MATRICES

Dans tout ce chapitre, K désigne l'ensemble des réels ou des complexes.
Les éléments de K seront appelés des scalaires.

I – Définitions

1) Matrices à *n* lignes et *p* colonnes

Définition : Une matrice est un tableau de nombres. Elle est caractérisée par son nombre de lignes (noté n), son nombre de colonnes (noté p) et ses éléments : on note a_{ij} l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

La matrice est alors notée $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ ou plus simplement $A=(a_{ij})$.

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

$a_{23}=-1$, $a_{32}=4$, $a_{14}=-3,\dots$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Deux matrices sont égales si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et si elles ont les mêmes éléments : $A=B \Leftrightarrow \forall(i,j)\quad a_{i,j}=b_{i,j}$.

La matrice nulle à n lignes et p colonnes est la matrice : $0_{n,p}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (ou 0).

Une matrice est une matrice colonne si $p=1$.
Une matrice est une matrice ligne si $n=1$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Si $A=(a_{ij})$, la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,n} \end{pmatrix}$ s'appelle le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A et la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A.

Exemple : Le $3^{\text{ème}}$ vecteur colonne de $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et son $3^{\text{ème}}$ vecteur ligne est $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

<u>Définition</u> : On appelle transposée de la matrice $A=(a_{i\,j})$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ la matrice ${}^tA=(a_{j\,i})$ qui appartient à $\mathcal{M}_{p,n}(K)$.

<u>Exemple</u> : Si $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$, alors ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ 5 & -1 & 3\\ -3 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et réciproquement.

<u>Propriété</u> : ${}^t({}^tA)=A$.

2) <u>Matrices carrées</u>

La matrice est une matrice carrée d'ordre n si $p=n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(K)$.
Les éléments de sa diagonale principale sont les termes $a_{i\,i}$.

<u>Exemple</u> : $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3. Les éléments de sa diagonale principale sont 1, 5 et 2.

Une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée : $\forall(i,j)\quad a_{j\,i}=a_{i\,j}$.
Une matrice est antisymétrique si elle est opposée à sa transposée : $\forall(i,j)\quad a_{j\,i}=-a_{i\,j}$.

<u>Exemple</u> : $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ est symétrique, alors que $B=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ est antisymétrique.

On peut remarquer que si une matrice est antisymétrique, alors tous les éléments de sa diagonale principale sont nuls car : $\forall i\quad a_{i\,i}=-a_{i\,i}$.

Une matrice carrée est triangulaire supérieure si tous ses éléments en dessous de sa diagonale principale sont nuls : $a_{i\,j}=0$ pour tous $i>j$.

Une matrice carrée est triangulaire inférieure si tous ses éléments au dessus de sa diagonale principale sont nuls : $a_{i\,j}=0$ pour tous $i<j$.

Une matrice carrée est diagonale si tous ses éléments sont nuls sauf ceux de sa diagonale principale : $a_{i\,j}=0$ pour tous $i\neq j$.

<u>Exemple</u> : $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ ou $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ sont diagonales.

$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et $D=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ triangulaire inférieure.

Définition : La matrice unité d'ordre n est la matrice diagonale : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension, elle est simplement notée I.
Les matrices diagonales ou à défaut les matrices triangulaires vont jouer un rôle important dans le calcul matriciel car les opérations sur ces matrices sont beaucoup plus simples que sur les autres.

II - Opérations

1) Addition des matrices

Théorème : Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, on appelle somme des deux matrices A et B la matrice $C = A + B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par : $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

On additionne terme à terme.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Les propriétés sont toutes conséquences des propriétés de l'addition dans K.

Propriétés : Pour toutes matrices A, B et C de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$:

$A + B = B + A$ $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$ $\quad A + 0 = 0 + A = A$

$A + B = A \Leftrightarrow B = 0$ $\quad A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A = (-a_{i\,j})$ $\quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

Les démonstrations sont évidentes sauf peut-être la dernière. Si $A + B = (c_{i\,j})$, alors $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$, donc ${}^t(A + B) = (c_{j\,i}) = (a_{j\,i} + b_{j\,i}) = (a_{j\,i}) + (b_{j\,i}) = {}^tA + {}^tB$.

2) Multiplication d'une matrice par un scalaire

Théorème : Si $A = (a_{i,j})$ est dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, on appelle produit de la matrice A par le scalaire λ la matrice $C = \lambda A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par : $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

On multiplie tous les coefficients par λ.

Exemple : $2\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -10 \\ -4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Les propriétés sont conséquences de celles de la multiplication et de l'addition dans K.

Propriétés : Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et tous scalaires λ et μ :

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ $\quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ $\quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$1A = A$ $\quad (-1)A = -A$ $\quad \lambda A = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $A = 0$ $\quad {}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$

Les démonstrations sont évidentes.

3) Produit de deux matrices

Ici, l'idée est moins simple. On voudrait « mettre en facteur » dans un système les inconnues, donc ramener le système à la forme $AX = B$.
S'il n'y avait qu'une équation, cela reviendrait à écrire $(a_1x_1 + ... + a_px_p)$ comme un produit de la matrice des coefficients a_j par la matrice des inconnues x_j. On a choisi d'écrire la matrice des coefficients en ligne dans la position où on les lit (comme on a vu dans le pivot de Gauss) et la matrice des inconnues en colonne, ce qui donne :

$$(a_1x_1+\ldots+a_px_p)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_p\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_p\end{pmatrix}$$

Plus généralement, l'élément $c_{i\,j}$ de la matrice produit $C=AB$ sera obtenu en multipliant la ligne *i* de *A* par la colonne *j* de *B* avec la règle de calcul précédente.
Il faut donc que le nombre colonnes de *A* soit égal au nombre de lignes de *B*.

<u>Définition</u> : Si $A=(a_{i,j})$ est dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B=(b_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$, on appelle produit de *A* par *B* la matrice $C=AB$ de $\mathcal{M}_{n,q}(K)$ définie par : $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$.

On multiplie la $i^{\text{ème}}$ ligne de *A* par la $j^{\text{ème}}$ colonne de *B*.

<u>*Exemple*</u> : $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & 3\\ -2 & 3 & -6 & -1\\ 1 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 19 & -24 & -9\\ 1 & 2 & -34 & 2\end{pmatrix}$.

Attention, le produit de deux matrices n'est donc pas toujours défini !

<u>Propriétés</u> : Pour toutes matrices *A*, *B* et *C*, sous réserve d'existence des produits :
$(AB)C=A(BC)$ $\quad(A+B)C=AC+BC\quad$ $A(B+C)=AB+AC$
Si *A* est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$: $AI_p=I_nA=A$. $\quad{}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

<u>Démonstrations</u> :

- <u>Associativité</u> : Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B\in\mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C\in\mathcal{M}_{q,r}(K)$.

  La matrice $M=AB$ appartient à $\mathcal{M}_{n,q}(K)$ et $\forall(i,j)\quad m_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$.

  La matrice $D=(AB)C=MC$ appartient à $\mathcal{M}_{n,r}(K)$ et $\forall(i,j)\quad d_{i,j}=\sum_{\ell=1}^{q}m_{i,\ell}c_{\ell,j}$.

  $$d_{i,j}=\sum_{\ell=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,\ell}b_{\ell,j}\right)c_{\ell,j}=\sum_{\ell=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,\ell}c_{\ell,j}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{q}a_{i,k}b_{k,\ell}c_{\ell,j}\right)=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\left(\sum_{\ell=1}^{q}b_{k,\ell}c_{\ell,j}\right)$$

  La matrice $P=BC$ appartient à $\mathcal{M}_{p,r}(K)$ et $\forall(i,j)\quad p_{i,j}=\sum_{k=1}^{q}b_{i,k}c_{k,j}$.

  Donc : $\forall(i,j)\quad d_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}p_{k,j}$. Donc $D=AP$. Donc : $(AB)C=A(BC)$.

- <u>Distributivité à gauche</u> : Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $C\in\mathcal{M}_{p,q}(K)$.
  La matrice $M=A+B$ appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et : $\forall(i,j)\quad m_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

  La matrice $D=(A+B)C=MC$ appartient à $\mathcal{M}_{n,q}(K)$ et : $\forall(i,j)\quad d_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}m_{i,k}c_{k,j}$.

  Donc : $\forall(i,j)\quad d_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}(a_{i,k}+b_{i,k})c_{k,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}c_{k,j}+\sum_{k=1}^{p}b_{i,k}c_{k,j}$.
  Donc : $D=AC+BC$. Donc : $(A+B)C=AC+BC$.

- <u>Distributivité à droite</u> : Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B\in\mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C\in\mathcal{M}_{p,q}(K)$.
  La matrice $M=B+C$ appartient à $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ et : $\forall(i,j)\quad m_{i,j}=b_{i,j}+c_{i,j}$.

La matrice $D = A(B+C) = AM$ appartient à $\mathscr{M}_{n,q}(K)$ et : $\forall(i,j) \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} m_{k,j}$.

Donc : $\forall(i,j) \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\left(b_{k,j} + c_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} c_{k,j}$.

Donc : $D = AB + AC$. Donc : $A(B+C) = AB + AC$.

- <u>Matrice unité</u> : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$.

  La matrice unité I_p appartient à $\mathscr{M}_p(K)$ et a pour éléments : $\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

  La matrice $B = AI_p$ appartient à $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ et : $\forall(i,j) \quad b_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \varepsilon_{k,j} = a_{i,j}$ car seul le terme $\varepsilon_{j,j}$ est non nul. Donc : $B = A$. Donc : $AI_p = A$.

  La matrice unité I_n appartient à $\mathscr{M}_n(K)$ et a pour éléments : $\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

  La matrice $C = I_n A$ appartient à $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ et : $\forall(i,j) \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j}$ car seul le terme $\varepsilon_{i,i}$ est non nul. Donc : $C = A$. Donc : $I_n A = A$.

- <u>Transposition</u> : Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$.

  La matrice $M = AB$ appartient à $\mathscr{M}_{n,q}(K)$ et $\forall(i,j) \quad m_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

  Donc la matrice $M' = {}^t(AB)$ appartient à $\mathscr{M}_{q,n}(K)$ et $\forall(i,j) \quad m'_{i,j} = m_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}$.

  Or la matrice $A' = {}^tA$ appartient à $\mathscr{M}_{p,n}(K)$ et $\forall(i,j) \quad a'_{i,j} = a_{j,i}$.

  Et la matrice $B' = {}^tB$ appartient à $\mathscr{M}_{q,p}(K)$ et $\forall(i,j) \quad b'_{i,j} = b_{j,i}$.

  Donc : $\forall(i,j) \quad m'_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a'_{k,j}\, b'_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} b'_{i,k}\, a'_{k,j}$. Donc : $M' = B'A'$.

  Donc : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Attention ! Le produit des matrices n'a pas toutes les propriétés du produit des réels :

- Le produit AB peut être défini sans que le produit BA le soit : c'est le cas de l'exemple précédent.
- Même si AB et BA sont définis tous les deux (par exemple dans le cas de matrices carrées), en général $AB \neq BA$.

La multiplication des matrices n'est pas commutative.

<u>*Exemple*</u> : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Cependant, on peut parfois avoir l'égalité ! On dit alors que A et B commutent.

<u>*Exemple*</u> : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

<u>Définition</u> : Deux matrices A et B commutent si $AB = BA$.

- Un autre problème est la résolution d'équations matricielles.

Un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux ne le soit.

Exemple : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- On ne peut donc pas diviser des matrices. On y reviendra avec l'inversion.

Théorème : Tout système linéaire de n équations à p inconnues peut s'interpréter comme une équation matricielle : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$.

$A = (a_{i,j})$ est la matrice des coefficients du système, donc $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont deux matrices colonnes.

Donc toute matrice peut s'interpréter comme matrice d'un système linéaire.

4) Inversion des matrices carrées

Définition : Une matrice carrée est inversible s'il existe une matrice carrée B de même ordre que A qui vérifie : $AB = BA = I$. Cette matrice n'existe pas toujours, mais si elle existe, elle est unique : la matrice est notée $B = A^{-1}$ inverse de la matrice A.

On résout $AB = I$ ou $BA = I$, et on vérifie l'autre égalité.

Propriétés : Si A et B sont inversibles, alors A^{-1}, ${}^tA$, AB et, pour tout entier k, A^k sont inversibles : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

Si A est une matrice inversible, alors $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$ et $XA = Y \Leftrightarrow X = YA^{-1}$.

Démonstration : Les deux premières découlent directement de la définition.

De la première, on déduit : ${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI$, donc ${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I$, ce qui donne la troisième.

$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$, donc $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La cinquième est obtenue par récurrence en utilisant ce qui vient d'être démontré.

Si $AX = Y$, alors $A^{-1}AX = A^{-1}Y$, donc $IX = A^{-1}Y$, donc $X = A^{-1}Y$.

Réciproquement, si $X = A^{-1}Y$, alors $AX = AA^{-1}Y = IY = Y$.

La démonstration de la deuxième équivalence est analogue.

Remarque : Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 6a+4c & 6b+4d \end{pmatrix}$ Donc $AB = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2c = 1 \\ 6a+4c = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3b+2d = 0 \\ 6b+4d = 1 \end{cases}$

Or ces équations sont incompatibles.

Il existe plusieurs méthodes pour voir si une matrice est inversible et calculer son inverse.

La suite décrit ces méthodes pour étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Méthode par un polynôme annulateur

Définition : On appelle polynôme annulateur d'une matrice A tout polynôme de $K[X]$ défini par $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0$ tel que $P(A)=0$, c'est-à-dire : $a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=0$.

Ici, on montre qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2=aA+bI$.

$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$ Et : $aA+bI=a\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&2a\\3a&4a+b\end{pmatrix}$

Donc : $A^2=aA+bI\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=2\end{cases}$. Donc : $A^2=5A+2I$.

Donc un polynôme annulateur de A est $P(X)=X^2-5X-2$.

Donc : $I=\frac{1}{2}(A^2-5A)=\frac{1}{2}A(A-5I)$. On a ainsi déterminé une matrice $B=\frac{1}{2}(A-5I)$ qui vérifie $AB=BA=I$. Donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-5I)$.

Si $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0$ est un polynôme annulateur de A et si $a_0\neq 0$, alors la matrice A est inversible et $A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(a_nA^{n-1}+\dots+a_2A+a_1I)$.

b) Méthode par résolution d'un système

On a vu que : $AX=Y\Leftrightarrow X=A^{-1}Y$. Donc il suffit d'associer à A un système, en prenant $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, puis de résoudre ce système.

$AX=Y\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=x'\\3x+4y=y'\end{cases}$. La matrice complétée est $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x'\\3&4&y'\end{array}\right)$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss : $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x'\\0&-2&y'-3x'\end{array}\right)$ $L_2\leftarrow L_2-3L_1$,

puis $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x'\\0&1&\frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y'\end{array}\right)$ $L_2\leftarrow-\frac{1}{2}L_1$ puis $\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2x'+y'\\0&1&\frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y'\end{array}\right)$ $L_1\leftarrow L_1+L_2$

Le système a une unique solution, donc A est inversible et la solution est :

$\begin{cases}x=-2x'+y'\\y=\frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y'\end{cases}$. Or $AX=Y\Leftrightarrow X=A^{-1}Y$. Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible si et seulement si quel que soit $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(K)$, le système associé à l'équation matricielle $AX=Y$ admet une unique solution $X\in\mathcal{M}_{n,1}(K)$.
Un système d'équations linéaires est un système de Cramer si et seulement si sa matrice est inversible.

c) Méthode de Jordan-Gauss

Dans la résolution précédente, pendant que l'on transformait A pour aboutir à I dans la partie gauche de la matrice complétée, on faisait les mêmes transformations sur la partie droite pour passer de $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}-2x'+y'\\\frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que si l'on applique à I les mêmes transformations que celles qui font passer de A à I, on obtiendra A^{-1}. On présente donc les calculs de la manière suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow -\frac{1}{2}L_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

On applique à I les <u>mêmes</u> transformations :

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_1}\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2}\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow -\frac{1}{2}L_2}\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A^{-1}$$

La matrice A est inversible si et seulement si la matrice <u>triangulaire associée</u> ne présente pas de zéros sur la diagonale.

Les zéros sur la diagonale de la matrice A ou des matrices intermédiaires n'ont pas d'importance.

<u>Conséquence</u> : Une matrice triangulaire ou diagonale est inversible si et seulement si elle n'a pas de zéros sur sa diagonale.

5) <u>Puissances des matrices carrées</u>

Dans ce paragraphe les matrices sont carrées d'ordre n et on note I la matrice identité d'ordre n.

Si A est une matrice carrée, on définit pour tout $k\in\mathbf{N}^*$: $A^k=A\times\ldots\times A$ (k facteurs).
Et on pose : $A^0=I$. Pour tous $k\in\mathbf{N}$ et $m\in\mathbf{N}$: $A^kA^m=A^{k+m}$ et $(A^k)^m=A^{km}$.

On a donc les mêmes propriétés que les puissances de réels, sauf celles qui nécessitent la commutativité.

Seulement <u>si A et B commutent</u> ($AB=BA$), alors : $\forall k\in\mathbf{N}\quad (AB)^k=A^kB^k$, et on peut appliquer la <u>formule du binôme</u> : $(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^kB^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^{m-k}B^k$.

Dans la plupart des cas, les calculs des puissances de matrices sont compliqués et on utilise aussi plusieurs types de méthodes.

<u>*Exemple*</u> : On veut calculer les puissances de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$.

a) <u>Par récurrence</u>

On calcule les premières puissances :

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}\qquad A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\0&8\end{pmatrix}$$

On conjecture une formule : $\forall n\in\mathbf{N}^*\quad A^n=\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}$ que l'on montre par récurrence.

b) <u>Par un polynôme annulateur</u>

C'est aussi une méthode de récurrence.

Dans l'exemple de $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, on peut démontrer que : $A^2=3A-2I$.

On démontre ensuite par récurrence que pour tout entier n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n=a_nA+b_nI$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par $a_0=0$ et $b_0=1$, et par $a_{n+1}=3a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-2a_n$. On en déduit $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$, puis $a_n=2^n-1$ et $b_n=2-2^n$.

Donc : $\forall n \in \mathbf{N} \quad A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c) **Par la formule du binôme**

On décompose la matrice en somme de deux matrices plus simples qui commutent et on utilise la formule du binôme.

$A = I + J$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $IJ = JI = J$.

Donc $A^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k$. Or $I^{n-k} = I$ pour tout *k*. Donc $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J$ et donc par récurrence $J^k = J$ pour tout $k \geq 1$.

Donc $A^n = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J = I + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right] J = I + (2^n - 1)J = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

d) **Par « diagonalisation »**

On se ramène à une matrice diagonale car il est facile de calculer ses puissances.

Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, alors pour tout entier $k \geq 1$: $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$.

On démontre que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale.

$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = IAI = A$. Donc $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

Par récurrence, on démontre que $\forall n \in \mathbf{N} \quad A^n = PD^nP^{-1}$. Or $\forall n \in \mathbf{N} \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Pour l'instant, la matrice *P* sera donnée dans l'énoncé, mais on apprendra à la calculer.
Remarque : Il n'est pas toujours possible de trouver une matrice diagonale, et parfois on se contente d'une matrice triangulaire.