Chapitre 8. Fonctions de deux variables

Table des matières

1 Généralités

1.1 Un minimum de topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition 1 :La distance euclidienne entre deux couples de réels $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ est le nombre réel :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Remarque : Si on représente ces couples par des points du plan relativement à un repère orthonormal, cette distance est donnée par le théorème de Pythagore.

Propriétés : Pour tous couples A, B, C :
a) $d(A, B) = d(B, A)$ (la distance est symétrique).
b) $d(A, B) \geq 0$ et $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$.
c) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (Inégalité triangulaire)

Définition 2 : Soit A un couple de réls et r un réel strictement positif. La boule ouverte de centre A et de rayon r est l'ensemble des éléments M de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(A, M) < r$.
De même, la boule fermée de centre A et de rayon r est l'ensemble des éléments M de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(A, M) \leq r$.

Définition 3 : Un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ est une partie U de $\mathbb{R}^2$ telle que, pour tout point M de U, il existe une boule ouverte de centre M qui soit entièrement contenue dans U.

Exemples :
- Une boule ouverte est un ouvert.
- Le quart de plan E défini par : $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ est un ouvert.
- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

Définition 4 : Soit M un élément de $\mathbb{R}^2$. On appelle **voisinage** de M tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant M.
En particulier : Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un voisinage de chacun de ses points.

1.2 Ensemble de définition d'une fonction de deux variables.

On considère une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$:

$$f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

L'ensemble de définition de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des couples de réels tels que $f(x, y)$ existe.

Exemples :
a) Soit $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y + 1$: $D_f = \mathbb{R}^2$
b) Soit $f(x, y) = (\ln x)(\ln y)$: D_f est le quart de plan $U = \{(x, y)/x > 0, y > 0\}$. C'est un ouvert.
c) Soit $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: D_f est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
d) Soit $f(x, y) = e^{x+y} - x^2 y \ln(x^2 + y^2)$: $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

1.3 Représentation graphique.

On considère l'espace euclidien rapporté à un repère ortonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La représentation graphique d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de cet espace de coordonnées (x, y, z) tels que : $z = f(x, y)$.
Cette représentation graphique est une **surface** dans l'espace.
Exemples : Si $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, la surface représentative de la fonction f est la ***demi-sphère*** de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, avec $z \geq 0$.
Si $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y + 1$, la surface représentative de la fonction f est un plan de l'espace, d'équation $z = x + \frac{1}{2}y + 1$. Cette fonction est dite **affine**.

1.4 Fonctions partielles

Définition 5 : Soit f une fonction de deux variables. La **fonction partielle** f_x est définie par :

$$f_x : x \mapsto f(x,y)$$

(la variable y est alors considérée comme un paramètre).
De même la **fonction partielle** f_y est la fonction qui à tout réel y associe $f(x,y)$.
Ces fonctions partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on peut donc les étudier comme telles (dérivée, tableau de variation, limites...).

2 Limites et continuité

Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un ouvert$U$ de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un élément de U ou tel que toute boule centrée en M_0 ait une intersection non vide avec U. Alors :

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_0)} f(x,y) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad / \quad (d(M_0, M) < \alpha \quad et \quad M \in U) \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \epsilon$$

Remarque : Les opérations sur les limites ont les mêmes propriétés que pour les limites de fonctions d'une seule variable réelle.

Définition 7 : Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un élément de U. Alors f est continue en M_0 si et seulement si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Remarque : D'après les propriétés des opérations sur les limites on obtient :

- La somme, le produit, de deux fonctions continues en M_0 est continue en M_0.
- Si f et g sont deux fonctions continues en (x_0, y_0) et si $g(x_0, y_0) \neq 0$ la fonction quotient$\dfrac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0).
- Applications : les polynômes, les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Théorème 1 :

> Si f est continue en (x_0, y_0), les deux applications partielles $f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ et $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

Attention ! la réciproque de ce théorème est fausse.
Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq 0$, et $f(0,0) = 0$.
Les applications partielles $f_x : x \mapsto f(x,0)$ et $f_y : y \mapsto f(0,y)$ sont toutes deux constantes nulles sur $\mathbb{R}$, et en particulier elles sont continues en 0. Par contre f n'est pas continue en (0,0) puisque pour tout réel x non nul : $f(x,x) = \frac{1}{2}$.

3 Dérivées partielles

3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur un ouvert U et (x_0, y_0) un point de U.
• Si la fonction partielle $f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0), et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

• De même, si l'application partielle $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, on dit f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0, y_0) et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

• Si pour tout élément (x,y) de U f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x (resp. par rapport à y), on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x (resp. par rapport à y) sur U : de ce fait on définit deux nouvelles fonctions sur U, les **dérivées partielles** de f, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ou bien : f'_x et f'_y.

Définition 9 : Une fonction f est de classe C^1 en (x_0,y_0) (resp. sur un ouvert U) si ses deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en (x_0,y_0) (resp. sur U).

Exemple 1 : Soit $f(x,y)=x^2y+y^2+3x$ (f est une fonction polynôme en x et y, définie sur $\mathbb{R}^2$).
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+2y$.
Exemple 2 : Soit $f(x,y)=e^{x+y}+\ln(x-y)$. (Ici D_f est le demi-plan ouvert $\{(x,y)/x>y\}$).
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x+y}+\dfrac{1}{x-y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x+y}-\dfrac{1}{x-y}$.

3.2 Développement limité d'ordre 1

Théorème 2 :

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $M_0=(x_0,y_0)$ un point de U.
Il existe un voisinage V de M_0 tel que pour tout point $M=(x,y)$ de V :
$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+d(M_0,M)\epsilon(x,y)$
avec : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\epsilon(x,y)=0$.

Autrement dit, toute fonction de classe C^1 en (x_0,y_0) admet une approximation affine en ce point.
Autre écriture du développement limité :
$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\sqrt{h^2+k^2}\epsilon(h,k)$.

3.3 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 10 : Une fonction de classe C^1 sur un ouvert U admet des dérivées partielles d'ordre 2 en un point (x_0,y_0) de U (resp. sur U) si, et seulement si, ses deux dérivées partielles d'ordre 1 admettent elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et à y en (x_0,y_0) (resp. sur U). On note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)=f''_{x^2}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_o)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)=f''_{y^2}(x_0,y_0)$$

Théorème 3 :

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ dans un voisinage de $M_0=(x_0,y_0)$.
Si ces deux dérivées partielles sont continues en (x_0,y_0), alors elles sont égales en ce point.

Ce théorème est appelé théorème de Schwarz.

Définition 11 : Une fonction f est de classe C^2 en un point (x_0,y_0) (resp. sur un ouvert U) si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 toutes continues en (x_0,y_0) (resp. sur U).

Dans ce cas le théorème de Schwarz s'applique : l'ordre dans lequel on dérive, par rapport à x puis par rapport à y, ou l'inverse, n'a pas d'importance.

Notation de Monge : En un point donné (x_0, y_0), il est d'usage de noter, quand il n'y a pas d'ambigüité sur le point concerné :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

3.4 Développement limité d'ordre 2

Théorème 4 :

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de U.
Il existe un voisinage V de M_0 tel que pour tout point $M = (x_0 + h, y_0 + k)$ de V :
$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ph + qk + r\dfrac{h^2}{2} + shk + t\dfrac{k^2}{2} + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$
où ϵ est une fonction de deux variables de limite nulle en (0,0).

4 Extremums d'une fonction de deux variables

Définition 12 : La fonction f définie sur un ouvert U admet un **maximum local** (ou relatif) en un point (x_0, y_0) si il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que pour tout point (x, y) de V, $\quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. De même, f admet un **minimum local** au point (x_0, y_0) si il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que pour tout point (x, y) de V, $\quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Exemple : Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Pour tout couple de réels (x, y), $f(x, y) \geq 0$, et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad et \quad y = 0$.
Donc f admet un minimum au point (0,0). (Ici c'est même un minimum global, ou absolu.)

Définition 13 : un point (x_0, y_0) où les deux dérivées partielles d'ordre 1 de f sont égales à 0 est appelé un **point critique** de f.

Théorème 5 :

Si une fonction f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local au point (x_0, y_0), ce point est un point critique de f.

En effet si f admet un minimum (resp. un maximum) en (x_0, y_0), f étant de classe C^2 au voisinage de ce point, les *fonctions partielles* $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ admettent aussi un minimum (resp. un maximum) respectivement en x_0 et en y_0, par conséquent leurs dérivées, c'est-à-dire les dérivées partielles d'ordre 1 de f, s'annulent en (x_0, y_0).
Examinons à présent la réciproque :
Soit (x_0, y_0) un point critique de f, alors le développement limité de f au voisinage de ce point s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = r\frac{h^2}{2} + shk + t\frac{k^2}{2} + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

en utilisant les notations de Monge.
Cette différence sera donc du signe de $r\dfrac{h^2}{2} + shk + t\dfrac{k^2}{2}$, pour h et k assez petits.
Posons $Q(h, k) = r\dfrac{h^2}{2} + shk + t\dfrac{k^2}{2} = \dfrac{k^2}{2}\left(r\left(\dfrac{h}{k}\right)^2 + 2s\dfrac{h}{k} + t\right)$
Le signe de $Q(h, k)$ est celui du trinôme $rX^2 + 2sX + t$.
Son discriminant réduit est : $\Delta = s^2 - rt$. Si ce discriminant est strictement négatif, le trinôme n'a pas de racine et reste du signe de r sur $\mathbb{R}$.
On peut en déduire que le signe de la différence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ est constant dans un voisinage de (x_0, y_0).
Si Δ est strictement positif, le trinôme $rX^2 + 2X + t$ change de signe sur $\mathbb{R}$, donc l'expression $Q(h, k)$ change de

signe au voisinage de $(0,0)$, donc la différence $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ change de signe dans un voisinage de (x_0,y_0). D'où le théorème :

Théorème 6 :

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert U
et soit (x_0,y_0) un point de U tel que $p=q=0$.
• Si $rt-s^2>0$ f admet un extremum en ce point, un minimum si $r>0$, un maximum si $r<0$.
• Si $rt-s^2<0$ il n'y a pas d'extremum en ce point.
• Si $rt-s^2=0$, on ne peut pas conclure par cette méthode :
il faut alors faire une étude du signe de $f(x,y)-f(x_0,y_0)$.

Conclusion : pour chercher les extremums éventuels d'une fonction f de deux variables, sur un ouvert U :

- Chercher les points critiques de f, ce qui revient à résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

- Pour chacun des points trouvés, calculer $rt-s^2$, et conclure à l'aide du théorème 6.

Exemple : Soit $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$.

Ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+3y^2-15$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy-12$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x$

On cherche d'abord les points critiques en résolvant le système $p=q=0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x^2+3y^2-15 & = & 0 \\ 6xy-12 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{2}{x} \\ x^2+\dfrac{4}{x^2}-5 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{2}{x} \\ x^4-5x^2+4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{2}{x} \\ x^2 & = & 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{2}{x} \\ x^2 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -2 \end{array}\right. \text{ ou} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & -1 \end{array}\right.$$

On a donc 4 points critiques : $A=(1,2), \quad B=(-1,-2), \quad C=(2,1), \quad D=(-2,-1)$.

Pour chacun d'entre eux calculons $rt-s^2$:
• Pour A et pour B : $rt-s^2=36(1-4)<0$: f n'admet pas d'extremum en ces points.
• Pour C : $rt-s^2=108>0$ et $r>0$: la fonction f admet un minimum local au point $(2,1)$, et ce minimum vaut $f(2,1)=-28$.
• Pour D : $rt-s^2=108>0$ et $r<0$: la fonction f admet un maximum local au point $(-2,-1)$, et ce minimum vaut $f(-2,-1)=28$.