ESPACES PROBABILISES

I - Expériences aléatoires

Le calcul des probabilités a été élaboré en relation avec des situations externes aux mathématiques, le but étant une prévision d'événements futurs et une aide à la prise de décision (tarif d'assurance vie, évaluation d'un risque, transmission d'un caractère génétique, nombre de lignes téléphoniques à installer,...). Ces situations sont d'abord éventuellement simulées, puis modélisées, par exemple par des tirages successifs avec ou sans remise ou des tirages simultanés.

1) Description

Définition : Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat dépend du hasard, c'est-à-dire ne peut être prévu avec certitude avant sa réalisation avec les informations dont on dispose.

Dans le mot expérience, il y a également deux choses implicites :
- la réalisation doit obéir à un certain protocole défini de manière précise (par exemple, si l'on jette un dé, on n'acceptera pas que le dé soit « cassé »).
- la réalisation peut être refaite autant de fois que l'on veut. Ce dernier point peut être complètement irréaliste : destruction de l'objet. Dans ce cas, l'expérience est seulement imaginée ou simulée et on se base sur un raisonnement et non pas sur une constatation.

Comme on ne peut pas prévoir exactement le résultat avant de l'avoir réalisée, on commence par recenser tout ce qui peut arriver, tout ce qui est observable.

Définition : On appelle éventualité tout résultat possible à priori de l'expérience. L'ensemble Ω de toutes les éventualités s'appelle l'univers des possibles ou des éventualités ou l'espace fondamental.

Exemple 1 : On lance un dé et il doit tomber sur une face : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Exemple 2 : On lance une pièce jusqu'à ce que l'on obtienne Pile : Ω est l'ensemble des suites infinies de « Pile » et de « Face », donc un ensemble infini, mais dont on peut numéroter les événements. On dira « dénombrable ».

Exemple 3 : Durée de vie d'un individu dans une population (personne ou objet) : Ω est une partie de $\mathbb{R}$, donc infini et non dénombrable.

Il y a donc trois types d'expériences aléatoires : L'univers Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable. Le troisième cas sera abordé en seconde année. **Dans ce chapitre, on se limite aux cas où Ω est fini ou infini dénombrable**.

2) Evénements

Lorsque l'on étudie une expérience aléatoire, on s'intéresse à la réalisation d'une ou plusieurs éventualités.

Définition : Etant donnée une expérience aléatoire dont l'espace fondamental est Ω, un événement est une partie de Ω. L'éventualité ω réalise l'événement A si $\omega \in A$.

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des événements. Le plus souvent : $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Mais parfois, on ne s'intéresse pas à toutes les parties de Ω.

Exemple : Dans une urne qui contient 2 boules rouges numérotées de 1 à 2 et 4 boules vertes numérotées de 1 à 4, on tire une boule. Donc : $\Omega = \{R_1, R_2, V_1, V_2, V_3, V_4\}$.

Suivant ce que l'on veut observer, on va s'intéresser à différents événements :
- Si on ne regarde que la couleur, le numéro n'a pas d'importance, donc on ne s'intéresse qu'à $R = \{R_1, R_2\}$ et $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$.

- Par contre, si on ne regarde que les numéros, la couleur n'a pas d'importance, donc on s'intéresse à $N_1=\{R_1,V_1\}$, $N_2=\{R_2,V_2\}$, $N_3=\{V_3\}$ et $N_4=\{V_4\}$, mais aussi à des événements comme par exemple : « Le numéro est pair » , donc à $N_2\cup N_4$ …

L'ensemble $\mathscr{A}$ des événements est donc une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui doit vérifier certaines propriétés de cohérence : par exemple si on a un événement, il faut pouvoir parler de son contraire, il faut pouvoir parler des événements $A\cup B$, $A\cap B$, …

<u>Définition</u> : Une tribu ou σ - algèbre est un sous ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie :
1. $\Omega\in\mathscr{A}$.
2. $\forall A\in\mathscr{A}\quad \overline{A}\in\mathscr{A}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\in\mathscr{A}$.

L'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n$ est l'événement qui est réalisé si l'un au moins des événements A_n est réalisé. Par exemple si on lance indéfiniment un dé et si A_n est l'événement « le lancer *n* donne 6 », $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ est l'événement « obtenir au moins un 6 ».

Si Ω est fini, le troisième axiome se réduit à : $\forall A\in\mathscr{A}\quad\forall B\in\mathscr{A}\quad A\cup B\in\mathscr{A}$.

<u>Propriétés</u> : Si $\mathscr{A}$ est une tribu ou σ - algèbre, alors :
1. $\varnothing\in\mathscr{A}$.
2. $\forall A\in\mathscr{A}\quad\forall B\in\mathscr{A}\quad A\cup B\in\mathscr{A}\quad A\cap B\in\mathscr{A}\quad A-B\in\mathscr{A}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty}A_n\in\mathscr{A}$.

Ces propriétés découlent des propriétés des intersections, réunions et complémentaire.
<u>*Exemple*</u> : $\mathscr{A}=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathscr{A}=\{\varnothing,A,\overline{A},\Omega\}$ sont des tribus.
Dans l'exemple précédent, la première description donne $\mathscr{A}=\{\varnothing,R,V,\Omega\}$.
Et dans la deuxième description, $\mathscr{A}$ est la plus petite tribu contenant N_1, N_2, N_3 et N_4 (on dit tribu engendrée par N_1, N_2, N_3 et N_4) : elle contient ces événements, leurs contraires, les intersections et les réunions de tous ces événements.
Le plus souvent possible, on prendra $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$. Ce n'est que lorsque Ω est infini non dénombrable que la notion de tribu est réellement importante.

<u>Définition</u> : On appelle événement élémentaire tout événement qui ne contient qu'un seul élément de Ω (singleton).

Si $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_n\}$, il y a *n* événements élémentaires : $\{\omega_1\},\dots,\{\omega_n\}$.

<u>Vocabulaire</u> : $\overline{A}$ est l'événement contraire de *A* (réalisé quand *A* n'est pas réalisé).
$\varnothing$ est l'événement impossible (jamais réalisé).
Ω est l'événement certain (toujours réalisé).
$A\cup B$ est l'événement *A* ou *B*.
$A\cap B$ est l'événement *A* et *B*.
Si $A\cap B=\varnothing$, les événements *A* et *B* sont incompatibles.
Si $A\subset B$, l'événement *A* implique l'événement *B*.

<u>Définition</u> : Un espace probabilisable est un couple $(\Omega,\mathscr{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

3) **Probabilité**

La description précédente est insuffisante puisque toutes les éventualités n'ont pas toutes la même « chance » d'être réalisées.
Par exemple dans le cas précédent, il y a deux fois plus de boules vertes que de boules rouges, donc deux fois plus de chances de tirer une boule verte.
On est donc amené à attribuer à chaque éventualité un nombre qui représente ses « chances d'apparition ». En fait, ce que l'on peut principalement faire, c'est comparer ces chances d'apparition. C'est donc un pourcentage ou un nombre compris entre 0 et 1. Ce nombre est déterminé soit par un raisonnement (le dé est parfait, donc toutes les faces ont les mêmes chances d'apparition : une chance sur 6), soit de manière expérimentale à l'issue d'une étude statistique (on a constaté qu'à l'issue d'un très grand nombre de répétitions de l'expérience, la fréquence d'apparition d'une éventualité se stabilise autour d'une valeur).
Pour chaque événement *A*, on additionnera les nombres associés à chacun des éléments de *A*. Et comme il y a 100% de chances que Ω soit réalisé, la somme de tous ces nombres doit être égale à 1.
On aboutit ainsi à la définition donnée en Terminale dans le cas d'un ensemble fini :

> On définit une probabilité sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ par la donnée de *n* nombres réels $p_1, ..., p_n$ compris entre 0 et 1 tels que $p_1 + ... + p_n = 1$. La probabilité de $\varnothing$ est $P(\varnothing) = 0$ et la probabilité de tout événement *A* non vide est la somme des p_i pour tous les ω_i qui appartiennent à *A*.

Exemple : Dans l'exemple $p_V = 2p_R$ et $p_V + p_R = 1$. Donc : $p_R = \dfrac{1}{3}$ et $p_V = \dfrac{2}{3}$.
Autre exemple : On suppose qu'un feu tricolore reste 3' au vert, 1' à l'orange et 6' au rouge. Lorsque l'on arrive à ce feu : $\Omega = \{V, O, R\}$ et donc, on attribue aux événements élémentaires des nombres $p_V = P(\{V\})$, $p_O = P(\{O\})$ et $p_R = P(\{R\})$ qui vérifient $p_V = 3p_O$, $p_R = 6p_O$ et $p_V + p_O + p_R = 1$, donc $10p_O = 1$. Donc $p_V = \dfrac{3}{10}$, $p_O = \dfrac{1}{10}$ et $p_R = \dfrac{3}{5}$. La probabilité de ne pas attendre au feu est : $P(\{V, O\}) = p_V + p_O = \dfrac{2}{5}$.
On peut la généralise cette définition à un ensemble infini dénombrable.

> On définit une probabilité sur un univers infini dénombrable $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ par la donnée d'une suite de nombres réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ compris entre 0 et 1 tels que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$. La probabilité de $\varnothing$ est $P(\varnothing) = 0$ et la probabilité de tout événement *A* non vide est la somme des p_i pour tous les ω_i qui appartiennent à *A*.

Exemple : On joue à « Pile ou Face » avec une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « Pile ».
Donc $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ où ω_n est formé de $(n-1)$ « Face » suivi de « Pile ».

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \dfrac{1}{2^n}$, et : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$.

La probabilité de faire au plus 10 lancers est : $P(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} p_k$.

Mais cette définition ne se généralise pas si Ω est infini non dénombrable.

On est donc obligé d'adopter une autre définition qui, elle, pourra être généralisée.

<u>Définition</u> : On appelle probabilité sur un ensemble Ω fini une application P de $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1) $P(\Omega)=1$.
2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ pour tous événements A et B <u>incompatibles</u>.
3) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements deux à deux incompatibles, alors : $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)$.

Par récurrence, à partir du second axiome, on obtient les réunion finies d'événements incompatibles deux à deux : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$.

Le troisième axiome (σ - additivité) n'intervient que si Ω est infini.

En écrivant chaque événement comme réunion des événements élémentaires (donc incompatibles) qui le composent, on retrouve la première définition donnée et on démontre facilement que les deux définitions énoncées sont équivalentes.

<u>Propriétés</u> :

1) $P(\overline{A})=1-P(A)$ pour tout événement A.
2) $P(\varnothing)=0$.
3) $0\le P(A)\le 1$ pour tout événement A.
4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ pour tous événements A et B.
5) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements : $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)$.
6) Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements : $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)$.

<u>Démonstration</u> : 1) Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles $(A\cap\overline{A}=\varnothing)$.

Donc : $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$. Or $A\cup\overline{A}=\Omega$, donc $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$.

Donc $P(\overline{A})=1-P(A)$

2) On sait que $\varnothing=\overline{\Omega}$. Donc $P(\varnothing)=P(\overline{\Omega})=1-P(\Omega)=1-1=0$.

3) Par définition $P(A)$ et $P(\overline{A})$ appartiennent à $\mathbb{R}^+$. Donc $P(A)\ge 0$ et $1-P(A)\ge 0$.

Donc $0\le P(A)\le 1$.

4) On se ramène à une réunion d'événements incompatibles : on pose $C=\overline{A}\cap B$.

$A\cap C=A\cap\overline{A}\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$. Donc $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$.

Or $A\cup C=A\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap(A\cup B)=\Omega\cap(A\cup B)=A\cup B$.

Donc $P(A\cup B)=P(A)+P(C)$. Il reste donc à calculer $P(C)$.

De plus $(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap\overline{A}=(A\cap\overline{A})\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$. Donc $A\cap B$ et C sont incompatibles. Donc $P[(A\cap B)\cup C]=P(A\cap B)+P(C)$.

Or : $(A\cap B)\cup C=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap B=\Omega\cap B=B$.

Donc $P(B)=P(A\cap B)+P(C)$, donc $P(C)=P(B)-P(A\cap B)$. Donc en remplaçant :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Comme pour les cardinaux, on généralise cette dernière formule à 3, 4, …, n événements : cela donne la formule de Poincaré ou du crible.

<u>Formule du crible ou de Poincaré</u> : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left[\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right]$

5) La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante si : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad A_n\subset A_{n+1}$. C'est le cas par exemple dans une suite de lancers de dé des événements A_n « au bout du n-ième lancer, on a obtenu au moins un six ». La démonstration est admise. Pour calculer la probabilité de l'événement A « obtenir au moins un 6 », donc $A=\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, il suffit de calculer la limite de $P(A_n)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ quand n tend vers l'infini, et on trouve $P(A)=1$. On dira que c'est un événement quasi-certain.

<u>Définition</u> : On appelle événement quasi-certain tout événement A tel que $P(A)=1$. On dit aussi que la propriété associée est vraie presque sûrement.

6) La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante si : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad A_{n+1}\subset A_n$. C'est le cas par exemple dans une suite de lancer de dé des événements A_n « tous les lancers jusqu'au lancer n donnent 6 ». La démonstration est admise. Pour calculer la probabilité de l'événement A « n'avoir que des 6 », donc $A=\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, il suffit de calculer la limite de $P(A_n)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ quand n tend vers l'infini, et on trouve $P(A)=0$. On dira que c'est un événement négligeable.

<u>Définition</u> : Un événement A est quasi-impossible ou négligeable si $P(A)=0$.

<u>Remarque</u> : On ne choisit bien sûr pas n'importe comment l'application P. Elle doit refléter la réalité, ou du moins les informations que l'on a, comme dans le choix des nombres $p_1,\ldots, p_n$.

4) <u>Equiprobabilité dans le cas d'un univers fini</u>

<u>Exemple</u> : Dans la description de l'exemple des boules numérotées où $\Omega=\{R_1,R_2,V_1,V_2,V_3,V_4\}$ et $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, toutes les boules ont la même chance d'être choisies et donc on attribue à chaque éventualité le même nombre p qui devra donc vérifier $6p=1$, donc $p=\frac{1}{6}$.

<u>Définition</u> : On dit qu'il y a équiprobabilité (ou que la probabilité est uniforme) lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'apparition.

C'est ce qui se passe, quand on tire au hasard des boules indiscernables au toucher, lorsque l'on jette un dé équilibré, … et plus généralement, lorsque l'on n'a pas d'informations permettant de faire jouer un rôle particulier à chaque événement élémentaire.

<u>Théorème</u> : S'il y a équiprobabilité, alors pour tout événement A : $P(A)=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

On dit souvent : $P(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

<u>Démonstration</u> : On suppose que $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ et que $p_1=\ldots=p_n$.

Or comme $p_1+\ldots+p_n=1$, on a $np_1=1$, donc $p_1=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$.

Si $A=\{\omega_1,...,\omega_k\}$, on a $P(A)=p_1+...+p_k=k\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{k}{n}=\dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Remarque : Dans la description de l'exemple par $\Omega=\{R_1,R_2,V_1,V_2,V_3,V_4\}$ et $\mathcal{A}=\{\varnothing,R,V,\Omega\}$, on sait qu'il y a deux fois plus de boules vertes que de boules rouges. On va donc attribuer aux événements des nombres $p_R=P(R)$ et $p_V=P(V)$ tels que $p_V=2p_R$ et $p_V+p_R=1$. Donc $p_R=\dfrac{1}{3}$ et $p_V=\dfrac{2}{3}$.

Dans la description du même exemple par $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, on peut constater que : $P(\{R_1,R_2\})=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $P(\{V_1,V_2,V_3,V_4\})=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

On constate donc que les deux descriptions se rejoignent et que l'on attribue le même nombre aux événements « la boule tirée est rouge » ou « la boule tirée est verte ».

L'équiprobabilité n'est qu'un cas particulier, mais étant donnée la remarque faite sur l'exemple 3, on privilégiera quand c'est possible la description pour laquelle il y a équiprobabilité : on raisonnera « comme si » les boules étaient numérotées, « comme si » les dés étaient de couleurs différentes, …

II - Probabilité conditionnelle

1) Définition

Exemple : On lance deux fois un dé et on étudie la probabilité d'obtenir une somme au moins égale à 10.

Si le pari a lieu avant de lancer le premier dé : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^2$ (ensemble des couples (x,y) tels que $1\le x\le 6$ et $1\le y\le 6$), donc $\mathrm{Card}(\Omega)=36$ et il y a équiprobabilité. $A=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ et donc $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

Si le pari a lieu après le lancer du premier dé, on ne peut plus évaluer la probabilité de A de la même manière. En effet si le premier dé a donné 3, l'événement A n'a plus aucune chance d'être réalisé, donc la probabilité de A doit être évaluée à 0. Mais si le premier dé a donné 5, il y a 2 cas favorables (5 et 6) sur 6 cas possibles pour le deuxième dé et la probabilité de A doit être évaluée à $\dfrac{1}{3}$.

On construit donc une nouvelle probabilité sur Ω qui n'est plus uniforme et qui dépend de l'événement noté B dont on connaît la réalisation (par exemple : 5 au premier dé). On la note P_B :

- tous les événements élémentaires de $\overline{B}$ ont une probabilité nulle.
- tous les autres événements élémentaires (ceux de B) restent équiprobables.

Le nombre de cas favorables est donc $\mathrm{Card}(A\cap B)$ et le nombre de cas possibles est $\mathrm{Card}(B)$. Donc $P_B(A)=\dfrac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(B)}=\dfrac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}\times\dfrac{\mathrm{Card}(\Omega)}{\mathrm{Card}(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Théorème-Définition : Etant donné un espace Ω muni d'une probabilité P et un événement B de probabilité non nulle, l'application P_B qui à tout événement A associe le réel $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé.

Démonstration : Il s'agit bien d'une probabilité sur Ω. En effet, P_B associe à tout événement A un réel $P_B(A)\ge 0$ car $P(A\cap B)\ge 0$ et $P(B)>0$. D'autre part :

1) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.

2) Soient *A* et *C* deux événements incompatibles, donc tels que $A \cap C = \varnothing$.

$$P_B(A \cup C) = \frac{P[(A \cup C) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)}.$$

Or $(A \cap B) \cap (C \cap B) = A \cap C \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$. Donc $(A \cap B)$ et $(C \cap B)$ sont incompatibles et d'après les propriétés de la probabilité *P* :

$$P_B(A \cup C) = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = P_B(A) + P_B(C).$$

3) La σ-additivité se démontre de la même manière avec en plus le passage à la limite.

On a vérifié les trois conditions. Donc P_B est une probabilité sur Ω.

Remarque : Une autre notation possible est $P_B(A) = P\left(A/B\right)$ (qui se lit « probabilité de *A* sachant *B* »), mais il ne faut pas oublier que l'événement est *A* et que $\left(A/B\right)$ n'est pas un événement.

Il ne faut pas oublier que P_B est une probabilité, et donc possède toutes les propriétés :

$\boxed{P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)}$ $\boxed{P_B(A \cup A') = P_B(A) + P_B(A') - P_B(A \cap A')}$

2) Propriétés

Dans tout ce qui suit, on se place dans un espace Ω muni d'une probabilité *P*. Tout repose sur la propriété évidente suivante :

Théorème : Si *A* et *B* sont des événements de probabilité non nulle :

$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$$

Remarque : Ce théorème rétablit une certaine symétrie entre *A* et *B*.

Il permet d'utiliser les probabilités conditionnelles même quand il n'y a pas de lien chronologique entre *A* et *B*, par exemple pour connaître les liens de cause à effet de certains phénomènes ou l'interaction de certains paramètres.

Exemple : Dans la population, il y a 40% d'individus de groupe A, 10% de groupe B, 5% de groupe AB et 45% de groupe O. Chaque individu possède ou non le facteur Rhésus : 82% personnes du groupe A ont un Rhésus positif, 81% du groupe B, 83% du groupe AB et 80% du groupe O. Calculer la probabilité pour qu'un individu soit donneur universel, c'est-à-dire ORh$^-$.

L'expérience aléatoire consiste à prendre un individu au hasard. Donc Ω est l'ensemble de tous les individus.

On commence par définir les événements : *A* ensemble des individus de groupe A, *B* ceux du groupe B, *C* ceux du groupe AB, *O* ceux du groupe O et *R* ceux qui ont un Rhésus positif. Donc l'ensemble des individus de Rhésus négatif est $\overline{R}$.

D'après les données de l'énoncé : $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}1$; $P(C) = 0{,}05$; $P(O) = 0{,}45$; $P_A(R) = 0{,}82$; $P_B(R) = 0{,}81$; $P_C(R) = 0{,}83$; $P_O(R) = 0{,}80$.

On peut en déduire : $P(\overline{A}) = 0{,}6$; $P(\overline{B}) = 0{,}9$; $P(\overline{C}) = 0{,}95$; $P(\overline{O}) = 0{,}55$; $P_A(\overline{R}) = 0{,}18$; $P_B(\overline{R}) = 0{,}19$; $P_C(\overline{R}) = 0{,}17$; $P_O(\overline{R}) = 0{,}20$.

L'événement « l'individu est donneur universel » est $D = O \cap \overline{R}$.

Donc : $P(D) = P_O(\overline{R})P(O) = 0{,}20 \times 0{,}45 = 0{,}09$.

Quelle est la probabilité pour un individu du groupe O d'être donneur universel ?

$$P_O(D) = \frac{P(D \cap O)}{P(O)} = \frac{P(O \cap \overline{R})}{P(O)} = \frac{P_O(\overline{R})P(O)}{P(O)} = P_O(\overline{R}) = 0{,}20.$$

Quelle est la probabilité pour un individu de Rhésus négatif d'être donneur universel ?

$P_{\overline{R}}(D)=\dfrac{P(D\cap\overline{R})}{P(\overline{R})}=\dfrac{P(O\cap\overline{R})}{P(\overline{R})}=\dfrac{P_O(\overline{R})P(O)}{P(\overline{R})}$.

Il nous manque $P(\overline{R})$ que l'on calcule en décomposant en $\overline{R}$ en réunion de plusieurs événements incompatibles : les individus ARh⁻ $(A\cap\overline{R})$, les individus BRh⁻ $(B\cap\overline{R})$, les individus ABRh⁻ $(C\cap\overline{R})$, les individus ORh⁻ $(O\cap\overline{R})$.

$P(\overline{R})=P(A\cap\overline{R})+P(B\cap\overline{R})+P(C\cap\overline{R})+P(O\cap\overline{R})$.

$P(\overline{R})=P_A(\overline{R})P(A)+P_B(\overline{R})P(B)+P_C(\overline{R})P(C)+P_O(\overline{R})P(O)$.

Donc $P(\overline{R})=0{,}18\times0{,}4+0{,}19\times0{,}1+0{,}17\times0{,}05+0{,}20\times0{,}45=0{,}1895$.

Donc $P_{\overline{R}}(D)=\dfrac{P_O(\overline{R})P(O)}{P(\overline{R})}=\dfrac{0{,}20\times0{,}45}{0{,}1895}\simeq0{,}475$.

<u>Définition</u> : On appelle système complet d'événements toute partition de Ω formée par d'une famille finie ou dénombrable d'événements dont la probabilité est non nulle.

Les événements sont incompatibles deux à deux et leur réunion est Ω.
Les événements élémentaires forment un système complet d'événements.

<u>Formule des probabilités totales</u> : Si $(B_i)_{i\in I}$ (I fini ou infini dénombrable) est un système complet d'événements, pour tout événement A : $P(A)=\sum_{i\in I}P_{B_i}(A)P(B_i)$.

<u>Démonstration</u> : $\Omega=\bigcup_{i\in I}B_i$ donc $A=A\cap\Omega=A\cap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$.

Les événements $(A\cap B_i)$ sont incompatibles puisque les événements B_i le sont.

Donc $P(A)=\sum_{i\in I}P(A\cap B_i)=\sum_{i\in I}P_{B_i}(A)P(B_i)$.

Dans le cas où I est fini : $\boxed{P(A)=P_{B_1}(A)P(B_1)+P_{B_2}(A)P(B_2)+...+P_{B_n}(A)P(B_n)}$

Un cas particulier fréquent est : $\boxed{P(A)=P_B(A)P(B)+P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}$

<u>*Exemple*</u> : On a deux urnes. La première contient 3 boules rouges et 5 vertes et la deuxième contient 4 boules rouges et 2 vertes. On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans cette urne. Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge.

On définit les événements A « la boule tirée est rouge » et B « on tire dans la première urne ». Comme l'urne est choisie au hasard : $P(B)=P(\overline{B})=\dfrac{1}{2}$.

$P_B(A)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne : $P_B(A)=\dfrac{3}{8}$.

$P_{\overline{B}}(A)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans la deuxième urne : $P_{\overline{B}}(A)=\dfrac{2}{3}$.

B et $\overline{B}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Donc :

$P(A)=P_B(A)P(B)+P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{25}{48}$.

On peut également remonter de l'effet à la cause (ou chronologiquement).

On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ? Il s'agit donc de calculer $P_A(B)$.

$$P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P\left(A/B\right)P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}}{\frac{25}{48}}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{48}{25}=\frac{9}{25}$$

<u>Formule de Bayes (ou de probabilités des causes)</u> : Si $B_1,\dots,B_n$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, pour tout entier k vérifiant $1 \le k \le n$ et pour tout événement A de probabilité non nulle : $P_A(B_k) = \dfrac{P_{B_k}(A)P(B_k)}{\sum\limits_{i\in I} P_{B_i}(A)P(B_i)}$.

<u>Démonstration</u> : $P_A(B_k) = \dfrac{P(A\cap B_k)}{P(A)} = \dfrac{P_{B_k}(A)P(B_k)}{\sum\limits_{i\in I} P_{B_i}(A)P(B_i)}$ en utilisant la formule des probabilités totales au dénominateur.

<u>Formule des probabilités composées</u> : Si $A_1,\dots,A_n$ sont des événements tels que, pour tout entier k vérifiant $1 \le k < n$, $P(A_1\cap\ldots\cap A_k) \ne 0$, alors :

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

<u>Démonstration</u> : $P(A_1\cap\ldots\cap A_n) = P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})$.

Et $P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}) = P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-2}}(A_{n-1})P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-2})$

On procède ainsi de proche en proche jusqu'à A_1 : $P(A_1\cap A_2) = P_{A_1}(A_2)P(A_1)$.

C'est en fait une formule que l'on démontre par une récurrence (que l'on n'a pas explicitée).

Cette formule permet de résoudre des problèmes dans lesquels on a une cascade d'événements qui dépendent chacun des précédents.

<u>*Exemple*</u> : Une urne contient 6 boules blanches, 3 noires et 3 rouges. On tire successivement et sans remise 3 boules. Calculer la probabilité que la troisième boule soit rouge.

On note A_k l'événement « la k-ième boule tirée est rouge ». On cherche $P(A_3)$. Mais pour calculer cette probabilité, il faut connaître la composition de l'urne au troisième tirage et donc il faut savoir ce qui a été tiré avant. On étudie tous les cas pour les deux premiers tirages en notant $\overline{R}$ lorsque la boule n'est pas rouge : RR, $R\overline{R}$, $\overline{R}R$ et $\overline{R}\overline{R}$.

Cela revient à dire qu'un système complet d'événements est $A_1\cap A_2$, $A_1\cap\overline{A_2}$, $\overline{A_1}\cap A_2$ et $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$. Donc :

$$P(A_3) = P(A_1\cap A_2\cap A_3) + P(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3) + P(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3) + P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3).$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3) = \frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{220}.$$

En effet, au premier tirage, il y a 12 boules dont 3 rouges. Au deuxième tirage, puisque A_1 est réalisé (on a tiré une rouge), il reste 11 boules dont 2 rouges. Au troisième tirage, puisque $A_1\cap A_2$ est réalisé (on a tiré deux rouges), il reste 10 boules dont 1 rouge. De même :

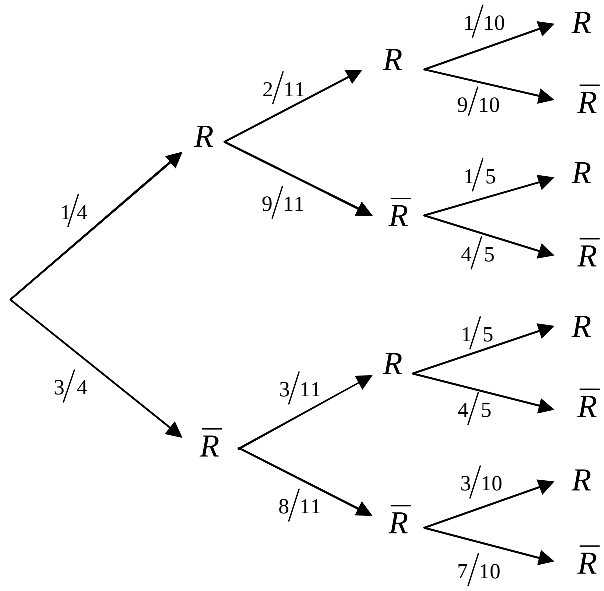
$$P(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{A_1\cap\overline{A_2}}(A_3) = \frac{3}{12}\times\frac{9}{11}\times\frac{2}{10} = \frac{9}{220}.$$

$$P(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)P_{\overline{A_1}}(A_2)P_{\overline{A_1}\cap A_2}(A_3) = \frac{9}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10} = \frac{9}{220}.$$

$$P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(A_3) = \frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{55}.$$

Et $P(A_3) = \dfrac{1}{220} + \dfrac{9}{220} + \dfrac{9}{220} + \dfrac{9}{55} = \dfrac{1}{4}$.

On a l'habitude de schématiser de telles situations par des arbres probabilistes. Chaque branche est séparée par un système complet d'événements et chaque branche est affectée de la probabilité conditionnelle de l'événement sachant tout ce qui précède (intersection de tous les événements qui y mènent). Le produit de toutes les probabilités sur un chemin donnera donc la probabilité de l'intersection de tous les événements du chemin :



3) Evénements indépendants

Exemple : Dans l'exemple précédent, si les tirages avaient été avec remise, la composition des urnes n'auraient pas changé et donc, par exemple :

$$P(A_1) = P_{A_1}(A_2) = P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ donc : } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Intuitivement, on dira que A est indépendant de B si la réalisation de B n'influe pas sur les chances de réalisation de A : $P_B(A) = P(A)$. Or $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Définition : Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Attention! Ne pas confondre indépendance et incompatibilité ($A \cap B = \varnothing$). Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, ils ne peuvent pas être indépendants.

Remarque : L'indépendance de deux événements dépend de la probabilité et pas seulement de la nature des événements.

Exemple : On lance un dé, A est l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 3 » et B est l'événement « le résultat est impair » : $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{1,3,5\}$ et $A \cap B = \{3,5\}$.

- Si le dé est parfait : $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} = P(A)P(B)$. Donc A et B sont indépendants.
- Si le dé est pipé avec par exemple pour chaque numéro une probabilité proportionnelle à ce numéro, donc $P(\{k\}) = \dfrac{k}{21}$: $P(A) = \dfrac{3+4+5+6}{21} = \dfrac{6}{7}$, $P(B) = \dfrac{1+3+5}{21} = \dfrac{3}{7}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{3+5}{21} = \dfrac{8}{21} \neq P(A)P(B)$. Donc A et B ne sont pas indépendants.

Propriété : Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Démonstration : A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(B) + P(A \cap \overline{B})$.

Donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B})$.

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. Donc par symétrie, $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Et en réutilisant pour $\overline{A}$ et B ce que l'on vient de démontrer, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.
On constate un problème pour généraliser à plusieurs événements.
Exemple : On lance deux fois un dé parfait. Donc $\text{Card}(\Omega) = 36$. Et on définit :

A : « le premier numéro est pair » donc $P(A) = \dfrac{3\times 6}{36} = \dfrac{1}{2}$.

B : « le deuxième numéro est impair » donc $P(B) = \dfrac{6\times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$.

C : « la somme des deux numéros est impaire », donc les deux numéros sont pairs ou les deux numéros sont impairs, donc $P(C) = \dfrac{3\times 3 + 3\times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$.

$A\cap B = \{(x,y)\,/\, x \text{ pair et } y \text{ impair}\} = A\cap C = B\cap C$.

Donc $P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = \dfrac{3\times 3}{36} = \dfrac{1}{4}$. Donc A, B et C sont deux à deux indépendants. Mais $A\cap B\cap C = A\cap B$, donc $P(A\cap B\cap C) = \dfrac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$.

Définition : Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie non vide I de $[\![1,n]\!]$: $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$.

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.