Un cas assez fréquent est celui où la variable aléatoire prend des valeurs entières positives : on note alors simplement $x_k = k$.

Exemple 1 : $X(\Omega) = [\![1,5]\!]$ car $X(\omega) = a + b$ avec $0 \leq a \leq 3$ et $0 \leq b \leq 3$. Les valeurs 0 et 6 ne sont pas obtenues car $0 = 0 + 0$ et $6 = 3 + 3$. Or : $a \neq b$.
Exemple 2 : $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ car le nombre de boules rouges est inférieur ou égal au nombre de boules tirées.
Exemple 3 : $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ pour la même raison.
Exemple 4 : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car il faut au minimum un tirage pour obtenir une boule rouge et on peut tirer indéfiniment sans l'obtenir.
Exemple 5 : $X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}$. En effet, perdre 1€ revient à gagner (-1) €.
La détermination de l'univers image est la première chose à faire pour étudier une variable aléatoire. En particulier, elle permet de distinguer les variables discrètes finies des variables discrètes infinies.

Notation : On abrège l'écriture de certains événements liés à *X*. Par exemple :
$(X = a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ $\quad$ $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$
$(X > a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ $\quad$ $(a < X \leq b) = \{\omega \in \Omega / a < X(\omega) \leq b\}$

3) Loi de probabilité

On détermine alors avec quelle probabilité la variable aléatoire prend chacune des valeurs de son univers image. C'est la loi de probabilité de *X*.

Définition : Si *X* est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et si son univers image est $X(\Omega) = \{x_k / k \in I\}$, alors la loi de probabilité de *X* est l'ensemble des couples (x_k, p_k) où $p_k = P(X = x_k)$ pour $k \in I$.

Dans le cas d'un ensemble $X(\Omega)$ fini et ne contient pas un très grand nombre de valeurs, on résume les résultats dans un tableau :

x_1	x_2	…	x_n
$p_1 = P(X = x_1)$	$p_2 = P(X = x_2)$	…	$p_n = P(X = x_n)$

Si *X* prend un grand nombre de valeurs (éventuellement infini), la loi de probabilité ne peut plus être résumée par un tableau. Alors, on établit une formule générale.
Dans tous les cas, on peut remarquer que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est une et une seule des valeurs x_k, donc que ω appartient à un et un seul des événements $(X = x_k)$ pour $k \in I$. Cela revient à dire que ces événements sont incompatibles et que leur réunion est l'univers Ω. De plus leur probabilité est non nulle car ce sont les valeurs prises effectivement par *X*.

Théorème : Si *X* est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et si son univers image est $X(\Omega) = \{x_k / k \in I\}$, alors la famille $(X = x_k)_{k \in I}$ forme un système complet d'événements. Et donc $\sum_{k \in I} P(X = x_k) = 1$.

Lorsque $X(\Omega)$ est infini dénombrable, le système complet d'événements comporte une infinité d'événements et la somme est la somme d'une série.

Exemple 1 : $X(\Omega) = [\![1,5]\!]$. Il y a équiprobabilité et comme il s'agit de 2-listes sans répétition, donc d'arrangements : $\text{Card}(\Omega) = A_4^2 = 12$.

$1 = 0 + 1 = 1 + 0$, donc $(X = 1) = \{(0,1), (1,0)\}$. Donc $P(X = 1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

$2 = 0 + 2 = 2 + 0$ (on élimine $1 + 1$ car $a \neq b$). Donc $P(X = 2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

De même : $P(X=3)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$, $P(X=4)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$ et $P(X=5)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

On vérifie aisément que $\sum_{k=1}^{5} P(X=k)=1$.

Exemple 2 : $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$. Il y a équiprobabilité et, puisque ce sont des tirages simultanés : $\text{Card}(\Omega)=C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!7!}=\dfrac{10\times9\times8}{6}=120$.

$(X=0)$ est réalisé si l'on a tiré 3 boules blanches : $P(X=0)=\dfrac{C_5^3}{120}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$.

$(X=1)$ est réalisé si l'on a tiré 2 blanches et 1 rouge : $P(X=1)=\dfrac{C_5^2C_5^1}{120}=\dfrac{50}{120}=\dfrac{5}{12}$.

De même $P(X=2)=\dfrac{C_5^1C_5^2}{120}=\dfrac{50}{120}=\dfrac{5}{12}$ et $P(X=3)=\dfrac{C_5^3}{120}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{12}$

On vérifie aisément que $\sum_{k=0}^{3} P(X=k)=1$. La symétrie du tableau est due au fait qu'il y a autant de boules blanches que de boules rouges.

Exemple 3 : Le raisonnement est identique : $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$. Mais ici, les tirages ont lieu avec remise, donc $\text{Card}(\Omega)=9^3$.

$(X=0)$ est réalisé si l'on a tiré 3 boules blanches : $P(X=0)=\dfrac{6^3}{9^3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

$(X=1)$ est réalisé si l'on a tiré 2 blanches et 1 rouge dans un ordre quelconque. Il y a 3 ordres possibles (*RBB* ou *BRB* ou *BBR*).

Donc $P(X=1)=\dfrac{3\times3\times6^2}{9^3}=3\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

De même $P(X=2)=\dfrac{3\times3^2\times6}{9^3}=3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$ et $P(X=3)=\dfrac{3^3}{9^3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

On vérifie aisément que $\sum_{k=0}^{3} P(X=k)=1$.

Exemple 4 : $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k\geq1$, on note B_k (respectivement R_k) l'événement « La $k^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche (respectivement rouge) ».

$(X=1)$ est réalisé si on a une rouge au 1^{er} tirage : $P(X=1)=P(R_1)=\dfrac{1}{3}$.

$(X=2)$ est réalisé si on tire une blanche, puis une rouge : $(X=2)=B_1\cap R_2$. Il y a remise, donc les tirages sont indépendants. Donc les événements B_1 et R_2 sont indépendants : $P(X=2)=P(B_1\cap R_2)=P(B_1)P(R_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.
Si $k\geq 2$, l'événement $(X=k)$ est réalisé si l'on a tiré d'abord $(k-1)$ boules blanches, puis une boule rouge : $(X=k)=B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap R_k$. Tous ces événements sont indépendants puisqu'il y a remise. A chaque étape, la probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\frac{2}{3}$, et celle de tirer une boule rouge est égale à $\frac{1}{3}$.

Donc $P(X=k)=P(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap R_k)=P(B_1)\ldots P(B_{k-1})P(R_k)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.

On peut remarquer que la formule est encore vraie pour $k=1$.

Donc $P(X=k)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. On vérifie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1 \text{ en posant } j=k-1.$$

En effet, on reconnaît une série géométrique convergente car $-1<\frac{2}{3}<1$.

Exemple 5 : $X(\Omega)=\{-1,1,2,3\}$. Notons S_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ dé amène un six » pour $k\in\{1,2,3\}$. Les événements S_k sont tous indépendants, et puisque les dés sont honnêtes, leur probabilité est $P(S_k)=\frac{1}{6}$, et donc $P(\overline{S}_k)=\frac{5}{6}$ pour tout $k\in\{1,2,3\}$.

L'événement $(X=-1)$ est réalisé si l'on n'obtient aucun six.

Donc $P(X=-1)=P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\overline{S}_3)=P(\overline{S}_1)P(\overline{S}_2)P(\overline{S}_3)=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.

L'événement $(X=1)$ est réalisé si l'on obtient un seul six. Il est obtenu sur n'importe lequel des trois dés : $(X=1)=(S_1\cap\overline{S}_2\cap\overline{S}_3)\cup(\overline{S}_1\cap S_2\cap\overline{S}_3)\cup(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap S_3)$.
Par incompatibilité, puis indépendance des événements :

$$P(X=1)=P(S_1\cap\overline{S}_2\cap\overline{S}_3)+P(\overline{S}_1\cap S_2\cap\overline{S}_3)+P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap S_3)$$

$$P(X=1)=P(S_1)P(\overline{S}_2)P(\overline{S}_3)+P(\overline{S}_1)P(S_2)P(\overline{S}_3)+P(\overline{S}_1)P(\overline{S}_2)P(S_3)=3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$$

De même : $P(X=2)==3\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{72}$ et $P(X=3)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$.

k	-1	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

On vérifie aisément que $P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$.

4) Fonction de répartition

Définition : Etant donnée une variable aléatoire réelle X, on appelle fonction de répartition de X la fonction F définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=P(X\leq x)$.

C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, bien que X ne prenne pas toute valeur réelle.

Exemple 1 :

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Si $x<1$: $(X \le x)=\varnothing$, donc $F(x)=0$.

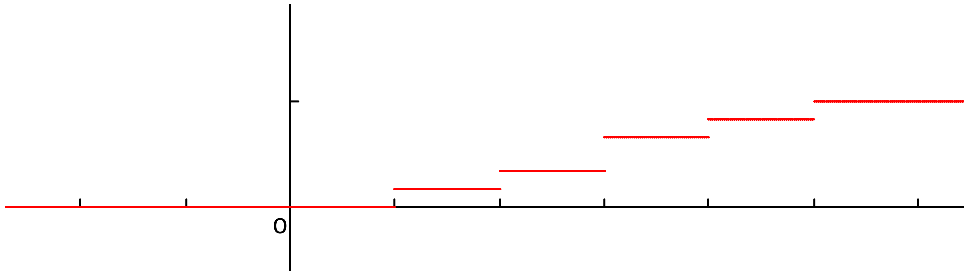
Si $1\le x<2$: $(X \le x)=(X=1)$, donc $F(x)=\frac{1}{6}$.

Si $2\le x<3$: $(X \le x)=(X=1)\cup(X=2)$, donc $F(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

Si $3\le x<4$: $(X \le x)=(X=1)\cup(X=2)\cup(X=3)$, donc $F(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Si $4\le x<5$: $(X \le x)=(X=1)\cup\ldots\cup(X=4)$, donc $F(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Si $x\ge 5$: $(X \le x)=(X=1)\cup\ldots\cup(X=5)=\Omega$, donc $F(x)=1$.



Si les valeurs prises par X sont rangées par ordre croissant ($x_1<x_2<\ldots$), alors :

$$\forall x\in]-\infty,x_1[\ \ F(x)=0 \qquad \forall x\in[x_k,x_{k+1}[\ \ F(x)=\sum_{i=1}^{k}p_i$$

La fonction F est donc en escalier et croissante.
De plus, si $X(\Omega)$ est fini ($x_1<x_2<\ldots<x_n$) : $\forall x\in[x_n,+\infty[\ \ F(x)=1$.

Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Donc deux cas peuvent se produire :

- Soit elle est majorée, et donc elle converge : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$. Sa limite majore toutes les valeurs prises par X, donc : $\forall x\in[a,+\infty[\ \ F(x)=P(\Omega)=1$.
- Soit elle n'est pas majorée, et donc elle diverge vers $+\infty$. On peut remarquer que $\forall x\in[x_n,+\infty[\quad F(x_n)\le F(x)\le 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}F(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k=1$.

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

<u>Théorème</u> : Si X est une variable aléatoire discrète, sa fonction de répartition est une fonction en escalier, croissante sur $\mathbb{R}$, qui vérifie : $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

Elle permet d'exprimer les probabilités de certains événements liés à X :

$\boxed{P(X\le a)=F(a)}$ $\boxed{P(X>a)=1-F(a)}$ $\boxed{P(a<X\le b)=F(b)-F(a)}$

En effet : $(X>a)=\overline{(X\le a)}$ et $(X\le b)=(X\le a)\cup(a<X\le b)$ (incompatibles).

Elle permet même de retrouver la loi de probabilité de X : $\boxed{p_1=F(x_1)}$ et pour tout entier $k\ge 2$, on a $\boxed{p_k=F(x_k)-F(x_{k-1})}$ En effet, parfois, il est plus facile de déterminer la fonction de répartition de X que sa loi.

Exemple : On lance deux dés honnêtes, et X est le plus grand des deux numéros obtenus. On a donc $X(\Omega)=[\![1,6]\!]$. Alors, on peut remarquer que, si l'on obtient

$\omega=(a,b)$, alors $(X \leq x)$ est réalisé si et seulement si $a \leq x$ et $b \leq x$. Or, en jetant un dé, la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à k est $\frac{k}{6}$. Donc, puisque les deux lancers de dés sont indépendants : $F(k)=P(X \leq k)=\frac{k^2}{36}$.

Donc : $P(X=1)=\frac{1}{36}$ et $P(X=k)=\frac{k^2-(k-1)^2}{36}=\frac{2k-1}{36}$ si $k \geq 2$.
Cette formule est d'ailleurs valable pour tout entier k de $X(\Omega)=[\![1,6]\!]$.

Vérification : $\sum_{k=1}^{6} P(X=k)=\sum_{k=1}^{6} \frac{2k-1}{36}=\frac{1}{36}\left(2\sum_{k=1}^{6} k-\sum_{k=1}^{6} 1\right)=\frac{1}{36}\left(2\frac{6\times 7}{2}-6\right)=1$.

5) <u>Espérance mathématique</u>

<u>Définition</u> : Soit X une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega)=\{x_k / k \in I\}$ pour laquelle on pose : $\forall k \in I \quad p_k=P(X=x_k)$. Alors :

- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini (donc I fini), la variable X admet une espérance.
- Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable (donc I infini), la variable X admet une espérance à condition que la série de terme général $x_k p_k$ soit absolument convergente.

Dans les deux cas, l'espérance de X est le réel : $E(X)=\sum_{k\in I} x_k P(X=x_k)=\sum_{k\in I} x_k p_k$.

Lorsque l'ensemble $X(\Omega)$ est fini, l'espérance mathématique existe donc toujours, mais pas lorsque l'ensemble $X(\Omega)$ est infini dénombrable. Donc certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance mathématique.
L'espérance mathématique est la valeur « moyenne » prise par la variable aléatoire X.

<u>*Exemple 1*</u> : $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}$. Donc $E(X)=3$.
On peut remarquer que ce résultat était prévisible étant donnée la symétrie du tableau.

<u>*Exemple 2*</u> : $E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}$. Donc $E(X)=\frac{3}{2}$.

<u>*Exemple 3*</u> : $E(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}$. Donc $E(X)=1$.

<u>*Exemple 4*</u> : Ici la variable X est infinie, donc il y a un problème de convergence. Mais les valeurs étant positives, la convergence absolue équivaut à la convergence.

Or ici : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad kP(X=k)=\frac{1}{3}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$. On reconnaît une série dérivée une fois d'une série géométrique. Elle est convergente car $-1<\frac{2}{3}<1$. Donc :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=3.$$

<u>*Exemple 5*</u> : $E(X)=-1\times\frac{125}{216}+1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}$. Donc : $E(X)=-\frac{17}{216}$.
Cela signifie qu'en jouant à ce jeu, en moyenne, on perdra !

<u>Définition</u> : Une variable aléatoire X est centrée si $E(X)=0$.

On dit qu'un jeu est équitable si le gain X est une variable aléatoire centrée.

Remarque : Lorsque Ω est fini ou infini dénombrable, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
En particulier, pour tout $k \in I$, on a : $P(X = x_k) = \sum_{\omega \in (X = x_k)} P(\{\omega\})$.

Donc : $x_k P(X = x_k) = \sum_{\omega \in (X = x_k)} x_k P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in (X = x_k)} X(\omega) P(\{\omega\})$.

Donc $E(X) = \sum_{k \in I} \left(\sum_{\omega \in (X = x_k)} X(\omega) P(\{\omega\}) \right)$. Donc : $\boxed{E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})}$

Cette nouvelle expression de l'espérance ne va pas servir dans les calculs, mais va permettre de démontrer quelques propriétés de l'espérance.
Tout d'abord, si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la composée de φ avec une variable aléatoire X, application de Ω dans $\mathbb{R}$, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, donc une variable aléatoire notée $Y = \varphi(X)$.

Théorème de transfert :
Si $Y = \varphi(X)$, alors $E(Y) = \sum_{k \in I} \varphi(x_k) p_k$ sous réserve de convergence absolue.

En particulier : $E(aX + b) = aE(X) + b$ $\qquad$ $E(X^2) = \sum_{k \in I} (x_k)^2 p_k$

En effet, si $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire :

$$E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{k \in I} \left(\sum_{\omega \in (X = x_k)} Y(\omega) P(\{\omega\}) \right).$$

Or $Y = \varphi(X)$, donc si $\omega \in (X = x_k)$, on a $X(\omega) = x_k$, et donc $Y(\omega) = \varphi(x_k)$.

Donc : $E(Y) = \sum_{k \in I} \left(\sum_{\omega \in (X = x_k)} \varphi(x_k) P(\{\omega\}) \right) = \sum_{k \in I} \varphi(x_k) \left(\sum_{\omega \in (X = x_k)} P(\{\omega\}) \right)$.

Donc: $E(Y) = \sum_{k \in I} \varphi(x_k) P(X = x_k) = \sum_{k \in I} \varphi(x_k) p_k$.

L'intérêt est de pouvoir calculer l'espérance de $Y = \varphi(X)$ sans avoir à déterminer sa loi de probabilité.
En particulier, si $Y = X^2$: $E(X^2) = \sum_{k \in I} (x_k)^2 p_k$.

Et si $Y = aX + b$:

$$E(Y) = \sum_{k \in I} (ax_k + b) p_k = \sum_{k \in I} (ax_k p_k + bp_k) = a\left(\sum_{k \in I} x_k p_k \right) + b\left(\sum_{k \in I} p_k \right) = aE(X) + b.$$

Si $a = 1$ et $b = -E(X)$, on a $Y = X - E(X)$ et $E(Y) = E(X) - E(X) = 0$.

Définition : Si X est une variable aléatoire discrète qui possède une espérance, la variable aléatoire $X - E(X)$ est la variable centrée associée à X.

Plus généralement, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé, ce sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$, donc la somme $Z = X + Y$ est une variable aléatoire discrète.

$$E(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) + Y(\omega)] P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\}).$$

Théorème : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (linéarité de l'espérance).

6) Variance

Les autres caractéristiques mesurent la dispersion de la variable aléatoire.

Définition : Etant donnée une variable aléatoire discrète X qui possède une espérance $E(X)$, on appelle variance de X le réel, quand il existe :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Les deux expressions de $V(X)$ sont bien égales. En effet, en posant $m = E(X)$:

$E([X-m]^2) = E\left[X^2 - 2mX + m^2\right] = E(X^2) - 2mE(X) + m^2$ par linéarité.

Donc $E([X-m]^2) = E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2$.

L'existence de $V(X)$ est soumise à l'existence de $E(X^2)$ puisque $E(X)$ existe.

Exemple 1 : $E(X^2) = \sum_{k=1}^{5} k^2 P(X = k) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} = \frac{32}{3}$

Donc $V(X) = \frac{32}{3} - 9 = \frac{5}{3}$.

Exemple 2 : $E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X = k) = 0^2 \times \frac{1}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{5}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} = \frac{17}{6}$

Donc $V(X) = \frac{17}{6} - \frac{9}{4} = \frac{7}{12}$.

Exemple 3 : $E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X = k) = 0^2 \times \frac{8}{27} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{1}{27} = \frac{5}{3}$.

Donc $V(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$.

Exemple 4 : Pour calculer $E(X^2)$ et donc $V(X)$, il est plus simple de calculer d'abord $E[X(X-1)]$ car on fera ainsi apparaître des séries usuelles dont on connaît la somme.

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

On reconnaît une série dérivée deux fois d'une série géométrique. Elle est convergente car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc : $E(X^2) - E(X) = E[X(X-1)] = \frac{2}{9} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^3} = 12$. Or $E(X) = 3$.

Donc $E(X^2) = 15$ et $V(X) = 15 - 9 = 6$.

Exemple 5 : $E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{125}{216} + 1^2 \times \frac{25}{72} + 2^2 \times \frac{5}{72} + 3^2 \times \frac{1}{216} = \frac{269}{216}$.

Donc : $V(X) = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{57815}{46656}$.

Propriétés : $V(X) \geq 0$

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

La positivité de $V(X)$ vient de la première expression (carré donc positif).

Si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$. Donc $Y - E(Y) = a[X - E(X)]$.

Donc $V(Y)=E([Y-E(Y)]^2)=E(a^2[X-E(X)]^2)=a^2E([X-E(X)]^2)=a^2V(X)$.

7) Ecart-type

En rappelant que $V(X)\geq 0$:

Définition : Etant donnée une variable aléatoire discrète X qui possède une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, on appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

On verra que c'est l'écart-type qui a une signification pour mesurer la dispersion de X autour de sa moyenne. En effet, la variance était homogène à X^2 tandis que l'écart-type est homogène à X.

Définition : Une variable aléatoire X qui possède un écart-type est réduite si $\sigma(X)=1$.

On a vu que $V(aX+b)=a^2V(X)$. Donc $\sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2V(X)}=|a|\sqrt{V(X)}$.

Propriété : $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

En particulier si $a=\dfrac{1}{\sigma(X)}$ et $b=-\dfrac{E(X)}{\sigma(X)}$: $\sigma(aX+b)=1$ et $E(aX+b)=0$.

Définition : Si X est une variable aléatoire qui possède une espérance notée $E(X)=m$ et un écart-type noté $\sigma(X)=\sigma$ non nul, la variable aléatoire $X^*=\dfrac{X-m}{\sigma}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

8) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour la démontrer, on va d'abord démontrer une autre inégalité.

Inégalité de Markov : Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et dont l'espérance est notée m, alors : $\forall a>0\quad P(X\geq a)\leq\dfrac{m}{a}$.

Démonstration :

On suppose que $X(\Omega)=\{x_i\,/\,i\in I\}$. Donc $m=E(X)=\sum_{i\in I}x_iP(X=x_i)$.

Parmi les éléments x_i de $X(\Omega)$, certains vérifient $x_i\geq a$ et d'autres non. On note J l'ensemble des indices i tels que $x_i\geq a$ et donc $\overline{J}$ les autres.

Donc : $m=\sum_{i\in J}x_iP(X=x_i)+\sum_{i\in\overline{J}}x_iP(X=x_i)$.

Tous les termes des sommes sont positifs (car X ne prend que des valeurs positives et les autres termes sont des probabilités), donc : $m\geq\sum_{i\in J}x_iP(X=x_i)$.

Or $\forall i\in J\quad x_i\geq a$. Donc : $m\geq a\sum_{i\in J}P(X=x_i)$.

Or $P(X\geq a)=\sum_{i\in J}P(X=x_i)$. Donc $m\geq aP(X\geq a)$, c'est-à-dire : $P(X\geq a)\leq\dfrac{m}{a}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Si X est une variable aléatoire d'espérance m et d'écart-type σ, alors $\forall\varepsilon>0\quad P(|X-m|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Démonstration : On applique l'inégalité de Markov à $Y=(X-m)^2$. Y ne prend que des valeurs positives et : $E(Y)=E[(X-m)^2]=V(X)=\sigma^2$.

Donc $\forall a > 0 \quad P(Y \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{a}$. En particulier pour $a = \varepsilon^2$: $P[(X-m)^2 \geq \varepsilon^2] \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Or : $(X-m)^2 \geq \varepsilon^2 \Leftrightarrow |X-m| \geq \varepsilon$. Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X-m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Et par conséquent : $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X-m| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Remarque 1 : Ces inégalités justifient le fait que l'écart-type ou la variance mesurent la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne.
En particulier, si la variance est nulle, alors $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X-m| < \varepsilon) = 1$. Donc $P(X = m) = 1$. La variable aléatoire *X* est presque sûrement égale à *m*.
Remarque 2 : Ces inégalités n'ont d'intérêt que si $\varepsilon > \sigma$. Par exemple, cela permet de voir qu'il y a au moins 75% de chances que *X* prenne ses valeurs dans $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ car $P(|X-m| < 2\sigma) \geq \dfrac{3}{4}$.

9) Moments d'ordre *r*

Définition : Soit *r* un entier naturel et *X* une variable aléatoire discrète. On appelle moment d'ordre *r* de *X* l'espérance de X^r si elle existe : $m_r(X) = E(X^r)$.

Pour toute variable aléatoire discrète : $m_0(X) = 1$ et $m_1(X) = E(X)$.
Mais la variance n'est pas le moment d'ordre 2. C'est un moment centré d'ordre 2.

Définition : Soit *r* un entier naturel et *X* une variable aléatoire discrète qui possède une espérance $E(X)$. On appelle moment centré d'ordre *r* de *X* le moment d'ordre *r* de la variable $X - E(X)$ centrée associée à *X* : $\mu_r(X) = E([X - E(X)]^r)$.

II – Lois usuelles finies

Il s'agit de repérer quelques situations souvent rencontrées pour éviter de refaire à chaque fois les calculs.

1) Variable certaine

Définition : Une variable aléatoire *X* est certaine si elle est constante, donc s'il existe *a* tel que $X(\Omega) = \{a\}$ et $P(X = a) = 1$.

C'est une variable aléatoire surtout utilisée comme outil.
$E(X) = a \times 1 = a$ et $V(X) = E[(X-a)^2] = E(0) = 0$.

Théorème : Si *X* est la variable certaine égale à *a*, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

2) Loi uniforme

Situation modèle : Il s'agit du tirage, dans le cas d'équiprobabilité, d'un élément parmi *n* éléments numérotés de 1 à *n* et *X* est le numéro tiré.

Définition : Une variable aléatoire *X* suit la loi discrète uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, si :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \qquad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Calcul de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Calcul de la variance :

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)(n-1)}{12}=\frac{n^2-1}{12}.$$

<u>Théorème</u> : Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$, alors $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

On peut définir de même la loi uniforme sur un autre intervalle $[\![a,b]\!]$. Il contient $(b-a+1)$ entiers qui doivent tous avoir la même probabilité d'apparition.

<u>Définition</u> : Soient a et b deux entiers naturels tels que $a\le b$. Une variable aléatoire X suit la loi discrète uniforme sur $[\![a,b]\!]$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$, si :

$$X(\Omega)=[\![a,b]\!] \qquad \forall k\in[\![a,b]\!]\quad P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}.$$

On peut remarquer que $Y=X-a+1$ prend ses valeurs dans $[\![1,b-a+1]\!]$ et que toutes ses valeurs ont la même probabilité d'apparition. Donc : $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(b-a+1)$.

Donc $E(Y)=\dfrac{b-a+2}{2}$ et $V(Y)=\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$. Or $X=Y+a-1$. Donc :

$$E(X)=E(Y)+a-1=\frac{b-a+2}{2}+a-1=\frac{a+b}{2}\text{ et }V(X)=V(Y)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

<u>Théorème</u> : Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$, $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$ où $n=\text{Card}([\![a,b]\!])$.

3) <u>Loi de Bernoulli</u>

<u>Définition</u> : On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire modélisée par un univers Ω qui ne contient que deux éventualités baptisées « succès » et « échec ».

<u>Situation modèle</u> : Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, p est la probabilité de succès et X est le nombre de succès.

<u>Définition</u> : Une variable aléatoire discrète X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$, si :

$$X(\Omega)=\{0,1\} \qquad P(X=1)=p \qquad P(X=0)=1-p.$$

De manière générale, une variable aléatoire X est une variable de Bernoulli si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles.

<u>Calcul de l'espérance</u> :

$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$.

<u>Calcul de la variance</u> :

$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$. Donc $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$.

<u>Théorème</u> : Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$.

Une telle variable, bien que très simple, est importante car elle peut caractériser la réalisation d'un événement.

<u>Définition</u> : Soit A un événement dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement A la variable aléatoire X (souvent notée 1_A ou χ_A) qui prend la valeur 1 si A est réalisé et 0 sinon :

$$X(\omega)=1 \text{ si } \omega\in A \qquad X(\omega)=0 \text{ si } \omega\notin A$$

Elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=P(A)$.

4) Loi binomiale

Exemple : Dans une urne qui contient des boules blanches en proportion p, on effectue une succession de n tirages avec remise d'une boule. X est le nombre de boules blanches obtenues.

Donc $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et l'événement $(X = k)$ est réalisé si l'on obtient k boules blanches et $(n-k)$ autres dans n'importe quel ordre. Il y a $\binom{n}{k}$ ordres possibles et pour chacun de ces ordres, la probabilité est la même : $p^k(1-p)^{n-k}$ puisque le tirage se fait avec remise, donc de manière indépendante.

Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Définition : On appelle schéma de Bernoulli la répétition en nombre fini ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions et de manière indépendante.

Situation modèle : Il s'agit d'un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p. X est le nombre total de succès.

Exemples : Nombre de boules blanches obtenues dans un tirage successif avec remise de n boules dans une urne où la proportion de boules blanches est p.
Nombre d'objets défectueux quand on teste n objets indépendamment.
Nombre de feux rouges arrêtant un autobus qui rencontre n feux tricolores non synchronisés.

Définition : Une variable aléatoire discrète X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, si :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour les calculs, on pose souvent $q = 1 - p$ (probabilité d'échec).

Calcul de l'espérance :

D'abord, on remarque : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$.

$\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Or, si $k \geq 1$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Donc $\displaystyle E(X) = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-j-1}$ en posant $j = k-1$.

Donc $\displaystyle E(X) = np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{(n-1)-j} = np(p+q)^{n-1} = np$.

Calcul de la variance :

La même idée peut être retenue pour calculer $E[X(X-1)]$.

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Or, si $k \geq 2$: $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Donc :

$$E[X(X-1)] = n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^{j+2} q^{n-2-j} \text{ avec } j = k-2.$$

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{n-2-j} = n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} \text{ si } n \geq 2.$$

Donc $E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$, donc $E(X^2) - E(X) = n(n-1)p^2$.

Donc : $E(X^2) = E(X) + n(n-1)p^2 = np + n(n-1)p^2$.

Donc $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$.

<u>Théorème</u> : Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

<u>*Exemple 3*</u> : Dans l'urne, lorsque l'on tire une boule, il y a deux cas possibles : rouge ou pas. On a donc une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la boule est rouge » de probabilité $p = \frac{1}{3}$. Cette épreuve est répétée $n = 3$ fois dans les mêmes conditions et de manière indépendante car il y a remise. Et X est le nombre de boules rouges, donc le nombre de succès. Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$: $\forall k \in \{0,1,2,3\}$ $P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$.

Et donc $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ et $V(X) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

5) <u>Loi hypergéométrique</u>

<u>*Exemple*</u> : Dans une urne qui contient N boules avec une proportion p de boules blanches (il y a donc Np boules blanches), on effectue une succession de n tirages sans remise d'une boule. X est le nombre de boules blanches obtenues.
Donc $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et l'événement $(X = k)$ est réalisé si l'on obtient k boules blanches et $(n-k)$ autres dans n'importe quel ordre.

Il y a équiprobabilité et $\text{Card}\,\Omega = A_N^n$. Pour calculer $\text{Card}\,(X = k)$:

- on choisit les places des boules blanches : il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles.
- on choisit les k boules blanches successivement sans remise parmi les Np boules blanches : il y a A_{Np}^k choix possibles.
- on choisit les $(n-k)$ autres boules successivement sans remise parmi les $N(1-p)$ boules non blanches : il y a $A_{N(1-p)}^{n-k}$ choix possibles.

Donc : $P(X=k) = \dfrac{\binom{n}{k} A_{Np}^k A_{N(1-p)}^{n-k}}{A_N^n} = \dfrac{n!}{A_N^n} \times \dfrac{A_{Np}^k}{k!} \times \dfrac{A_{N(1-p)}^{n-k}}{(n-k)!}$.

Donc : $P(X=k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Cette dernière égalité montre que le problème est identique si l'on effectue des tirages simultanés.

<u>Situation modèle</u> : Il s'agit d'un tirage simultané ou successif sans remise de n individus dans une population de N individus qui comporte deux catégories A et B, et p est la proportion de la catégorie A (avec Np entier). X est le nombre d'individus de la catégorie A obtenus.

<u>Définition</u> : Une variable aléatoire discrète X suit la loi hypergéométrique de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ avec $Np \in \mathbb{N}^*$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{H}(N,n,p)$, si :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \forall k \in [\![0,n]\!] \quad P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Pour les calculs, on posera aussi $q = 1-p$. D'abord, on vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$.

On rappelle la <u>formule de Vandermonde</u> : $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \times \binom{Np+N(1-p)}{n} = 1$$

<u>Calcul de l'espérance</u> :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}.$$

Or on a vu que : $k\binom{Np}{k} = Np\binom{Np-1}{k-1}$. Donc : $E(X) = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{Np-1}{k-1}\binom{N(1-p)}{n-k}$.

En posant $j = k-1$: $E(X) = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{Np-1}{j}\binom{N(1-p)}{n-1-j}$. Donc :

$$E(X) = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{Np \times (N-1)!n!(N-n)!}{N!(n-1)!(N-n)!} = np \quad \text{(formule de Vandermonde)}$$

<u>Calcul de la variance</u> :

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Or on a vu que : $k(k-1)\binom{Np}{k} = Np(Np-1)\binom{Np-2}{k-2}$.

Donc : $E[X(X-1)] = \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} \binom{Np-2}{k-2}\binom{N(1-p)}{n-k}$.

En posant $j = k-2$: $E[X(X-1)] = \dfrac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-2} \binom{Np-2}{j}\binom{N(1-p)}{n-2-j}$.

Donc d'après la formule de Vandermonde :

$$E[X(X-1)] = \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2} = \frac{Np(Np-1)\times(N-2)!n!(N-n)!}{N!(n-2)!(N-n)!}$$

Donc : $E(X^2) - E(X) = \dfrac{np(Np-1)(n-1)}{N-1}$. Donc : $E(X^2) = \dfrac{np(Np-1)(n-1)}{N-1} + np$.

$$V(X) = \frac{np(Np-1)(n-1)}{N-1} + np - (np)^2 = np\frac{nNp - Np - n + 1 + N - 1 - nNp + np}{N-1}.$$

Donc : $V(X) = np\dfrac{-Np - n + N + np}{N-1} = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(N,n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.

Dans le cadre du programme, seule la formule de l'espérance est à retenir.

Exemple 2 : On est exactement dans la situation modèle. L'urne contient $N = 10$ boules avec une proportion $p = \dfrac{1}{2}$ de boules rouges et on extrait simultanément $n = 3$ boules. X est le nombre de boules rouges obtenues. Donc : $X \hookrightarrow \mathscr{H}\left(10,3,\dfrac{1}{2}\right)$.

Donc : $\forall k \in \{0,1,2,3\}$ $P(X = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{120}$.

Et donc $E(X) = 3\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $V(X) = 3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10-3}{10-1} = \dfrac{7}{12}$.

Remarque : Ces résultats ressemblent à ceux de la loi $\mathscr{B}(n,p)$: seule la variance diffère. Et on peut remarquer que si N tend vers l'infini, la variance de $\mathscr{H}(N,n,p)$ tend vers celle de $\mathscr{B}(n,p)$. Pour N très grand, en moyenne, il revient sensiblement au même de faire des tirages avec ou sans remise. De manière plus précise, si N tend vers $+\infty$, n et p restant fixes :

$\dbinom{N}{n} = \dfrac{N!}{n!(N-n)!} = \dfrac{N(N-1)...(N-n+1)}{n!}$. Donc : $\dbinom{N}{n} \sim \dfrac{N^n}{n!}$.

De même : $\dbinom{Np}{k} \sim \dfrac{(Np)^k}{k!}$ et $\dbinom{N(1-p)}{n-k} \sim \dfrac{[N(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}$.

Donc : $P(X = k) \sim \dfrac{(Np)^k[N(1-p)]^{n-k}n!}{k!(n-k)!N^n}$. Donc : $P(X = k) \sim \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Donc lorsque N est très grand devant n, la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N,n,p)$ peut être approchée par la loi binômiale $\mathscr{B}(n,p)$.

C'est un problème de comparaison de N et n car on néglige des termes de la forme $\dfrac{n}{N}$.

Dans la pratique, on utilise cette approximation lorsque $\dfrac{n}{N} \leq 0{,}1$.

III – Lois discrètes usuelles infinies

1) Loi géométrique

Situation modèle : Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est *p*. On la répète dans les mêmes conditions et de manière indépendante jusqu'à ce que l'on obtienne un succès. *X* est le rang du premier succès.
Donc $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et l'événement $(X=k)$ est réalisé lorsque l'on a obtenu $(k-1)$ échecs, puis un succès. Donc, étant donnée l'indépendance : $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

Définition : Une variable aléatoire *X* suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si :

$$X(\Omega)=\mathbb{N}^* \qquad \forall k\in\mathbb{N}^* \ \ P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.$$

Pour les calculs, on posera aussi $q=1-p$ (probabilité d'échec).

D'abord, on vérifie que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=1$.

On obtient une série géométrique convergente car $-1<q<1$ et, en posant $j=k-1$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}=p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j}=p\times\frac{1}{1-q}=p\times\frac{1}{p}=1.$$

Calcul de l'espérance :
Dans le calcul de $E(X)$, on obtient la série dérivée de la série précédente (donc convergente) :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}=p\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1}=p\times\frac{1}{(1-q)^2}=p\times\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Calcul de la variance :
De même, dans le calcul de $E[X(X-1)]$, on obtient la série dérivée de la série précédente (donc convergente) :

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)pq^{k-1}=pq\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}.$$

$$E(X^2)-E(X)=E[X(X-1)]=p\times\frac{2}{(1-q)^3}=p\times\frac{2}{p^3}=\frac{2}{p^2} \text{ et } E(X^2)=\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Donc $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}-\left(\dfrac{1}{p}\right)^2=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}$.

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $E(X)=\dfrac{1}{p}$ et $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

Exemple 4 : Dans l'urne, lorsque l'on tire une boule, il y a deux cas possibles : rouge ou pas. On a donc une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la boule est rouge » de probabilité $p=\dfrac{1}{3}$. Cette épreuve est répétée indéfiniment dans les mêmes conditions et de manière indépendante car il y a remise. Et *X* est le rang de la première boule rouge, donc du premier succès. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$: $\forall k\in\mathbb{N}^* \ \ P(X=k)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$.

Et donc $E(X)=\dfrac{1}{1/3}=3$ et $V(X)=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=6$.

2) Loi de Poisson

Situation modèle : Il n'y en a pas vraiment. Les lois de Poisson mesurent par exemple des flux d'individus pendant un temps donné : nombre de clients à une caisse de supermarché pendant une heure, ou nombre de voitures se présentant à un péage d'autoroute pendant une période fixée.

Définition : Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda\in]0,+\infty[$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et si $\forall k\in\mathbb{N}\ \ P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

D'abord, on vérifie que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=1$.

On reconnaît une série exponentielle (donc convergente) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=1.$$

Calcul de l'espérance :

Dans le calcul de $E(X)$, après avoir posé $j=k-1$, on reconnaît la même série :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\times\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}.$$

Donc : $E(X)=\lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda$.

Calcul de la variance :

De même, en posant $j=k-2$:

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)P(X=k)=e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}.$$

Donc : $E(X^2)-E(X)=E[X(X-1)]=\lambda^2e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda^2$ et $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$.

Donc $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X)=\lambda$ et $V(X)=\lambda$.

Les calculs de probabilités sur la loi de Poisson se font soit à la calculatrice, directement à partir des formules, soit par lecture des tables : elles donnent soit la loi de probabilité, soit la fonction de répartition, soit les deux.

Exemple : On suppose que $\lambda=5$ et on veut calculer $P(X=7)$ et $P(3\le X\le 7)$.

Par la calculatrice : $P(X=7)=\dfrac{5^7}{7!}e^{-5}\approx 0{,}104445$.

$$P(3\le X\le 7)=\left(\sum_{k=3}^{7}\frac{5^k}{k!}\right)e^{-5}\approx 0{,}741976.$$

Par les tables : $P(X=7)=F(7)-F(6)\approx 0{,}8666-0{,}7622\approx 0{,}1044$.

$$P(3\le X\le 7)=F(7)-F(2)\approx 0{,}8666-0{,}1247\approx 0{,}7419.$$

Remarque : Cette loi de Poisson est surtout importante car c'est une « loi limite ». En effet, supposons qu'une variable aléatoire X suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et voyons ce qui se passe quand n tend vers $+\infty$. Pour tout entier k fixé et $n \geq k$, on a vu que : $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$. Donc : $P(X = k) \sim \frac{(np)^k}{k!} e^{(n-k)\ln(1-p)}$.

$n - k \sim n$ et si p est petit : $\ln(1-p) \sim -p$. Donc $(n-k)\ln(1-p) \sim -np$. Donc : $(n-k)\ln(1-p) = -np(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Donc : $P(X = k) \sim \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} e^{-np\varepsilon_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, donc si p est suffisamment petit pour que np ne tend pas vers l'infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} np\varepsilon_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-np\varepsilon_n} = 1$. Donc : $P(X = k) \sim \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$.

Donc si n est très grand, p assez petit et np pas trop grand, la loi $\mathscr{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$ (donc de même espérance).

Dans la pratique, on utilise cette approximation lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 10$.