MATRICES

Exercice 1 (d'après ESLSCA 99)

On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$.

Partie A

1) Calculer les matrices A^2 et A^3.
2) Déterminer des réels a, b et c tels que $A^3=aA^2+bA+cI$.
3) En déduire que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
4) En déduire la résolution du système : $\begin{cases}x-z=2\\x+2y+z=8\\2x+2y+3z=13\end{cases}$.

Partie B

1) Montrer (par la méthode de Gauss) que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2) Calculer la matrice $B=P^{-1}AP$. En déduire B^n pour $n\in\mathbb{N}$.
3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=PB^nP^{-1}$.
4) En déduire la matrice A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Partie C

L'objectif de cette partie est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire qui vérifient : $AM=MA$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ contient la matrice nulle, les matrices I et A^{-1}, ainsi que toutes les puissances A^n de la matrice A pour $n\in\mathbb{N}^*$.
2) Montrer que si M et N sont deux matrices qui appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$, alors les matrices $M+N$ et MN appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$.
3) Montrer que si M est une matrice inversible qui appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$, alors son inverse M^{-1} appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.
4) Montrer qu'une matrice M appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ si et seulement si la matrice $M'=P^{-1}MP$ commute avec la matrice $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.
5) Démontrer que les seules matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.
6) En déduire la forme générale des matrices M qui appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$, $u_1=1$, $u_2=-1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+3}=5u_{n+2}-8u_{n+1}+4u_n$$

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&8\end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=AX_n$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.
3) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
4) Montrer que la matrice $T = P^{-1}AP$ se décompose en somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice J qui a un seul élément non nul.
5) En déduire T^n pour tout entier naturel n.
6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PT^nP^{-1}$.
7) En déduire A^n pour tout entier naturel n.
8) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

<u>Exercice 3 (d'après HEC 98 voie T)</u>

<u>Partie A : Dérivées successives d'une fonction *f*</u>

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$.

1) Calculer les dérivées d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction f.
2) Montrer par récurrence que pour tout entier $p \geq 1$, il existe des réels a_p, b_p et c_p tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(p)}(x) = (a_p x^2 + b_p x + c_p)e^{-x}$.
3) Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} en fonction de a_p, b_p et c_p pour tout entier $p \geq 1$.

<u>Partie B : Puissances d'une matrice</u>

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $J = A + I$, J^2 et J^3, puis J^p pour tout entier $p \geq 3$.
2) En déduire que : $\forall p \geq 2 \quad A^p = (-1)^p \left[I - pJ + \dfrac{p(p-1)}{2} J^2 \right]$.
3) En déduire la matrice A^p pour $p \geq 2$. La formule est-elle encore vraie pour $p = 1$?

<u>Partie C : Retour aux dérivées de *f*</u>

1) Montrer par récurrence que pour tout entier $p \geq 1$: $\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{pmatrix} = A^p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2) En déduire a_p, b_p et c_p, puis l'expression de $f^{(p)}(x)$ en fonction de p et de x.

<u>Exercice 4 (d'après Ecricome 2003 voie E)</u>

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Partie A : Inversion de la matrice *P*</u>

1) Calculer P^2 et P^3.
2) Démontrer qu'il existe des réels a, b et c tels que : $P^3 = aP^2 + bP + cI$.
3) En déduire que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
4) Vérifier le calcul de P^{-1} par la méthode de Jordan-Gauss.

<u>Partie B : Puissances de la matrice *A*</u>

1) Calculer la matrice $P^{-1}AP$.
2) Démontrer que T est somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice J qui n'a qu'un seul élément non nul.
3) En déduire la matrice T^n pour tout entier naturel n.

4) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PT^nP^{-1}$.
5) En déduire la matrice A^n pour tout entier naturel *n*.

Partie C : Commutant de la matrice *A*

On appelle commutant d'une matrice *A* l'ensemble des matrices *M* qui commutent avec la matrice *A* : $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.

1) Démontrer que si *M* et M' sont deux éléments de $\mathscr{C}(A)$, alors $M + M'$ et MM' appartiennent aussi à $\mathscr{C}(A)$.
2) Soit *M* une matrice carrée d'ordre 3 et $Q = P^{-1}MP$. Démontrer que $AM = MA$ si et seulement si $TQ = QT$.
3) Démontrer qu'une matrice *Q* carrée d'ordre 3 vérifie $TQ = QT$ si et seulement si il existe des réels *a*, *b* et *c* tels que : $Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
4) En déduire la forme générale des matrices *M* qui appartiennent à $\mathscr{C}(A)$.
5) En déduire qu'il existe trois matrices *K*, *L* et *N* que l'on précisera telles que :
$$\mathscr{C}(A) = \left\{ aK + bL + cN \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Exercice 5 (d'après Ecricome 99 voie S)

On définit les matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Soient *H* et H' deux matrices carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $A' = (a'_{i,j})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que leur produit s'écrit par blocs : $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ avec $C'' = C + AC'$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que : $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$.
3) On pose $W = V - 2I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer W^n et en déduire V^n.
4) On pose : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer MX, puis M^nX. En déduire a_n, b_n et c_n, puis l'expression de M^n.

Exercice 6 (EM Lyon 2009 voies E et S)

L'objectif du problème est d'étudier sur des cas particuliers et par diverses méthodes la notion de racine carrée d'une matrice.

Une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si $R^2 = A$.

Partie A

1) Soit θ un réel et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées.
2) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie B

1) Démontrer que : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-1-\frac{1}{2}t}{t^2} = -\dfrac{1}{8}$.
2) Démontrer qu'il existe un polynôme Q tel que : $1+X = \left(1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2\right)^2 + X^3Q(X)$.
3) En déduire une racine carrée de la matrice $I+N$ si N est une matrice telle que $N^3=0$ et I la matrice unité.
4) En déduire une racine carrée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie C

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont distincts et strictement positifs.

1) Démontrer qu'une matrice R est une racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.
2) Démontrer que si S est une racine carrée de D, alors $SD = DS$. En déduire que les racines carrées de D sont des matrices diagonales.
3) En déduire que A admet 2^n racines carrées (on ne demande pas de les calculer).
4) On considère les matrices : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 & 5 & -5 \\ 8 & 10 & -8 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer des réels a et b tels que $P^2 = aP + bI$.
   b) En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
   c) Démontrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   d) Déterminer les racines carrées de A.

Partie D

On considère maintenant la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ symétrique (car ${}^tA = A$).

On se propose de chercher les racines carrées de A qui sont symétriques.

1) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2) Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont les éléments sont positifs.

3) On admet le résultat de la partie **C** : « une matrice R est racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une matrice dont le carré est D et donc qui commute avec D ».
   a) En utilisant la relation $SD = DS$, montrer que la matrice S est de la forme $S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ où a, b, c, d et e sont des réels.
   b) Montrer que R est symétrique si et seulement si $P^2 S = ({}^tS)P^2$. En déduire e en fonction de b, c et d.
   c) En utilisant la relation $S^2 = D$, montrer que la matrice S est de la forme $S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$ ou $S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c-b & -b \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 + c^2 - bc = 1 \end{cases}$.
4) En déduire les racines carrées de A qui sont symétriques.