Chapitre 10. Problèmes de convergence et approximations en probabilité

Table des matières

On considère des suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où les variables X_n sont définies sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, c'est-à-dire concernent le résultat d'une suite d'expériences aléatoires toutes du même type.
On étudiera dans ce chapitre deux types de convergence de telles suites, en probabilité et en loi.

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1.1 Inégalité de Markov

Rappel : • Si X est une variable aléatoire à ensemble de valeurs discret, $X(\Omega) = \{x_i / \, i \in I\}$,
alors $\quad E(X) = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)$

• Si X est une variable aléatoire absolument continue, de densité f, $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

Théorème 1 :

> Soit X une variable aléatoire à **valeurs positives**, d'espérance m non nulle.
> Alors : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \qquad P(X \geq \lambda m) \leq \dfrac{1}{\lambda}$

dém :
• **Premier cas** : X discrète. On a alors : $P(X \geq \lambda m) = \sum_{i/x_i \geq \lambda m} P(X = x_i)$

D'autre part : $m = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i) = \sum_{i/x_i<\lambda m} x_i P(X = x_i) + \sum_{i/x_i\geq\lambda m} x_i P(X = x_i)$

d'où $m \geq \sum_{i/x_i\geq\lambda m} x_i P(X = x_i) \geq \lambda m \sum_{i/x_i\geq\lambda m} P(X = x_i)$

On en déduit : $\quad m \geq \lambda m P(X \geq \lambda m)$, c'est-à-dire : $\quad \dfrac{1}{\lambda} \geq P(X \geq \lambda m)$

• **Deuxième cas** : X absolument continue, de densité f. Alors : $P(X \geq \lambda m) = \int_{\lambda m}^{+\infty} f(t)dt$

Ici : $\quad m = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{\lambda m} tf(t)dt + \int_{\lambda m}^{+\infty} tf(t)dt \geq \int_{\lambda m}^{+\infty} tf(t)dt$
or pour tout réel t de $[\lambda m, +\infty[$, $\quad tf(t) \geq \lambda m f(t)$, donc :
$m \geq \lambda m \int_{\lambda m}^{+\infty} f(t)dt$, c'est-à-dire $\quad m \geq \lambda m P(X \geq \lambda m)$.

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 :

> Soit Y une variable aléatoire , d'espérance $E(Y)$, de variance $V(Y)$ non nulle.
> Alors : $\quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*} \qquad P(|Y - E(Y)| \geq \epsilon) \leq \dfrac{V(Y)}{\epsilon^2}$

dém : Posons $X = (Y - E(Y))^2$. Alors X est à valeurs positives, et $E(X) = V(Y)$.
L'inégalité de Markov appliquée à X donne, pour tout réel λ strictement positif :

$$P((Y - E(Y))^2 \geq \lambda V(Y)) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Prenons $\lambda = \dfrac{\epsilon^2}{V(Y)}$, on obtient $\quad P((Y - E(Y))^2 \geq \epsilon^2) \leq \dfrac{V(Y)}{\epsilon^2}$
or $\quad (Y - E(Y))^2 \geq \epsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad |Y - E(Y)| \geq \epsilon$.
On a donc bien l'inégalité du théorème 2.

Remarque : On peut écrire ce théorème avec des inégalités strictes, ou sous d'autres formes.
Posons $V(Y) = \sigma^2$.
$P(|Y - E(Y) > \epsilon) < \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(|Y - E(Y) > \epsilon) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(|Y - E(Y) \leq \epsilon) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

Exemple 1 : Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.
$P(|Y-m| \geq \epsilon) = 1-P((|Y-m| < \epsilon) = 1-P(m-\epsilon < Y < m+\epsilon) = 1-\left[\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\epsilon}{\sigma}\right)\right] = 2\left(1-\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)\right)$
Prenons par exemple le cas où : $\epsilon = 4, \quad \sigma = 2,5$. Alors $\frac{\epsilon}{\sigma} = 1,6$ et $\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) = 0,9452$
Donc dans ce cas $P(|Y-m| \geq \epsilon) = 0,1096$.
Comparons avec la majoration obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = 0,3906$. C'est bien un majorant de la probabilité calculée.

Exemple 2 : Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(20, \frac{1}{2})$. Alors $\sigma = \sqrt{5}$ et $E(Y) = 10$.
Prenons par exemple $\epsilon = 3$:

$$\begin{aligned}
P(|Y-10| \geq 3) &= 1-P(7 < Y < 13) \\
&= 1-\sum_{k=8}^{12} P(Y=k) \\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \sum_{k=8}^{12} \binom{20}{k} \\
&= 1-0,7368 = 0,2632
\end{aligned}$$

Or $\left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\right) = \frac{5}{9} = 0,555$
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est donc vérifiée.

Exemple 3 : Soit un dé équilibré : la probabilité d'obtenir 1 est $\frac{1}{6}$.
Combien de lancers faut-il effectuer pour qu'il y ait 95% de chances que la fréquence de 1 soit égale à $\frac{1}{6}$, à 10^{-2} près ?

Si X est le nombre de lancers, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$. Soit $F_n = \frac{X}{n}$ la fréquence d'apparition du 1 sur n lancers. Alors $E(F_n) = \frac{1}{6}$ et $V(F_n) = \frac{5}{36n}$.
D'après l'inégalité de B.T. on a : $P\left(|F_n - E(F_n)| > \frac{1}{100}\right) < \frac{V(F_n)}{10^{-4}}$, soit :
$1-P\left(|F_n - E(F_n)| > \frac{1}{100}\right) > 1-\frac{50000}{36n}$, c'est-à-dire $P\left(|F_n - E(F_n)| < \frac{1}{100}\right) > 1-\frac{50000}{36n}$
Or on cherche n tel que $P\left(|F_n - E(F_n)| < \frac{1}{100}\right) > 0,95$.
Il suffit de prendre n tel que : $1-\frac{50000}{36n} > 0,95$, c'est-à-dire : $\frac{50000}{36n} < 0,05$, ce qui donne : $n > 277778$.

Remarque : La majoration obtenue avec cette inégalité est souvent trop large, par contre elle est universelle. Dans certains problèmes il s'agit d'améliorer cette inégalité, c'est-à-dire de trouver un majorant plus petit de la probabilité en question, dans le cas de variables aléatoires d'un type particulier.

1.3 Loi faible des grands nombres

Définition 1 : Une suite (X_n) de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable X si, et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Dans le cas général, il est difficile d'évaluer $P(|X_n - X| > \epsilon)$, et par conséquent sa limite. Par contre lorsque X est une variable aléatoire certaine de valeur C, on a :
$P(|X_n - X| > \epsilon) = P(|X_n - C| > \epsilon) = 1-P(C-\epsilon < X_n < C+\epsilon)$
Le cas intéressant est celui d'une suite de variables X_n toutes de même espérance m. On étudie alors la convergence en probabilité de cette suite vers la variable certaine de valeur m.

Théorème 3 :

> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes,
> de même espérance m et de même écart-type σ
> On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \dfrac{S_n}{n}$ (moyenne des n premières X_i).
> Alors la suite $\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine de valeur m.

Ce théorème est appelé **loi faible des grands nombres**.
dém : Pour appliquer l'inégalité de B. T. à la variable $\overline{X}_n$, on calcule son espérance et sa variance.
$E(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nm$, d'où $\quad E(\overline{X}_n) = E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}E(S_n) = m$
$V(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$, car les variables X_i sont indépendantes 2 à 2,
d'où $\quad V(\overline{X}_n) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
D'après l'inégalité de B. T., $\forall \epsilon > 0 \qquad P(|\overline{X}_n - m| \geq \epsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$
donc d'après le théorème "des gendarmes", une probabilité étant un nombre positif,

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} P(|\overline{X}_n - m| \geq \epsilon) = 0$$

d'où le résultat.

Cas d'une suite de variables de Bernoulli
Si les variables X_i suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, tout en conservant l'hypoyhèse d'indépendance, la variable S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p : elle représente le nombre de "succès" sur n tentatives d'un événement de probabilité p. On peut dire alors que $\overline{X}_n$ représente la **fréquence** du succès sur n tentatives, et la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers la variable certaine de valeur p.
On peut préciser ce fait avec le ***Théorème d'or de Bernoulli*** :

Théorème 3bis :

> Dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes,
> telles que la probabilité du succès est p, la fréquence $\overline{X}_n$ vérifie :
> $\forall \epsilon > 0 \qquad P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\epsilon^2}$
> et la suite $\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine de valeur p.

Ce théorème justifie le fait que l'on peut avoir une valeur approchée de la **probabilité** du succès, en prenant la **fréquence** du succès sur un grand nombre de tentatives. Par exemple, pour voir si une pièce est équilibrée, on la lance un grand nombre de fois, et la fréquence de "pile" doit être proche de $\dfrac{1}{2}$.
Voir aussi l'exemple 3 du paragraphe précédent.

dém : En reprenant la démonstration du théorème précédent, il suffit de montrer que $\sigma^2 \leq \dfrac{1}{4}$.
Or dans le cas d'une variable de Bernoulli de paramètre p, $\sigma^2 = p(1-p)$.
Posons $f(x) = x(1-x) = x - x^2$, et étudions cette fonction sur l'intervalle $[0, 1]$.
$f'(x) = 1 - 2x$: en représentant le tableau de variation de f sur $[0, 1]$, on voit que f admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $\dfrac{1}{4}$.
On a donc bien : $\quad \forall p \in [0, 1] \qquad p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$.

2 Convergence en loi

2.1 Généralités

Définition 2 : Soit une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, et F_n la fonction de répartition de X_n, pour tout entier n.
Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F.

La suite (X_n) converge en loi vers la variable X si et seulement si en tout réel x pour lequel F est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

Exemple : Soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}\right)$: alors $P(X_n = \frac{k}{n}) = \frac{1}{n}$.
Pour tout réel x de $[0,1]$, $\quad F_n(x) = \sum\limits_{\frac{k}{n}\leq x} \frac{1}{n} = \sum\limits_{k\leq nx} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}[nx]$, où $[y]$ désigne la partie entière de y, pour tout réel y.
Or on sait que $\quad [nx] \leq nx < [nx]+1$, d'où $\quad nx - 1 < [nx] \leq nx$, et par conséquent $\quad x - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}[nx] \leq x$
D'après le théorème des gendarmes on a donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[nx] = x$
c'est-à-dire : $\quad \forall x \in [0,1] \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = x$
Soit $F(x) = x$ sur [0,1], et $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1$ si $x > 1$. Alors F est la fonction de répartition d'une variable X suivant une loi uniforme sur [0,1] :
La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Théorème 4 : La suite (X_n) converge en loi vers X si, et seulement si, avec les notations précédentes, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que F soit continue en a et en b,
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b)$.

En effet : $P(a < X_n \leq b) = F_n(b) - F_n(a)$, or si (X_n) converge en loi vers X de fonction de répartition F, $\lim\limits_{n\to+\infty}(F_n(b) - F_n(a)) = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)$.
On admettra la réciproque.

Cas des variables discrètes à valeurs entières :
Si X_n, pour tout entier n, et X sont des variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$), F_n et F sont des fonctions continues sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. En effet ce sont des fonctions en escalier, c'est-à-dire constantes par intervalles, donc continues sur chaque intervalle $]k, k+1[$.
En particulier, chacune de ces fonctions de répartition est continue aux points $k + \frac{1}{2}$ (ou $k - \frac{1}{2}$). D'autre part, comme k est la seule valeur possible pour X dans l'intervalle $\left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$,
$P(X = k) = P\left(k - \frac{1}{2} < X \leq k + \frac{1}{2}\right) = F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F\left(k - \frac{1}{2}\right)$, et de même pour les variables X_n.
La convergence en loi de la suite (X_n) vers X entraîne donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(k - \frac{1}{2} < X_n \leq k + \frac{1}{2}\right) = P\left(k - \frac{1}{2} < X \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$
On admettra la réciproque, ce qui donne le théorème :

Théorème 5 : Soit (X_n) une suite de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) et X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La suite (X_n) converge en loi vers X si, et seulement si,
$\forall k \in X(\Omega) \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

2.2 Convergence en loi d'une suite de variables hypergéométriques vers une variable binomiale

Théorème 6 : Soit $X_N \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$, pour tout entier N tel que Np soit un entier.
(On note $J = \{N / Np \in \mathbb{N}\}$). La suite $(X_N)_{N\in J}$ converge en loi
vers une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

dém : Il s'agit de montrer que, pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$,

$$\lim_{N\to+\infty} P(X_N=k)=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Posons $M=Np$.

$$P(X_N=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{M!(N-M)!n!(N-n)!}{k!(M-k)!(n-k)!(N-M-n+k)!N!}$$

D'où : $P(X_N=k)=\binom{n}{k}\dfrac{M(M-1)(M-2)\dots(M-k+1)(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+k+1)}{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)(N-k)(N-k-1)\dots(N-n+1)}$

$$=\binom{n}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{M-i}{N-i}\prod_{j=0}^{n-k-1}\frac{N-M-j}{N-k-j}$$

Or pour chaque entier i entre 0 et $k-1$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{M-i}{N-i}=\lim_{N\to+\infty}\frac{p-\frac{i}{N}}{1-\frac{i}{N}}=p$

et pour tout entier j entre 0 et $n-k-1$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{N-M-j}{N-k-j}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1-p-\frac{j}{N}}{1-\frac{k}{N}-\frac{j}{N}}=1-p$

donc : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}P(X_N=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Ce théorème justifie le fait que pour N "assez grand", on fasse l'approximation de la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p par une loi binomiale de paramètres n et p.
En pratique : On fait cette approximation à partir de $N>10n$.

2.3 Convergence en loi d'une suite de variables binomiales vers une variable de Poisson

Théorème 7 : Soit $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p_n)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}np_n=\lambda$ (ou : $p_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\lambda}{n}$). La suite $(X_n)_{N\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$

Dém : $P(X_n=k)=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1)\left(\dfrac{np_n}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{np_n}{n}\right)^{n-k}$

Posons $np_n=\lambda_n$, et on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=\lambda$.

$$P(X_n=k)=\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}\lambda_n^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\frac{1}{(1-\frac{\lambda_n}{n})^k}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n-i}{n}=1$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}=1$ (car le nombre de facteurs de ce produit est *fixe.*)

De même comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1-\frac{\lambda_n}{n}=1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^k=1$, et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n^k=\lambda^k$.

D'autre part : $\left(1-\dfrac{\lambda_n}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)}$, et $n\ln\left(1-\dfrac{\lambda_n}{n}\right)=-\lambda_n\dfrac{\ln\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)}{-\frac{\lambda_n}{n}}$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}-\frac{\lambda_n}{n}=0$, on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}(-\lambda_n)=\lambda$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$

et par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n=k)=\frac{1}{k!}\lambda^ke^{-\lambda}$

Ce théorème justifie que, pour p "petit" et n "grand", on peut faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
En pratique : On peut faire cette approximation lorsque $p<0,1$, $n\geq30$, et $np<15$.

2.4 Théorème de la limite centrée

Théorème 8 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ.
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\quad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$, $\quad Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Alors la suite (Z_n) converge en loi vers une variable $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On sait que $E(S_n) = nm$, $E(\overline{X}_n) = m$, $V(S_n) = n\sigma^2$, $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.
On remarque que $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{S_n}{n} - m}{\frac{\sigma\sqrt{n}}{n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.
Z_n est donc la variable centrée réduite associée à la fois à S_n et à $\overline{X}_n$.
Le théorème (admis) énonce la convergence de cette suite de variables centrées réduites vers une variable **normale** centrée réduite.
Conséquence : Pour n assez grand, la loi de Z_n peut être approchée par une loi normale centrée réduite, donc on peut considérer que la fonction de répartition Φ_n de Z_n est proche de la fonction Φ :
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(Z_n \leq x) \approx \Phi(x)$, c'est-à-dire : $P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$
Par conséquent : $P(S_n \leq y) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$
donc la loi de S_n peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.
Les paramètres de cette loi normale sont respectivement l'espérance et la variance de S_n.
De même, $P(\overline{X}_n \leq x) = P\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{x - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
donc la loi de $\overline{X}_n$ peutêtre approchée par une loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$.

En résumé : La **somme** de n variables indépendantes et de même loi peut-être approchée, pour n assez grand, par une variable de loi normale, dont les paramètres sont l'espérance et la variance de cette somme.
La **moyenne** de n variables indépendantes et de même loi peut être approchée, pour n assez grand, par une variable de loi normale, dont les paramètres sont l'espérance et la variance de cette moyenne.

Applications :

1. **Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.**
   Si les variables X_i sont des variables de Bernoulli de paramètre p, indépendantes, leur somme S_n suit une loi binomiale de paramètre n et p, d'espérance np, de variance npq, avec $q = 1 - p$. L'application du théorème de la limite centrée à la suite (S_n) donne :

   Théorème 9 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Pour n assez grand la loi de X peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$

   En pratique : cette approximation se fait dès que $n > 20$, avec un paramètre p "moyen".

2. **Loi de la fréquence du succès.**
   De même, avec les mêmes notations, la variable $F_n = \frac{S_n}{n}$ qui donne la fréquence du succès d'un événement E de probabilité p sur n tirages identiques et indépendants est la moyenne $\overline{X}_n$ des n variables de Bernoulli $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
   Le théorème de la limite centrée donne alors :

   Théorème 10 : Soit F la fréquence du succès d'un événement E de probabilité p sur n tirages identiques et indépendants. Pour n assez grand la loi de F peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(p, \frac{pq}{n})$

3. **Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale.**
Si les variables X_n de la suite initiale suivent toutes une loi de Poisson de paramètre p, et si elles sont indépendantes, leur somme S_n suit une loi de Poisson de paramètre np. L'espérance et la variance de S_n sont toutes deux égales à np. D'après le théorème de la limite centrée, la suite de terme général $\dfrac{S_n - np}{\sqrt{np}}$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite, ce qui permet l'approximation suivante :

Théorème 11 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. La loi de X peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$

En pratique : on peut faire cette approximation à partir de $\lambda > 15$.

2.5 Correction de continuité

Dans le paragraphe précédent, on fait l'approximation de variables discrètes par des variables absolument continues.
Or, si X est une variable à densité, $P(X = k) = 0$, ce qui n'est pas le cas pour une variable discrète.
Par exemple, si on fait l'approximation de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40, \frac{1}{2})$ par $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(20, 10)$, on aura, pour tout entier k entre 0 et 40, $P(Y = k) = 0$, ce qui ne correspond pas à une bonne approximation !
Pour remédier à cela, on considère une partition de l'intervalle $[0, n]$ (ici $n = 40$), qui peut être considéré comme l'ensemble de valeurs de Y, sachant que la probabilité que Y soit en dehors de cet intervalle est quasi-nulle.
$[0,n] = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[\cup \ldots \cup \left[n - \frac{1}{2}, n\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right[\right) \cup \left[n - \frac{1}{2}, n\right]$
Remarque : pour simplifier on peut considérer la partition : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right[$ qui ne change de la précédente que pour des intervalles pour lesquels les probabilités sont tout-à-fait négligeables.

On peut alors écrire : $P(X = k) = P\left(k - \frac{1}{2} \leq X < k + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(k - \frac{1}{2} \leq Y < k + \frac{1}{2}\right) = F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F(k - \frac{1}{2})$
où F est la fonction de répartition de Y.
En reprenant l'exemple précédent on trouve par exemple :
$P(X = 20) \approx P(19,5 \leq Y < 20,5) = \Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(-\frac{0,5}{\sqrt{10}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,5}{\sqrt{10}}\right) - 1 = 2\Phi(0,158) - 1 \approx 0,126$
Or le calcul direct donne : $P(X = 20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} \approx 0,1254$
De même : $P(17 \leq X < 25) = \displaystyle\sum_{k=17}^{24} P(X = k) \approx \sum_{k=17}^{24} P\left(k - \frac{1}{2} \leq Y < k + \frac{1}{2}\right) = P(16,5 < Y < 24,5)$
$P(17 \leq X < 25) \approx \Phi\left(\frac{24,5 - 20}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{16,5 - 20}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(1,42) - \Phi(-1,11) = 0,9222 + 0,8665 - 1 = 0,7887$

On peut appliquer cette correction de continuité à chaque fois que l'on fait une approximation d'une variable discrète à valeurs entières par une variable absolument continue.
Toutefois cette correction est d'un effet négligeable lorsque n est très grand, dans le cas de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale.
Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1000, \frac{3}{4})$, on a alors $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(750; 187,5)$ et on aura, par exemple :

$$P(700 \leq X \leq 800) \approx P(700 \leq Y \leq 800) = 2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{187,5}}\right) - 1$$

(calcul à terminer !)