1. **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; donner les valeurs propres de l'endomorphisme u_A défini sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $u_A(M) = AM$. Est-il diagonalisable ?** *CCP* a0-023

   $\chi_A(X) = (-1-X)(3-X) = X^2 - 2X - 3$ et $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$.
   $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2M - 2AM - 3M = (u_A^2 - 2u_A - 3Id)(M) = 0$.
   $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u_A donc u_A est diagonalisable et $\mathrm{sp}(u_A) \subset \{-1, 3\}$.

2. **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.** *CCP* a0-019

   $\chi_A(X) = (1-X)^3$; A admet une seule valeur propre 1 et $A \neq I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.
   On cherche une réduite de Jordan.
   $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$ et $\dim E_1 = 1$ ou 2.
   $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} 3y + z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff V \in Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ donc $\dim E_1 = 1$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$ canoniquement associé à A.
   $u(V) = V_1 + V \iff \begin{cases} 3y + z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.
   $u(V) = V_2 + V \iff \begin{cases} 3y + z = 0 \\ 2y - 2z = 1/4 \\ 2y - 2z = 1/4 \end{cases}$. On choisit $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/32 \\ -3/32 \end{pmatrix}$.
   $\det(V_1, V_2, V_3) = -1/32 \neq 0$ donc on a obtenu une base dans laquelle la matrice de u est B.
   Calcul de A^n - Méthode 1 :
   $A = PBP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/32 \\ 0 & 1/4 & -3/32 \end{pmatrix}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$.
   $B = I_3 + C$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C^k = 0$ si $k \geq 3$ et I_3, C commutent donc :
   $\forall n \geq 2,\ B^n = I_3 + nC + \dfrac{n(n+1)}{2}C^2$ d'où $\forall n \geq 2,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n(n-1) & n(2-n) \\ 0 & 1+2n & -2n \\ 0 & 2n & 1-2n \end{pmatrix}$.
   Calcul de A^n - Méthode 2 :
   $(I_3 - A)^3 = 0$ et $\forall n \geq 2,\ X^n = (1-X)^3Q(X) + R(X)$ où $R(X)$ est le reste de la division euclidienne de X^n par $(1-X)^3$ donc $\forall n \geq 2,\ A^n = R(A)$.
   Soit $aX^2 + bX + c = R(X)$. 1 est racine triple de $X^n - R(X)$ donc $\begin{cases} 1 - R(1) = 1 - a - b - c = 0 \\ n - R'(1) = n - 2a - b = 0 \\ n(n-1) - R''(1) = n(n-1) - 2a = 0 \end{cases}$
   d'où a, b, c et le résultat.

3. **Soit u, v deux endomorphismes de E, $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie tels que u et v commutent. Prouver qu'il existe un vecteur propre commun à u et v.**

   u admet au moins une valeur propre λ (E est un $\mathbb{C}-$espace et la dimension est finie, supposée non nulle) ; soit F l'espace propre associé.
   u et v commutent donc F est stable par v : soit $w \in \mathscr{L}(F)$ induit par v.
   F est un $\mathbb{C}-$espace de dimension finie non nulle donc w admet au moins une valeur propre μ.
   Soit $x \in F$ un vecteur propre de w associé à μ. $x \neq 0,\ u(x) = \lambda x$ et $v(x) = \mu x$.

4. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. On définit**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (\mathrm{tr}A)M - (\mathrm{tr}M)A \end{array}$$

Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les éléments propres de f. a0-097

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $f^2(M) = (\mathrm{tr}A)((\mathrm{tr}A)M - (\mathrm{tr}M)A) - \mathrm{tr}((\mathrm{tr}A)M - (\mathrm{tr}M)A)A = (\mathrm{tr}A)^2M - (\mathrm{tr}A\mathrm{tr}M)A$.
$f^2(M) - \mathrm{tr}Af(M) = 0$ donc $P(X) = X^2 - \mathrm{tr}AX$ est annulateur de f.
Cas 1 : $\mathrm{tr}A \neq 0$. P est scindé à racines simples $(0, \mathrm{tr}A)$ donc f est diagonalisable.
$f(A) = 0$ donc $Vect(A) \subset E_0$ et 0 est au moins d'ordre 1.
Soit H l'hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices de trace nulle. $H \subset E_{\mathrm{tr}A}$ et $\mathrm{tr}A$ est au moins d'ordre $n^2 - 1$.
La somme des ordres de 0 et $\mathrm{tr}A$ est n donc $Vect(A) = E_0$, $H = E_{\mathrm{tr}A}$ et les ordres sont 1 et $n^2 - 1$.

5. **Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A^2 + 2A = O_6$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$. Déterminer χ_A.**

   $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de A donc $\mathrm{sp}(A) \subset \{0, 1, 2\}$ mais $A \in GL_6(\mathbb{R})$ donc $0 \notin \mathrm{sp}(A)$.
   Soit k_1, k_2 les ordres, éventuellement nuls de $1, 2$. $k_1.1 + k_2.2 = 8$ et $k_1 + k_2 = 6$ donc $k_1 = 4$ et $k_2 = 2$.

6. **Soit A une matrice de rang 1. Déterminer son polynôme caractéristique et ses éléments propres.**

   $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est de rang 1 donc 0 est valeur propre d'ordre $n - 1$ au moins.
   $\chi_A(X)$ est divisible par X^{n-1} donc $\chi_A(X) = (-1)^nX^n + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}AX^{n-1}$.
   Il existe $(B, C) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \times \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $A = BC$ et $\mathrm{tr}A = CB$.
   Cas 1 : $\mathrm{tr}A \neq 0$
   $\mathrm{tr}A$ est valeur propre d'ordre 1 et $AB = B(CB) = (\mathrm{tr})AB$ donc $Vect(B) = E_{\mathrm{tr}A}$.
   0 est valeur propre d'ordre $n - 1$ et l'hyperplan $CX = 0$ est inclus dans E_0 donc lui est égal ($\dim E_0 \leq$ordre (0)) et A est diagonalisable.
   Cas 2 : $\mathrm{tr}A = 0$
   0 est valeur propre d'ordre n et $A \neq 0$ (A est de rang 1) dans A n'est pas diagonalisable donc $\dim E_0 \leq n - 1$ donc E_0 est toujours l'hyperplan $CX = 0$.

---

7. *Prouver que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables. (L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$)*
8. *Soit $M \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Démontrer que M est diagonalisable.* a0-106
9. *Soit u, v, f trois endomorphismes de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tels qu'il existe $(\lambda, \mu) \in K^2$ tel que : $f = \lambda u + \mu v$, $\quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v$, $\quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$. Montrer que f est diagonalisable et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \lambda^n u + \mu^n v$.* a0-107
10. (a) *Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n. Calculer $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ B & I_n \end{pmatrix}$.*
    Démontrer que, pour toutes matrices carrées A et B, AB et BA ont même polynôme caractéristique.
    (b) *Dans cette question, on suppose seulement que $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*
    Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.
    On pourra utiliser une factorisation de A de la forme $A = UJ_rV$ où U et V sont inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. a0-102
11. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.*
    (a) *Démontrer que A est nilpotente si et seulement si $\chi_A(X) = (-X)^n$.*
    (b) *Exprimer le développement limité d'ordre $n + 1$ en $+\infty$ de $F(t) = \dfrac{\chi_A'(t)}{\chi_A(t)}$ au moyen des nombres $\mathrm{tr}(A^k)$.*
    (c) *Démontrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathrm{tr}(A^k) = 0$.*

    Centrale A0-144

---

12. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2b-ac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser M. *CCP* a0-017

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 = A + I_n$. Démontrer que $\det A > 0$. A0-105

14. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $X^2 = A$, puis $X^2 + X = A$.

    (b) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 - 3X = A$. Montrer que $AX = XA$.
    Résoudre l'équation $X^2 - 3X = A$.*CCP*

    (c) Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $X + X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*Centrale* A0-122

15. Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie et Φ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\Phi(v) = u \circ v$. Montrer que Φ est diagonalisable si et seulement si u l'est. Si u est diagonalisable, que dire de $\psi : v \mapsto u \circ v - v \circ u$? *Centrale* a0-033

16. $A = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

    Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} O_{nn} & A \\ I_n & O_{nn} \end{pmatrix}$, en fonction de celui de A. *CCP* a0-032

17. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, vérifiant $u^3 + u = 0$. Montrer que u est de rang pair. *CCP* a0-029

18. (a) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation $\displaystyle\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$ dans la base canonique.

    Montrer que H est stable par u si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

    (b) Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A0-104

19. Existe-t-il $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Généraliser. A10-132

20. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Démontrer : $\operatorname{tr}({}^tXA^{-1}X) = \dfrac{\det(A + X\,{}^tX)}{\det A} - 1$. A10-135

21. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & (0) \\ & & & & \\ (0) & & \ddots & & 1 \\ & & & n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.*Centrale* a0-145

22. Pour $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ donné, on considère la matrice M telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad m_{ni} = m_{in} = a_i \ ; \quad (i \neq n \text{ et } j \neq n) \Rightarrow m_{ij} = 0.$$

    Soit $\Delta_n(a_1, ..., a_n) = \chi_M(X)$.

    (a) Calculer $\Delta_n(a_1, ..., a_n)$. Etudier les valeurs propres de M et leur ordre.

    (b) Démontrer que $M = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (0) & & 2 \\ & & & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

    (c) Démontrer qu'il existe (λ_1, λ_2) tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ soit semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice de passage P telle que $\forall j \quad p_{1j} = 1$. A0-059