Réponses et Indications (Matrices)

Exercice 1 (d'après ESLSCA 99)

Partie A

1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -11 & -12 & -13 \\ 19 & 20 & 13 \\ 38 & 38 & 27 \end{pmatrix}$.
2) $a = 6$, $b = -11$ et $c = 6$. Donc $A^3 = 6A^2 - 11A + 6I$.
3) Exprimer I en fonction de A et factoriser par A.

   A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
4) $S = \{(3,2,1)\}$. Le système équivaut à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$. Résoudre en utilisant A^{-1}.

Partie B

1) $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
3) Raisonner par récurrence.
4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2\times 3^n & -2 + 2^{n+2} - 2\times 3^n & 1 - 3^n \\ -2^{n+1} + 2\times 3^n & 2 - 2^{n+1} + 2\times 3^n & -1 + 3^n \\ -2^{n+2} + 4\times 3^n & 2^{n+2} + 4\times 3^n & 2\times 3^n \end{pmatrix}$.

Partie C

1) Pour chaque matrice M, calculer AM et MA.
2) Utiliser $AM = MA$ et $AN = NA$.
3) $AM = MA$ équivaut à $M^{-1}A = AM^{-1}$.
4) Utiliser $A = PDP^{-1}$ et $M = PM'P^{-1}$ pour écrire $AM = MA$.
5) La matrice D vérifie : $D = (d_{i,j})$ avec $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{i,i} = i$.

   Donc $MD = (jm_{i,j})$ et $DM = (im_{i,j})$. Donc $MD = DM$ ssi : $m_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
6) $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4b - 2c & -2a + 4b - 2c & a - c \\ -2b + 2c & 2a - 2b + 2c & -a + c \\ -4b + 4c & -4b + 4c & 2c \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1) et 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Au 2) Raisonner par récurrence.

4) $T = D + J$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Utiliser la formule du binôme en vérifiant $DJ = JD$.

6) Raisonner par récurrence.

7) $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 4+(n-3)2^n & -4+(8-3n)2^{n-1} & 1+(n-2)2^{n-1} \\ 4+(n-2)2^{n+1} & -4+(5-3n)2^n & 1+(n-1)2^n \\ 4+(n-1)2^{n+2} & -4+(2-3n)2^{n+1} & 1+n2^{n+1} \end{pmatrix}$.

8) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 7 + (n-4)2^n$. Utiliser $X_n = A^n X_0$.

Exercice 3 (d'après HEC 98 voie T)

Partie A : Dérivées successives d'une fonction *f*

1) $f'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$.

2) et 3) $a_{p+1} = -a_p$, $b_{p+1} = 2a_p - b_p$ et $c_{p+1} = b_p - c_p$. Et $a_1 = -1$, $b_1 = 1$ et $c_1 = 0$.

Partie B : Puissances d'une matrice

1) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall p \geq 3 \quad J^p = 0$.

2) Utiliser la formule du binôme car $A^p = (J - I)^p$ avec $IJ = JI$.

3) $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2p & 1 & 0 \\ p(p-1) & -p & 1 \end{pmatrix}$.

Partie C : Retour aux dérivées de *f*

$\forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(p)}(x) = (-1)^p [x^2 + (1-2p)x + (p-1)^2] e^{-x}$.

Exercice 4 (d'après Ecricome 2003 voie E)

Partie A : Inversion de la matrice *P*

$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3P^2 - P - I$.

Donc $P^{-1} = -P^2 + 3P - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie B : Puissances de la matrice *A*

$P^{-1}AP = T = D + J$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par la formule du binôme : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Par récurrence : $A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & -1+(n+1)2^n \\ -1+2^n & 2-2^n & -1+(n+2)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Partie C : Commutant de la matrice *A*

1) Utiliser $AM = MA$ et $AM' = M'A$.
2) Utiliser $A = PTP^{-1}$ et $M = PQP^{-1}$.
3) Résoudre $TQ = QT$ pour une matrice $Q = \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & c \\ u & v & d \end{pmatrix}$.
4) $M \in \mathscr{C}(A) \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ecrire $M = PQP^{-1}$.
5) $K = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une base de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 5 (d'après Ecricome 99 voie S)

1) Ecrire $H = (h_{i,j})$ avec $\begin{cases} h_{1,1} = 1 \text{ et } \forall j \in [\![2,4]\!] \quad h_{1,j} = 0 \\ h_{2,1} = a,\ h_{3,1} = b \text{ et } h_{4,1} = c \\ \forall i \in [\![2,4]\!] \quad \forall j \in [\![2,4]\!] \quad h_{i,j} = a_{i-1,j-1} \end{cases}$ et H' de même.

   Calculer les coefficients $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{4} h_{i,k}h'_{k,j}$ de HH'.

2) Raisonner par récurrence en utilisant le 1) : $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = U_n + V^nU_1$.

3) $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \geq 3 \quad W^n = 0$.

   $V = W + 2I$, donc par la formule du binôme : $V^n = 2^{n-3}\begin{pmatrix} n^2+7n+8 & 4n & -n^2-7n \\ 4n & 8 & -4n \\ n^2+7n & 4n & -n^2-7n+8 \end{pmatrix}$.

4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^nX = X$. Donc $a_n = c_n = 1-(n^2-n-4)2^{n-2}$ et $b_n = -4-(n-4)2^n$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-(n^2-n-4)2^{n-2} & (n^2+7n-8)2^{n-3} & n2^{n-1} & -(n^2+7n)2^{n-3} \\ -4-(n-4)2^n & n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ 1-(n^2-n-4)2^{n-2} & (n^2+7n)2^{n-3} & n2^{n-1} & -(n^2+7n-8)2^{n-3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 (EM Lyon 2009 voies E et S)

Partie A

1) $(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, pour tout réel θ, R_θ est une racine carrée de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution.

Partie B

1) Utiliser un développement limité de $\sqrt{1+t}$ en 0.

2) $Q(X) = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} X$.

3) $R = I + \frac{1}{2} N - \frac{1}{8} N^2$. Utiliser l'égalité polynômiale du 2).

4) $A = I + N$ avec $N^3 = 0$. Donc $R = I + \frac{1}{2} N - \frac{1}{8} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie C

1) Utiliser $R = PSP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$.

2) $SD = (s_{i,j} d_{j,j})$ et $SD = (d_{i,i} s_{i,j})$, et si $i \neq j$, on a $d_{i,i} \neq d_{j,j}$, donc $s_{i,j} = 0$.

3) $S^2 = D$ ssi $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad s_{i,i} = \pm\sqrt{d_{i,i}}$, donc D a 2^n racines carrées.

4) $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P + 2I$, donc $P^{-1} = \frac{1}{2}(P - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ a 8 racines carrées $S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a = \pm 1$, $b = \pm 2$, $c = \pm 3$.

Les 8 racines carrées de A sont : $R = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ou $R = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

ou $R = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ou $R = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Partie D

1) et 2) $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Chercher S sous la forme $S = \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & c \\ t & d & e \end{pmatrix}$.

b) Utiliser $R = PSP^{-1}$ et ${}^tP = P$. On trouve $e = b - 2c + 2d$.

4) A a une infinité de racines carrées symétriques : $R = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ou $R = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ou $\exists \theta \in \mathbb{R} \quad R = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta & 2 + 2\cos\theta & 2 - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta \\ 2 + 2\cos\theta & 2 - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta & 2 - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \\ 2 - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta & 2 - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta & 2 + 2\cos\theta \end{pmatrix}$.