APPLICATIONS LINEAIRES

I – Applications linéaires

1) Définitions et premières propriétés

L'enjeu est de déterminer des applications qui transportent la structure d'espace vectoriel. La notion « clé » des espaces vectoriels est la notion de combinaison linéaire. Ce sont donc les applications qui conservent cette notion.

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.
Une application de E dans F est une application linéaire (ou homomorphisme) si : $\forall (u,v)\in E^2 \quad f(u+v)=f(u)+f(v)$ et $\forall \alpha\in K \quad \forall u\in E \quad f(\alpha u)=\alpha f(u)$.
Ceci équivaut à : $\forall \alpha\in K \quad \forall (u,v)\in E^2 \quad f(\alpha u+v)=\alpha f(u)+f(v)$.

Exemple 1 : L'application f qui à tout vecteur $u=(x,y)$ de $E=\mathbb{R}^2$ associe le vecteur $f(u)=(x+y,x-y,2x+3y)$ de $F=\mathbb{R}^3$ est linéaire. En effet, pour tous réels α et tous vecteurs $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$, on a :

- D'une part $f(u)=(x+y,x-y,2x+3y)$ et $f(v)=(x'+y',x'-y',2x'+3y')$, donc : $\alpha f(u)+f(v)=\alpha(x+y,x-y,2x+3y)+(x'+y',x'-y',2x'+3y')$, donc : $\alpha f(u)+f(v)=(\alpha x+\alpha y+x'+y',\alpha x-\alpha y+x'-y',2\alpha x+3\alpha y+2x'+3y')$
- D'autre part $\alpha u+v=\alpha(x,y)+(x',y')=(\alpha x+x',\alpha y+y')=(X,Y)$, donc :
  $f(\alpha u+v)=(X+Y,X-Y,2X+3Y)$
  $f(\alpha u+v)=(\alpha x+x'+\alpha y+y',\alpha x+x'-\alpha y-y',2\alpha x+2x'+3\alpha y+3y')$

Donc $\forall \alpha\in\mathbb{R} \ \forall (u,v)\in E^2 \quad f(\alpha u+v)=\alpha f(u)+f(v)$.

Donc f est une application linéaire de $E=\mathbb{R}^2$ dans $F=\mathbb{R}^3$.

Exemple 2 : L'application f qui à tout polynôme P de $E=\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $f(P)=P'$ de $F=\mathbb{R}[X]$ est linéaire. En effet, pour tous réels α, et tous polynômes P et Q : $f(\alpha P+Q)=(\alpha P+Q)'=\alpha P'+Q'=\alpha f(P)+f(Q)$.

Théorème : Si f est une application linéaire de E dans F, alors $f(0_E)=0_F$.

Démonstration : Il suffit par exemple de prendre $\alpha=0$, u étant quelconque.
$f(0_E)=f(0u)=0f(u)=0_F$.

Théorème : Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

$$\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n \quad \forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n \quad f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k\right)=\sum_{k=1}^n \alpha_k f(u_k).$$

Démonstration : Récurrence évidente.

Définitions : On appelle :
- endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E.
- isomorphisme de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F.
- automorphisme de E toute application linéaire bijective de E dans E.

Par exemple, la dérivation est un endomorphisme de $E=\mathbb{R}[X]$.

2) Matrice d'une application linéaire en dimension finie

Supposons que E et F soient deux espaces vectoriels de dimension finie :
- E est de dimension p et de base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$.
- F est de dimension n et de base $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$.

Soit f une application linéaire de E dans F.

Tout vecteur u de E a des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$: $u = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$.

Donc, puisque f est linéaire : $f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$.

Donc l'application f est entièrement connue lorsque l'on connaît tous les vecteurs $f(e_j)$ images par f des vecteurs de la base $\mathscr{B}$.

Or ces vecteurs sont des vecteurs de F, qui sont déterminés par leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$: $\forall j \in \{1,...p\} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i$.

<u>Définition</u> : Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E de base $\mathscr{B} = (e_1,...,e_p)$ dans un espace vectoriel F de base $\mathscr{B}' = (e'_1,...,e'_n)$, on appelle matrice de f est la matrice $A = (a_{i,j})$ à n lignes et p colonnes dont les colonnes sont les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.
Si f est un endomorphisme de E, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ correspond au cas précédent pour $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$.

<u>Exemple</u> : On a vu que l'application f qui à tout vecteur $u = (x, y)$ de $E = \mathbb{R}^2$ associe le vecteur $f(u) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$ de $F = \mathbb{R}^3$ est linéaire.

Si on considère les bases canoniques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$:
$e_1 = (1,0)$, donc : $f(e_1) = (1,1,2) = e'_1 + e'_2 + 2e'_3$.
$e_2 = (0,1)$, donc : $f(e_2) = (1,-1,3) = e'_1 - e'_2 + 3e'_3$.

Donc la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ pour les deux bases canoniques.

<u>Remarque</u> : Bien entendu, si l'on change l'une des deux bases, on change la matrice.

<u>Exemple</u> : On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^2$ qui à tout $u = (x, y)$ associe le vecteur $v = (x + y, x - y)$ de E.

Dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$, la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $u_1 = (3,1)$ et $u_2 = (5,2)$ forment une base $\mathscr{B}$ de E.
On détermine $f(u_1) = (4,2)$ et $f(u_2) = (7,3)$.
Pour avoir la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}$, il faut déterminer les coordonnées de $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans la base $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$:

$f(u_1) = \alpha u_1 + \beta u_2$ ssi $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 4 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$ donc ssi $\alpha = -2$ et $\beta = 2$. Donc $f(u_1) = -2u_1 + 2u_2$.

$f(u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$ ssi $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 7 \\ \alpha + 2\beta = 3 \end{cases}$ donc ssi $\alpha = -1$ et $\beta = 2$. Donc $f(u_2) = -u_1 + 2u_2$.

Donc la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

De plus, en reprenant les calculs précédents, si $u=\sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ alors :

$$f(u)=\sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{p} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) e'_i$$

Donc les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathscr{B}'$ sont : $y_i=\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$.

A tout vecteur $u=\sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ de E, on peut associer la matrice colonne $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Au vecteur $f(u)=\sum_{i=1}^{n} y_i e'_i$ de F, on peut associer la matrice colonne $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

L'égalité $\forall i\in\{1,...,n\} \quad y_i=\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$ se traduit par l'égalité matricielle : $Y=AX$.

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de matrice A d'un espace vectoriel E de base $\mathscr{B}=(e_1,...,e_p)$ dans un espace vectoriel F de base $\mathscr{B}'=(e'_1,...,e'_n)$, alors tout vecteur u de matrice X dans $\mathscr{B}$ a pour image le vecteur $f(u)$ de matrice $Y=AX$ dans $\mathscr{B}'$.

<u>Exemple 1</u> : Supposons que f soit un endomorphisme de $E=\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors si $u=(x,y,z)$, son image $f(u)$ a pour matrice $Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x+3y+z \\ 3x-2y+z \end{pmatrix}$.

Donc $f(u)=(x-y+z, 2x+3y+z, 3x-2y+z)$

<u>Exemple 2</u> : Soit f l'application de $E=\mathbb{R}^3$ dans $E=\mathbb{R}^3$ qui à $u=(x,y,z)$ associe le vecteur $f(u)=(x',y',z')$ avec $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=x+z \\ z'=y+z \end{cases}$. Alors : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On démontre ainsi facilement que f est linéaire.

En effet, si u a pour matrice X_1 et v pour matrice X_2, alors $f(u)$ a pour matrice $Y_1=AX_1$ et $f(v)$ a pour matrice $Y_2=AX_2$.

Or $\alpha u+v$ a pour matrice $X=\alpha X_1+X_2$. Donc $f(\alpha u+v)$ a pour matrice $Y=AX=A(\alpha X_1+X_2)=\alpha AX_1+AX_2=\alpha Y_1+Y_2$. Donc $f(\alpha u+v)=\alpha f(u)+f(v)$.

Cela revient à dire que, pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(K)$, l'application $X\mapsto AX$ est linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(K)$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(K)$.

3) <u>Images de sous-espaces vectoriels</u>

E et F désignent deux espaces vectoriels.

<u>Rappel</u> : On appelle image par f d'une partie A de E l'ensemble de toutes les images des éléments de cette partie : $f(A)=\{f(u)/u\in A\}$.

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, alors l'image par f d'un sous-espace vectoriel E' de E est un sous-espace vectoriel de F.

<u>Démonstration</u> : Soit E' un sous-espace vectoriel de E.
Par définition : $v \in f(E') \Leftrightarrow \exists u \in E' \quad v = f(u)$.

- $f(E') \neq \varnothing$. En effet E' un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E \in E'$ et donc $f(0_E) = 0_F$ appartient à $f(E')$.
- Pour tout $\alpha \in K$ et tous vecteurs $v_1 \in f(E')$ et $v_2 \in f(E')$, il existe deux vecteurs $u_1 \in E'$ et $u_2 \in E'$ tels que $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.
  Donc : $\alpha v_1 + v_2 = \alpha f(u_1) + f(u_2) = f(\alpha u_1 + u_2)$ car f est linéaire.
  Or E' un sous-espace vectoriel, donc $\alpha u_1 + u_2 \in E'$. Donc $\alpha v_1 + v_2 \in f(E')$.

Donc $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

<u>Définition</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle image de l'application linéaire f l'ensemble $\mathrm{Im}\, f = f(E) = \{v \in F \,/\, \exists u \in E \quad v = f(u)\}$.

C'est un cas particulier puisque E est un sous-espace de lui-même.

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, alors son image $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

L'application f est surjective ssi tout vecteur de F a un antécédent dans E, donc appartient à $\mathrm{Im}\, f = f(E)$

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

<u>Rappel</u> : On appelle image réciproque par f d'une partie B de F l'ensemble de tous les antécédents des éléments de cette partie : $f^{-1}(B) = \{u \in E \,/\, f(u) \in B\}$.

<u>Remarque</u> : On utilise la notation f^{-1}, mais l'application f n'est pas à priori bijective, et donc il n'y a pas d'application réciproque. Donc $f^{-1}(v)$ n'a pas de sens.

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, alors l'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

<u>Démonstration</u> : Soit F' un sous-espace vectoriel de F.
Par définition : $u \in f^{-1}(F') \Leftrightarrow f(u) \in F'$.

- $f^{-1}(F') \neq \varnothing$. En effet $0_E \in f^{-1}(F')$ puisque $f(0_E) = 0_F$ appartient à F' car c'est un sous-espace vectoriel de F.
- Pour tous $\alpha \in K$ et tous vecteurs $u_1 \in f^{-1}(F')$ et $u_2 \in f^{-1}(F')$, on a $f(u_1) \in F'$ et $f(u_2) \in F'$. Donc, comme F' est un sous-espace vectoriel de F, $\alpha f(u_1) + f(u_2) \in F'$. Or f est linéaire. Donc $\alpha f(u_1) + f(u_2) = f(\alpha u_1 + u_2)$. Donc $f(\alpha u_1 + u_2) \in F'$. Et donc $\alpha u_1 + u_2 \in f^{-1}(F')$.

Donc $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

<u>Définition</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle noyau de l'application linéaire f l'ensemble $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \,/\, f(u) = 0_F\}$.

C'est un cas particulier puisque $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, alors son noyau $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.

On en déduit une caractérisation des applications linéaires injectives.

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F, alors f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

<u>Démonstration</u> : On sait que *f* est linéaire, donc que $f(0_E)=0_F$, donc que 0_E est un antécédent de 0_F. D'autre part, $\mathrm{Ker}\, f$ est l'ensemble des antécédents de 0_F.
Donc, si *f* est injective, $\mathrm{Ker}\, f$ ne contient que 0_E. Donc $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$ et montrons que *f* est injective.
Supposons qu'il existe un vecteur $v\in F$ qui possède deux antécédents *u* et u'.
On a donc $v=f(u)=f(u')$, donc $f(u)-f(u')=0_F$, donc $f(u-u')=0_F$, donc $u-u'\in \mathrm{Ker}\, f$, donc $u-u'=0_E$, donc $u=u'$. Il y a donc unicité de l'antécédent lorsqu'il existe. Donc *f* est injective.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une application linéaire de *E* dans *F*, alors *f* est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f=F$.

<u>Cas des espaces de dimension finie</u>

Pour toute application linéaire, $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de *F*. Donc, si *F* est un espace de dimension finie, $\mathrm{Im}\, f$ est aussi de dimension finie et $\dim \mathrm{Im}\, f\le \dim F$

<u>Définition</u> : Si $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de *F*, on appelle rang de l'application linéaire *f* la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

<u>Remarque</u> : Ceci est réalisé en particulier si *E* ou *F* est de dimension finie.
Si *E* est un espace de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont de dimension finie.

<u>Théorème du rang</u> : Si l'espace vectoriel *E* est de dimension finie, et si *f* est une application linéaire de *E* dans *F*, on a la relation : $\dim E=\dim \mathrm{Ker}\, f+rg(f)$.

<u>Démonstration</u> : On suppose que $\dim E=n$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f=p$ avec $p\le n$.
Si $p=n$, alors $\mathrm{Ker}\, f=E$ et donc *f* est l'application nulle, donc $\mathrm{Im}\, f=\{0_F\}$, et donc $\dim \mathrm{Im}\, f=0$. Donc l'égalité est vérifiée.
Si $p<n$, on construit une base $(e_1,...,e_p)$ de $\mathrm{Ker}\, f$. C'est une famille libre de *E*. Donc elle peut être complétée par $(e_{p+1},...,e_n)$ pour former une base $(e_1,...,e_n)$ de *E*.
$\mathrm{Im}\, f$ est engendré par les vecteurs $f(e_1)=0_F$, …, $f(e_p)=0_F$, $f(e_{p+1})$, …, $f(e_n)$, c'est-à-dire par $f(e_{p+1})$, …, $f(e_n)$. Montrons que cette famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ est libre.
$\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j f(e_j)=0_F$ si et seulement si $f\left(\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j e_j\right)=0_F$, donc si $\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j e_j$ appartient au noyau $\mathrm{Ker}\, f$, donc si $\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j e_j$ est combinaison linéaire de la base $(e_1,...,e_p)$ de $\mathrm{Ker}\, f$, donc si il existe des réels β_i $(1\le i\le p)$ tels que $\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j e_j=\sum_{i=1}^{p}\beta_i e_i$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\beta_i e_i-\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j e_j=0_E$.
On obtient ainsi une combinaison linéaire nulle de la famille $(e_1,...,e_n)$ qui est libre puisque c'est une base de *E*. Elle a donc tous ses coefficients nuls, et donc en particulier $\alpha_{p+1}=...=\alpha_n=0$.
Donc la famille $f(e_{p+1})$, …, $f(e_n)$ est à la fois libre et génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. C'est donc une base, et donc $\dim \mathrm{Im}\, f=n-p$. Donc $\dim E=\dim \mathrm{Ker}\, f+\dim \mathrm{Im}\, f$.

<u>Conséquences</u> : Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n, alors :

- f est injective si et seulement si $rg(f) = \dim E$.
- f est surjective si et seulement si $rg(f) = \dim F$.

Donc, pour qu'il existe un isomorphisme entre E et F, il faut que $\dim E = \dim F$.

<u>Théorème</u> : Si E et F sont deux espaces vectoriels tels que $\dim E = \dim F$ et si f est une application linéaire de E dans F, alors il y a équivalence entre les propriétés :
- f est injective. - f est surjective. - f est bijective.

C'est en particulier le cas pour un endomorphisme en dimension finie.

4) Images de familles de vecteurs

<u>Théorème</u> : Si f est une application linéaire de E dans F :

- si $(u_1,...,u_n)$ est une famille liée de E, alors $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est une famille liée de F, mais dans le cas général, on ne peut rien dire des familles libres.
- si $(u_1,...,u_n)$ est libre et si f est <u>injective</u>, alors $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est libre.
- si $(u_1,...,u_n)$ est une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel E' de E, alors $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $f(E')$ de F.
- si $(u_1,...,u_n)$ est une base d'un sous-espace vectoriel E' de E et si f est <u>injective</u>, alors $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est une base du sous-espace vectoriel $f(E')$ de F.

<u>Démonstration</u> :

- Si $(u_1,...,u_n)$ est liée : $\exists(\alpha_1,...,\alpha_n) \neq (0,...,0) \quad \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0_E$.
  Donc $f(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = 0_F$. Donc $\alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_n f(u_n) = 0_F$.
  Or $(\alpha_1,...,\alpha_n) \neq (0,...,0)$. Donc $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est une famille liée.
- $\alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_n f(u_n) = 0_F$ équivaut à $f(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = 0_F$, donc à $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in \operatorname{Ker} f$, donc à $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0_E$ car f est injective.
  Donc si $(u_1,...,u_n)$ est libre, on obtient : $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
  Donc $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est libre.
- $\forall v \in f(E') \quad \exists u \in E \quad v = f(u)$. Donc, si $(u_1,...,u_n)$ est génératrice de E' :
  $\forall v \in f(E') \quad \exists(\alpha_1,...,\alpha_n) \in K^n \quad v = f(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_n f(u_n)$
  Donc $\left(f(u_1),...,f(u_n)\right)$ est une famille génératrice de $f(E')$.
- La dernière est la synthèse des deux précédentes.

<u>Théorème</u> : Une application linéaire f est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F. Alors, elle transforme toute base de E en base de F.

<u>Conséquence</u> : Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$. En particulier, un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à K^n.

<u>Démonstration</u> :

- Si f est un isomorphisme, elle transforme toute base de E en base de $f(E) = F$ car elle est injective. On l'a déjà démontré.
- Réciproquement, supposons que f est linéaire et transforme la base $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ de E en une base de F. Donc $\dim E = \dim F$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} < f(e_1),...,f(e_n) > = F$. Donc f est surjective, et donc f est bijective car $\dim E = \dim F$.
- Pour montrer la conséquence, il suffit de prendre une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F, et une application linéaire qui transforme $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$.

II – Opérations sur les applications linéaires

Définition : On note :
- $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

1) Somme de deux applications linéaires

Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, leur somme est définie par : $\forall u \in E \quad (f+g)(u) = f(u) + g(u)$ car on additionne deux vecteurs de F.

Théorème : Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, alors leur somme $f+g$ est une application linéaire de E dans F.
Si E et F sont de dimensions finies, alors : $M_{f+g} = M_f + M_g$.

Démonstration : Soient $\alpha \in K$, u et v deux vecteurs.
$(f+g)(\alpha u + v) = f(\alpha u + v) + g(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) + \alpha g(u) + g(v)$.
Donc $(f+g)(\alpha u + v) = \alpha[f(u) + g(u)] + [f(v) + g(v)] = \alpha(f+g)(u) + (f+g)(v)$.
Donc $f+g$ est une application linéaire.
Si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ est une base de E, les vecteurs colonnes des matrices sont les coordonnées des images des vecteurs de $\mathscr{B}$. Or : $\forall j \quad (f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j)$.
Donc : $M_{f+g} = M_f + M_g$.

2) Produit d'une application linéaire par un scalaire

Si f est une application linéaire de E dans F, le produit de f par un scalaire λ est défini par : $\forall u \in E \quad (\lambda f)(u) = \lambda f(u)$ car on multiplie un vecteur de F par un scalaire.

Théorème : Si f est une application linéaire de E dans F et λ un scalaire, alors le produit λf est une application linéaire de E dans F.
Si E et F sont de dimensions finies, alors : $M_{\lambda f} = \lambda M_f$.

Démonstration : Soient $\alpha \in K$, u et v deux vecteurs.
$(\lambda f)(\alpha u + v) = \lambda f(\alpha u + v) = \lambda[\alpha f(u) + f(v)] = \lambda\alpha f(u) + \lambda f(v)$.
Donc $(\lambda f)(\alpha u + v) = \alpha[\lambda f(u)] + [\lambda f(v)] = \alpha(\lambda f)(u) + (\lambda f)(v)$.
Donc λf est une application linéaire.
Si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ est une base de E, les vecteurs colonnes des matrices sont les coordonnées des images des vecteurs de $\mathscr{B}$. Or : $\forall j \quad (\lambda f)(e_j) = \lambda f(e_j)$.
Donc : $M_{\lambda f} = \lambda M_f$.

3) Composition

Si f est une application linéaire de E dans F, et si g est une application linéaire de F dans G, leur composée est définie par : $\forall u \in E \quad (g \circ f)(u) = g[f(u)]$.
C'est une application de E dans G.

Théorème : Si E, F et G sont trois espaces vectoriels, si f est une application linéaire de E dans F, et si g est une application linéaire de F dans G, alors la composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.
Si E et F sont de dimensions finies, alors : $M_{g \circ f} = M_g M_f$.

Démonstration : Soient $\alpha \in K$, u et v deux vecteurs.
$(g \circ f)(\alpha u + v) = g[f(\alpha u + v)] = g[\alpha f(u) + f(v)] = \alpha g[f(u)] + g[f(v)]$.
Donc : $(g \circ f)(\alpha u + v) = \alpha(g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$.
Donc $g \circ f$ est une application linéaire.

Soit $\mathscr{B}=(e_1,...,e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}'=(e'_1,...,e'_n)$ une base de F et $\mathscr{B}''=(e''_1,...,e''_q)$ une base de G. Soient $A=M_f$ et $B=M_g$ les matrices de f et g.

$A=(a_{i,j})$ donc : $\forall j\in[\![1,p]\!]\quad f(e_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}e'_k$, donc $(g\circ f)(e_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}g(e'_k)$.

$B=(b_{i,j})$ donc : $\forall k\in[\![1,n]\!]\quad g(e'_k)=\sum_{i=1}^{q}b_{i,k}e''_i$.

Donc $(g\circ f)(e_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{q}b_{i,k}e''_i\right)=\sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}\right)e''_i$.

Donc $M_{g\circ f}=(c_{i,j})$ avec $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}$ .Donc $M_{g\circ f}=BA$.

4) Isomorphismes

<u>Théorème</u> : La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E. La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E.
Si E et F sont de même dimension finie, alors : $M_{f^{-1}}=(M_f)^{-1}$.

<u>Démonstration</u> : Soit f est un isomorphisme de E dans F, donc linéaire et bijective.
Alors f^{-1} est bijective puisque $(f^{-1})^{-1}=f$.

Soient $\alpha\in K$, u et v deux vecteurs de F. Posons : $u'=f^{-1}(u)$ et $v'=f^{-1}(v)$.
Donc u' et v' sont dans E et on a : $u=f(u')$ et $v=f(v')$.
Donc par linéarité de f : $\alpha u+v=\alpha f(u')+f(v')=f(\alpha u'+v')$.
Donc : $f^{-1}(\alpha u+v)=\alpha u'+v'=\alpha f^{-1}(u)+f^{-1}(v)$. Donc f^{-1} est linéaire.
Donc f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
La propriété des matrices vient de $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F$.

5) Structures

<u>Théorème</u> : Si E et F sont des espaces vectoriels sur K, les ensembles $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$ sont des espaces vectoriels sur K.
Si $\dim E=p$ et $\dim F=n$, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(K)$.
Si $\dim E=n$, alors $\mathscr{L}(E)$ est isomorphe à $\mathscr{M}_n(K)$.

<u>Démonstration</u> : On a bien une loi interne et une loi externe, et pour tous f, g et h de $\mathscr{L}(E,F)$, et pour tous réels α et β :

1. $f+g=g+f$ car $\forall u\in E\quad (f+g)(u)=f(u)+g(u)=g(u)+f(u)=(g+f)(u)$.
2. $(f+g)+h=f+(g+h)$ car :
   $\forall u\in E\quad [(f+g)+h](u)=(f+g)(u)+h(u)=f(u)+g(u)+h(u)$.
   $\forall u\in E\quad [f+(g+h)](u)=f(u)+(g+h)(u)=f(u)+g(u)+h(u)$.
   Donc $\forall u\in E\quad [(f+g)+h](u)=[f+(g+h)](u)$.
3. L'élément neutre est l'application nulle définie par $\forall u\in E\quad f(u)=0_F$.
4. Toute application f a un opposé $(-f)$ définie par $\forall u\in E\quad (-f)(u)=-f(u)$.
5. $1.f=f$ car $\forall u\in E\quad (1.f)(u)=1.f(u)=f(u)$.
6. $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$ car :
   $\forall u\in E\quad [\alpha(f+g)](u)=\alpha[(f+g)(u)]=\alpha[f(u)+g(u)]=\alpha f(u)+\alpha g(u)=(\alpha f+\alpha g)(u)$
7. $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$ car :
   $\forall u\in E\quad [(\alpha+\beta)f](u)=(\alpha+\beta)f(u)=\alpha f(u)+\beta f(u)=(\alpha f+\beta f)(u)$
8. $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$ car :

$\forall u \in E \quad [\alpha(\beta f)](u) = \alpha[(\beta f)(u)] = \alpha[\beta f(u)] = (\alpha\beta) f(u) = [(\alpha\beta) f](u)$.

Un isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ est l'application $f \mapsto M_f$ dans une base donnée.

Théorème : Si E est un espace vectoriel sur K, l'ensemble $GL(E)$ muni de la composition est un groupe : la composition est associative, possède un élément neutre $\mathrm{Id}_E : u \mapsto u$ et tout élément de $GL(E)$ a une réciproque dans $GL(E)$.

Démonstration : L'associativité est vraie pour toutes les compositions.

Il est évident que Id_E est linéaire car $\mathrm{Id}_E(\alpha u + v) = \alpha u + v = \alpha\,\mathrm{Id}_E(u) + \mathrm{Id}_E(v)$, qu'elle est bijective car $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et que $\forall f \in GL(E) \quad \mathrm{Id}_E \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

On a vu que si $f \in GL(E)$, alors $f^{-1} \in GL(E)$.

Définition : $GL(E)$ est appelé le groupe linéaire de E.

III – Cas particuliers

1) Formes linéaires

Définition : Si E est un espace vectoriel sur K, on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K.

Exemple 1 : L'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à $u = (x,y,z)$ associe $2x + 3y - 5z$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2 : L'application f_k qui à tout vecteur $u = (x_1,...,x_n)$ de $E = K^n$ associe x_k est une forme linéaire sur E.

Exemple 3 : L'application f qui à toute fonction f continue sur $[a,b]$ associe $\int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur $E = \{f \in \mathscr{A}([a,b],\mathbb{R}) / f \text{ continue}\}$.

Si E possède une base $(e_1,...,e_n)$: $\forall u \in E \quad \exists!(x_1,..,x_n) \in K^n \quad u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Donc : $\forall u \in E \quad f(u) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ en posant : $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \alpha_k = f(e_k)$.

Réciproquement, on démontre facilement que toute application de E dans K qui à u associe $\forall u \in E \quad f(u) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ est une forme linéaire.

Toute forme linéaire sur K^n est de la forme : $(x_1,...,x_n) \mapsto \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$

Conséquence : $\{u \in E / \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

En effet, c'est le noyau d'une forme linéaire.

Remarque : En particulier, si f est une forme linéaire non nulle sur E, son noyau est un hyperplan de E car $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = n - 1$.

Et par intersection :

Théorème : L'ensemble des solutions d'un système de n équations linéaires homogènes à p inconnues est un sous-espace vectoriel de K^p.

2) Projecteurs

Définition : Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, pour tout vecteur u de E, il existe un couple unique $(u_1,u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

L'application p qui à tout vecteur u de E associe le vecteur $p(u)=u_1$ s'appelle la projection sur E_1 suivant E_2 (ou parallèlement à E_2).

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, on définit $E_1=\{(x,y)/2x+3y=0\}$ et $E_1=\{(x,y)/3x-y=0\}$.

Ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$. En effet :

$u\in E_1\cap E_2$ ssi $\begin{cases}2x+3y=0\\3x-y=0\end{cases}$, donc ssi $\begin{cases}11x=0\\y=3x\end{cases}$. Donc $E_1\cap E_2=\{0_E\}$.

E_1 a pour base $e_1=(3,-2)$. Donc $u_1\in E_1 \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}\quad u_1=\alpha(3,-2)=(3\alpha,-2\alpha)$.

E_2 a pour base $e_2=(1,3)$. Donc $u_2\in E_2 \Leftrightarrow \exists\beta\in\mathbb{R}\quad u_2=\beta(1,3)=(\beta,3\beta)$.

Donc : $u\in E_1+E_2$ ssi $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\quad \begin{cases}x=3\alpha+\beta\\y=-2\alpha+3\beta\end{cases}$.

Or pour tout $u=(x,y)$, ce système admet une solution : $\alpha=\dfrac{3x-y}{11}$ et $\beta=\dfrac{2x+3y}{11}$.

Donc $E_1+E_2=E$.

La projection p sur E_1 suivant E_2 est l'application qui à $u=(x,y)$ associe le vecteur $p(u)=u_1=(x_1,y_1)$ avec $x_1=\dfrac{3}{11}(3x-y)$ et $y_1=-\dfrac{2}{11}(3x-y)$.

<u>Remarque</u> : On peut aussi définir la projection q sur E_2 suivant E_1 : $q(u)=u_2$.

Donc : $\forall u\in E\quad p(u)+q(u)=u$. Donc : $p+q=\mathrm{Id}_E$.

<u>Théorème</u> : Toute projection est linéaire et vérifie $p\circ p=p$.

<u>Démonstration</u> : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit p la projection sur E_1 suivant E_2. Soit $\alpha\in K$ et $(u,v)\in E^2$.

Or $u=u_1+u_2$ avec $(u_1,u_2)\in E_1\times E_2$ et $p(u)=u_1$.

Et $v=v_1+v_2$ avec $(v_1,v_2)\in E_1\times E_2$ et $p(v)=v_1$.

Donc : $\alpha u+v=\alpha(u_1+u_2)+(v_1+v_2)=(\alpha u_1+v_1)+(\alpha u_2+v_2)$.

Or $(\alpha u_1+v_1,\alpha u_2+v_2)\in E_1\times E_2$ car E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels.

Donc : $p(\alpha u+v)=\alpha u_1+v_1=\alpha p(u)+p(v)$. Donc p est linéaire.

D'autre part : $p(u)=u_1=u_1+0_E$ et $(u_1,0_E)\in E_1\times E_2$.

Donc $(p\circ p)(u)=p[p(u)]=u_1=p(u)$ pour tout vecteur u.

<u>Définition</u> : On appelle projecteur de E tout endomorphisme de E qui vérifie $p\circ p=p$.

Donc toute projection est un projecteur.

<u>Théorème</u> : Tout projecteur p est la projection sur $\mathrm{Im}\,p$ suivant $\mathrm{Ker}\,p$.

<u>Démonstration</u> : Soit p un projecteur. Donc : $\forall u\in E\quad p[p(u)]=p(u)$.

On peut écrire : $\forall u\in E\quad u=p(u)+[u-p(u)]$.

Or : $\forall u\in E\quad p[u-p(u)]=0_E$, donc $u-p(u)\in\mathrm{Ker}\,p$. Et bien sûr $p(u)\in\mathrm{Im}\,p$.

Donc : $\exists(u_1,u_2)\in\mathrm{Im}\,p\times\mathrm{Ker}\,p\quad u=u_1+u_2$. Donc $E=\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Ker}\,p$.

Ils sont supplémentaires car $\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Ker}\,p=\{0_E\}$.

En effet si $u\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Ker}\,p$, alors il existe $v\in E$ tel que $u=p(v)$ et $p(u)=0_E$, donc $p[p(v)]=0_E$, donc $p(v)=0_E$, donc $u=0_E$.

De plus $u_1=p(u)$. Donc p est la projection sur $\mathrm{Im}\,p$ suivant $\mathrm{Ker}\,p$.

<u>Remarque</u> : $\mathrm{Im}\,p=\{u\in E/p(u)=u\}$.

3) Symétries

Définition : Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, pour tout vecteur u de E, il existe un couple unique $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.
L'application s qui à tout vecteur u de E associe le vecteur $s(u) = u_1 - u_2$ s'appelle la symétrie par rapport à E_1 suivant E_2 (ou parallèlement à E_2).

Dans l'exemple précédent : $s(u) = u_1 - u_2 = (3\alpha - \beta, -2\alpha - 3\beta)$
La symétrie s par rapport à E_1 suivant E_2 est l'application qui à $u = (x, y)$ associe le vecteur $s(u) = u' = (x', y')$ avec $x' = \frac{1}{11}(7x - 6y)$ et $y' = \frac{1}{11}(-12x - 7y)$.

Remarque 1 : On peut aussi définir la symétrie s' par rapport à E_2 suivant E_1 : $s'(u) = -u_1 + u_2 = -s(u)$. Donc $s' = -s$.

Remarque 2 : $\forall u \in E \quad s(u) = 2u_1 - (u_1 + u_2) = 2p(u) - u$. Donc : $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Théorème : Toute symétrie est linéaire et vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Elle est donc bijective.

Démonstration : $s \in \mathcal{L}(E)$ car $p \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$.
$s \circ s = (2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) = 4p \circ p - 2\,\mathrm{Id}_E \circ p - 2p \circ \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$ car $p \circ p = p$.
Elle est bijective car $s^{-1} = s$.

Définition : On appelle involution de E toute application de E dans E qui vérifie $s \circ s = s$.

Donc toute symétrie est une involution ou application involutive.

Théorème : Tout endomorphisme involutif s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ suivant $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. C'est un automorphisme.

Démonstration : Soit s un endomorphisme involutif. Donc : $\forall u \in E \quad s[s(u)] = u$.
On remarque que si l'on veut avoir $u = u_1 + u_2$ et $s(u) = u_1 - u_2$, alors, il faut poser :
$u_1 = \frac{1}{2}[u + s(u)]$ et $u_2 = \frac{1}{2}[u + s(u)]$.
On a donc : $\forall u \in E \quad u = \frac{1}{2}[u + s(u)] + \frac{1}{2}[u - s(u)]$ et $s(u) = \frac{1}{2}[u + s(u)] - \frac{1}{2}[u - s(u)]$.
Or le vecteur $u_1 = \frac{1}{2}[u + s(u)]$ vérifie $s(u_1) = \frac{1}{2}[s(u) + (s \circ s)(u)] = \frac{1}{2}[s(u) + u] = u_1$.
Donc $u_1 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.
Et le vecteur $u_2 = \frac{1}{2}[u - s(u)]$ vérifie $s(u_2) = \frac{1}{2}[s(u) - (s \circ s)(u)] = \frac{1}{2}[s(u) - u] = -u_2$.
Donc $u_2 \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
On a donc démontré que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
De plus $u \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, ssi $(s - \mathrm{Id}_E)(u) = 0_E$ et $(s + \mathrm{Id}_E)(u) = 0_E$ ssi $s(u) = u$ et $s(u) = -u$, donc ssi $u = 0_E$.
Donc $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.
Et par construction, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ suivant $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque : $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{u \in E \,/\, s(u) = u\}$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{u \in E \,/\, s(u) = -u\}$.