée de la somme S et $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - s_n$.
$0 \leq r_n \leq \displaystyle\int_n^{+\infty} \phi = \frac{1}{\ln n}$ donc si on choisit $\dfrac{1}{\ln n} \leq 0,02$ (ie $n \geq e^{50}$: c'est une convergence très lente), alors $S = s_n + 0,01$ à $0,01$ près.

3. Etudier la série $\sum \arccos\left(\dfrac{2}{\pi} \arctan n^2\right)$. d1-016

$\sum u_n$ est une SATP.
Soit $c_n = \dfrac{2}{\pi} \arctan n^2$. $\lim c_n = 1$ donc $\lim u_n = 0$ et $u_n \sim \sin u_n = \sqrt{1 - c_n^2} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \arctan n^2}$.
$\dfrac{\pi}{2} - \arctan n^2 = \arctan \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $u_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{n}$ ce qui est le TG d'une série (harmonique) divergente.
Par thm de comparaison, $\sum u_n$ est divergente.

4. Prouver que $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ est semi-convergente et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de sa somme.

- $\sum u_n$ est une série alternée.
- $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ de dérivée $t \mapsto \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$ négative sur $[3,+\infty[$ donc $(|u_n|)_{n \geq 3}$ décroit.
- $\lim u_n = 0$.

D'après le TSSA (thm des séries alternées), $\sum u_n$ est convergente.
Mais $|u_n| \geq \dfrac{1}{n}$ si $n \geq 3$ et $\dfrac{1}{n}$ est le TG d'une série divergente donc $\sum |u_n|$ est divergente ie $\sum u_n$ est semi-convergente.
D'après le TSSA, si $n \geq 3$, alors $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|r_n| \leq u_{n+1}$.
Soit n impair (par exemple) tel que $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leq 0,002$. Alors $0 \leq r_n \leq 0,002$ donc $S = s_n + 0,001$ à $0,001$ près.

5. Etudier la série $\sum \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin x \; dx$. d1-042

$t \mapsto x = n\pi + t$ est $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ sur $[n\pi,(n+1)\pi]$ donc $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^\pi e^{-\sqrt{n\pi+t}} \sin t \; dt$ est le TG d'une série alternée.
$|u_n| = \displaystyle\int_0^\pi e^{-\sqrt{n\pi+t}} \sin t \; dt \geq \int_0^\pi e^{-\sqrt{(n+1)\pi+t}} \sin t \; dt = |u_{n+1}|$ ie $(|u_n|)$ est une suite décroissante.
$|u_n| \leq \displaystyle\int_0^\pi e^{-\sqrt{n\pi}} \; dt = \pi e^{-\sqrt{n\pi}}$ donc $\lim u_n = 0$.

D'après le TSSA, $\sum u_n$ est une série convergente.
$e^{-\sqrt{n\pi}} = O(\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)^3) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$ donc la convergence est absolue.

6. Etudier la série de terme général $u_n = \sqrt[3]{n^6+n^4+n^2-1} - \sqrt{n^4+an^2+bn+1}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. d1-066

$\sqrt[3]{n^6+n^4+n^2-1} = n^2(1+t)^{1/3}$ où $t = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6} \sim \frac{1}{n^2}$.
On a donc $\sqrt[3]{n^6+n^4+n^2-1} = n^2(1+\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)) = n^2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9n^2} + o(1/n^2)$.
De même, $\sqrt{n^4+an^2+bn+1} = n^2+\frac{a}{2}+\frac{b}{2n}+\frac{4-a}{8n^2}+o(1/n^2)$ d'où $u_n = \frac{2-3a}{6}-\frac{b}{2n}+O(1/n^2)$.
Si $a \neq 2/3$, alors $u_n \sim \frac{2-3a}{6}$ donc ($\lim u_n = 0$) est faux : $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
Si $a = 2/3$ et $b \neq 0$, alors $u_n \sim \frac{-b}{n}$ donc $\sum u_n$ est à termes réels de signe constant pour $n \geq n_0$ et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente donc, par comparaison, $\sum u_n$ est divergente.
Si $a = 2/3$ et $b = 0$, alors $|u_n| = O(1/n^2)$ donc $\sum u_n$ est absolument convergente.

7. Etudier la série $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$. d1-006

$\sqrt{n^2+n+2} = n(1+\frac{1}{2n}+\frac{7}{8n^2}-\frac{7}{16n^3}+o(1/n^3))$ donc $u_n = \cos(n\pi+\pi/2+t)$ où $t \sim \frac{7\pi}{8n}$ donc
$u_n = (-1)^{n+1}\sin t = (-1)^{n+1}(t-\frac{t^3}{6}+o(1/n^3)) = (-1)^{n+1}\frac{7\pi}{8n}+O(1/n^2)$.
$v_n = \frac{-7\pi}{8}\frac{(-1)^n}{n}$ est le TG d'une série semi-convergente.
$w_n = O(1/n^2)$ est le TG d'une série absolument convergente.
$\sum u_n$ est donc semi-convergente.

8. Prouver que le produit de Cauchy de 2 séries exponentielles est une série exponentielle. Valeur approchée à 10^{-5} près de $\exp(1/3)$.

Soit $\sum u_n = \sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum v_n = \sum \frac{y^n}{n!}$ et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy.
$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$ ce qui est le TG d'une série exponentielle.
$\exp(1/3) = s_n + r_n$ où $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ avec $a_k = \frac{1}{3^k k!}$.
Si $k \geq n$, alors $a_k = a_n\frac{1}{3^{k-n}(n+1)...k} \leq a_n\frac{1}{3^{k-n}(n+1)^{k-n}} = \frac{\alpha}{(3(n+1))^k}$ où $\alpha = a_n 3^n(n+1)^n$ ne dépend pas de k, et $b_k = \left(\frac{1}{3(n+1)}\right)^k$ est le TG d'une série géométrique convergente donc
$0 \leq r_n \leq \alpha\frac{\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3(n+1)}} = \frac{1}{(3n+2)3^n n!}$.
Soit n tel que $\frac{1}{(3n+2)3^n n!} \leq 2.10^{-5}$; alors $\exp(1/3) = s_n + 10^{-5}$ à 10^{-5} près.

9. Prouver que la suite $(\left(\sum_1^n \frac{1}{k}\right) - \ln n)$ est convergente.(Sa limite s'appelle la "constante d'Euler")

Soit $u_n = \left(\sum_1^n \frac{1}{k}\right) - \ln n$ pour $n \geq 1$ et ($a_n = u_n - u_{n-1}$ si $n \geq 2$; $a_1 = u_1$).
Alors $\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et on étudie la série $\sum a_n$.

$a_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = -\frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) = O(1/n^2)$ donc $\sum a_n$ est absolument convergente. La suite (u_n) a donc une limite.

10. Convergence et somme de la série de terme général $\frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$. d1-106

$P(n) = 2n^3 - 3n^2 + 1 = a(n+3)(n+2)(n+1) + b(n+3)(n+2) + c(n+3) + d$ et $a = 2, b = -15, c = 53, d = -80$.
$u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!} + \frac{c}{(n+2)!} + \frac{d}{(n+3)!}$ donc $\sum u_n$ est la somme de 4 séries convergentes.
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + b\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + c\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} + d\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} = ae + b(e-1) + c(e-2) + d(e-5/2) = 109 - 40e$.

11. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = s_{2n+1} - \frac{1}{4}s_n$ où (s_n) est la suite des sommes partielles de la série (convergente de somme $S = \frac{\pi^2}{6}$) $\sum \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ existe et vaut $S - \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$.
$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\sum_{1 \le 2h \le n} \frac{1}{(2h)^2} = \frac{1}{2}s_{[n/2]}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2}s_{[n/2]} - s_n$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ existe et vaut $\frac{1}{2}S - S = -\frac{\pi^2}{12}$.

Pour aller plus loin :

12. *Pour $n \ge 2$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$; étudier les séries $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$.*

[TSSA : $\sum a_n$ converge ; DL en $O(1/n^{3/2})$: $\sum b_n$ diverge ; DL en $O(1/n^{3/2})$: $\sum c_n$ converge. Et pourtant les TG sont des équivalents.]

13. *'Critère d'Abel (1802-1829)'*

Soit (s_n) et (t_n) deux suites réelles et $S_n = \sum_{k=0}^{n} s_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$.
On suppose que (s_n) et (t_n) vérifient les conditions suivantes :

(i) $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |T_n| \le M$
(ii) $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ *et la suite (S_n) est décroissante*

Démontrer que la série $\sum T_k\, s_{k+1}$ est absolument convergente puis que la série $\sum t_k\, S_k$ est convergente.
Application : Démontrer la convergence de la série $\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $\theta \ne 0 \quad (2\pi)$. D1-117

[Comparer avec $\sum M(S_{k+1} - S_k)$ qui est convergente ;
$\sum_{k=0}^{n} t_k S_k = t_0 S_0 + \sum_{k=1}^{n} (T_k - T_{k-1}) S_k = t_0 S_0 - \sum_{k=1}^{n-1} T_k s_{k+1} + T_n S_n - T_0 S_1 = T_n S_n - \sum_{k=0}^{n-1} T_k s_{k+1}$
(transformation d'Abel) d'où la convergence.
Pour $k \ge 1$, $t_k = \cos k\theta$, $S_k = \frac{1}{k^\alpha}$, $T_k = \frac{\sin(k-1/2)\theta - \sin\theta/2}{2\sin\theta/2}$ $(\theta/2 \ne 0\ (\pi))$]

14. *Soit $(u_n) = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Vérifier que la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ avec elle-même n'est pas convergente. (On montrera que son terme général ne tend pas vers 0)* D1-141

[Soit v_n le TG de la série produit. $v_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k-1)}}$ et $|v_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n/2)(n-n/2)}} = \frac{2(n+1)}{n}$.]

15. *'Le cas douteux de la règle de d'Alembert'*
Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes strictements positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une série absolument convergente $\sum v_n$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$$

Démontrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}$.
Application : Etudier la série $\sum n^{-n}\, n!\, e^n$. D1-145

[La suite de TG $a_n = \ln(u_n n^\alpha)$ a une limite parce que la série $\sum a_n - a_{n-1}$ est convergente.]

16. *(a_n) est une suite convergente de limite α et $\phi(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\lambda^n}{n!}$. Démontrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} \phi(\lambda) = \alpha$.*
Pour $a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p+2)^n}{(2p+1)!}$, étudier $\phi(\lambda)$; conclusion ? D1-129

[$a_n = \alpha - a'_n$ ramène au cas $\alpha = 0$.
On découpe "à la Cesaro" : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0,\ |\Phi(\lambda)| \leq e^{-\lambda} |P(\lambda)| + \varepsilon e^{-\lambda} \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ où $P(\lambda) = \sum_{n=0}^{N_0} a_n \frac{\lambda^n}{n!}$ est $o(e^\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$.
Ex : $\Phi(\lambda) = \sin(e^\lambda)$ n'a pas de limite quand $\lambda \to +\infty$ donc (a_n) n'a pas de limite.]

17. *Soit a une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$ et la suite u définie par $\left(u_0 > 0\ ,\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}\right)$. Prouver que la suite u converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.*

[(u_n) est croissante à termes dans $\mathbb{R}_+$.
$u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{u_0}$ donc si $\sum a_n$ converge, alors u converge.
Si u converge, alors $a_n = O(u_{n+1} - u_n)$ donc $\sum a_n$ converge.]

Pour s'entraîner :

18. Etudier la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. D1-147

[$\sum u_n$ converge et en sommant $nu_n = (n+1)u_{n+1} - u_{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$, $S = -\ln 2$.]

19. Soit $u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$. Convergence et somme éventuelle de la série $\sum u_n$. D1-036

[Convergence ssi $a + b + c = 0$ et $b + 2c = 0$ et $S = -a \ln 2$.]

20. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\ln(t) = \arctan t + n\pi$ a une unique solution x_n strictement positive.
Etudier la série : $\sum \frac{1}{x_n}$. D1-137

[$x_n > e^{n\pi}$ d'où convergence.]

21. Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1! + 2! + ... + n!}{(n+p)!}$. *CCP* d1-107

[Majorer/minorer le numérateur. Convergence ssi $p \geq 2$.]

22. a_n est la somme des chiffres de l'écriture de n en base 2. Calculer a_{2n} ; calculer a_{2n+1}.
Etudier $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$. *Centrale* d1-120

[$a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = a_n + 1$. $a_n \sim \dfrac{\ln n}{\ln 2}$ d'où la convergence. $S = 2\ln 2$.]

23. Etudier la série $\sum \left(n^{1/(n+1)} - (n+1)^{1/n}\right)$. d1-004

[$u_n \sim \dfrac{-\ln n}{n^2}$] d'où convergence absolue.

24. Nature de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{\ln n}{n - \ln n}$. *CCP* d1-104

[Par développement en $O(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}$, semi-convergence.]

25. Soit $u_n = a^n$ et $v_n = (-1)^n a^n$. Etudier la somme et le produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. D1-051

26. Etudier la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi \dfrac{n^3+1}{n^2+1}\right)$. d1-128

[Semi-convergence par TSSA ou développement limité.]

27. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} =_{n\to+\infty} n + \frac{\ln^2 n}{2} + K + o(1)$. D1-139

[$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} - n - \frac{\ln^2 n}{2}$ a une limite parce que $\sum a_n - a_{n-1}$ est une série convergente.]

Soit $t \in]0,1[$.

28. (a) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(1+t^n)$ est convergente.

 (b) En déduire que la suite définie par $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+t^k)$ est convergente.

 (c) On considère la suite v définie par ses deux premiers termes v_0, v_1 tels que $0 < v_0 < v_1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + t^n v_n.$$

 Montrer que la suite v est convergente. D1-111

 [(c) :$v_{n+2} \leq (1+t^n)v_{n+1}$.]

29. Convergence et somme de la série de terme général $\dfrac{\cos nx}{2^n}$. D1-131

[$S = Re(\dfrac{1}{1 - e^{i\theta}/2})$.]