INTEGRATION

I – Rappel sur les primitives

1) Définition

Définition : On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est f.

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ et $F(x)=x^2+x$ ou $F(x)=x^2+x+1$.
On remarque donc qu'il n'y a pas unicité.

Théorème : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est primitive de sa dérivée.

Exemple : Pour montrer que la fonction F définie par $\forall x \in]0,+\infty[\quad F(x)=x\ln x - x$ est primitive de la fonction logarithme, il suffit de montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\quad F'(x)=\ln x$.

2) Unicité

Théorème : Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, quelque soit le réel k, la fonction G définie par $\forall x \in I \quad G(x)=F(x)+k$ est aussi une primitive de f.

C'est évident car $\forall x \in I \quad G'(x)=F'(x)=f(x)$.

Théorème : Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un même intervalle I, elles diffèrent d'une constante : il existe un réel k tel que $\forall x \in I \quad G(x)=F(x)+k$.

Démonstration : Soient F et G deux primitives de f sur I. Donc $G'=F'=f$. Donc la fonction $H=G-F$ a une dérivée nulle sur I, donc est constante sur I (à la fois croissante car $H'(x)\geq 0$ et décroissante car $H'(x)\leq 0$). Donc il existe k tel que $\forall x \in I \quad H(x)=k$.
En conséquence, si f admet une primitive F, elle en admet une infinité et elles sont toutes de la forme $F+k$ avec k constante réelle. De plus :

Théorème : Soit une fonction f qui admet des primitives sur un intervalle I, un élément a de I et un réel quelconque b. Alors il existe une unique primitive F de f qui vérifie $F(a)=b$.

Démonstration : f admet au moins une primitive G.
F doit être une primitive de f. Donc, il existe k tel que $\forall x \in I \quad F(x)=G(x)+k$..
$F(a)=b \Leftrightarrow k=b-G(a)$. Il y a donc existence et unicité de k et de F.

Exemple : ln est, sur $]0,+\infty[$, l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

3) Calcul de primitives

Tableau des primitives usuelles :

$I=\mathbb{R}$	$f(x)=0$	$F(x)=k$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=a$	$F(x)=ax+k$
$I=]0,+\infty[$ (au moins)	$f(x)=x^\alpha \quad (\alpha\neq -1)$	$F(x)=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+k$
$I=]0,+\infty[$ ou $I=]-\infty,0[$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+k$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+k$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+k$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+k$
$I=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x+k$

$I=\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot an^2 x$	$F(x)=-\cot an\, x+k$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\text{Arctan}\, x+k$
$I=]-1,1[$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\begin{cases}\text{Arcsin}\, x+k\\ -\text{Arccos}\, x+k\end{cases}$

Exemple : $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$. Donc $F(x)=\dfrac{2}{3}x^{3/2}+k=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+k$.

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$. Donc $F(x)=-x^{-1}+k=-\dfrac{1}{x}+k$.

Opérations sur les primitives : En notant F, U et V des primitives des fonctions f, u et v, si a et k sont des réels :
Si $f=u+v$, alors $F=U+V+k$. Si $f=au$, alors $F=aU+k$.

Exemple : $f(x)=x^3-5x^2+4x-1$. Donc $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{5}{3}x^3+2x^2-x+k$.

Méthode pour intégrer un polynôme : développer, puis intégrer terme à terme.

Mais ce n'est pas toujours possible : $f(x)=x^2(x^3-1)^{54}$.

Primitives obtenues par composition de fonctions :

Si $f=u'e^u$, alors $F=e^u+k$.

Si $f=u'u^\alpha$ avec $\alpha\neq-1$, alors $F=\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+k$.

Si $f=\dfrac{u'}{u}$, alors $F=\ln|u|+k$.

Si $f=u'\sin u$, alors $F=-\cos u+k$.

Si $f=u'\cos u$, alors $F=\sin u+k$.

Si $f=\dfrac{u'}{1+u^2}$, alors $F=\text{Arctan}\, u+k$.

Si $f(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, alors $F=\text{Arcsin}\, u+k$ ou $F=-\text{Arccos}\, u+k$.

Exemple : $f(x)=x^2(x^3-1)^{54}$. Si l'on pose $u(x)=x^3-1$, alors $u'(x)=3x^2$ et $x^2=\dfrac{1}{3}u'(x)$. Donc $f=\dfrac{1}{3}u'u^{54}$ et $F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{55}u^{55}+k$. Donc $F(x)=\dfrac{1}{165}(x^3-1)^{55}+k$.

Parfois, il faut faire apparaître artificiellement u'.

Exemple : $f(x)=(4x-1)^{54}$. Si l'on pose $u(x)=4x-1$, alors $u'(x)=4$ et $1=\dfrac{1}{4}u'(x)$.

Donc $f=\dfrac{1}{4}u'u^{54}$ et $F=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{55}u^{55}+k$. Donc $F(x)=\dfrac{1}{220}(4x-1)^{55}+k$.

Méthode pour intégrer une fraction rationnelle : On la décompose en somme de fractions rationnelles plus simples dont on saura trouver des primitives.

Exemple : $f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x^3-x^2+x-1}=\dfrac{2x^2+x+3}{(x-1)(x^2+1)}$.

On cherche a, b et c réels tels que pour tout x : $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

$$\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{(a+b)x^2+(c-b)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+1)}$$. Donc il suffit que $\begin{cases} a+b=2 \\ c-b=1 \\ a-c=3 \end{cases}$.

On résout le système, et on trouve $a=3$, $b=-1$ et $c=0$: $f(x)=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

$\dfrac{3}{x-1}$ est de la forme $3\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=x-1$. Donc une primitive est $3\ln|x-1|$.

$\dfrac{x}{x^2+1}$ est de la forme $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+1$. Donc une primitive est $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1|$.

Donc $F(x)=3\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1|+k$.

Méthode pour intégrer un polynôme trigonométrique : On linéarise.

Exemple :

$$f(x)=\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

Donc : $F(x)=\dfrac{1}{32}\sin 4x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x+k$.

Autres fonctions : Il faut trouver une astuce pour se ramener à une primitive que l'on sait calculer.

Exemple : $f(x)=\dfrac{2}{1-e^x}=\dfrac{2}{e^x(e^{-x}-1)}=\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}$. Donc $f=-2\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^{-x}-1$.

Donc $F(x)=-2\ln|e^{-x}-1|+k$.

II – Intégrales de fonctions en escalier

L'objectif est de calculer des aires de parties bornées du plan.

On choisit un repère, et on se ramène au calcul de l'aire du domaine situé sous la courbe d'une fonction *f* positive et bornée sur $[a,b]$.

Le premier réflexe est d'encadrer cette aire par des aires faciles à calculer : des rectangles.

Puis on affine la majoration et la minoration par des sommes d'aires de rectangles, ce qui revient à introduire des fonctions en escaliers qui majorent et qui minorent *f*.

Dans tout ce paragraphe, on considère un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

1) Fonction en escalier

Définition : On appelle subdivision de l'intervalle $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma=(x_k)_{0\le k\le n}$ de réels de $[a,b]$ tels que : $x_0=a$ et $x_n=b$.

La subdivision sera notée $\sigma=(x_0,...,x_n)$.

Définition : Le pas de la subdivision $\sigma=(x_0,...,x_n)$ est $\mu(\sigma)=\text{Sup}\{x_{k+1}-x_k \,/\, 0\le k\le n-1\}$.

La subdivision est régulière si l'on partage le segment en *n* segments de même longueur, donc de pas $\dfrac{b-a}{n}$. Alors : $\forall k\in[\![0,n]\!]\quad x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

Définition : Une fonction φ définie sur de l'intervalle $[a,b]$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma=(x_0,...,x_n)$ de $[a,b]$ telle que φ soit constante sur tous les intervalles $]x_k,x_{k+1}[$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$. La subdivision σ est dite adaptée à φ.

Exemple : $\varphi(x)=\text{Ent}(x)$ sur $[0,3]$ pour la subdivision $\sigma=(0,1,2,3)$ adaptée à φ.

On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée σ.

Dans l'exemple, $\sigma' = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3)$ ou $\sigma'' = (0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, 2, \frac{7}{3}, 3)$ sont aussi adaptées.

Remarque : Si φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et σ une subdivision adaptée à φ, toute subdivision obtenue en ajoutant à σ un nombre fini de points est aussi une subdivision adaptée à φ.

2) Intégrale d'une fonction en escalier

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à φ.

Donc, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, φ est constante sur tous les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$: $\varphi(x) = c_k$.

On considère le réel : $I_\sigma(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$.

On peut remarquer que si l'on ajoute un point y à la subdivision σ, il se trouve dans l'un des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$. Donc $\forall x \in]x_k, y[\cup]y, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$.

Or $(y - x_k)c_k + (x_{k+1} - y)c_k = (x_{k+1} - x_k)c_k$. Donc $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma\cup\{y\}}(\varphi)$.

Donc si on ajoute un nombre fini de points à σ, on ne change pas $I_\sigma(\varphi)$.

Plus généralement, si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées à φ, on note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision obtenue en ajoutant à σ les points de σ'. Donc $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma\cup\sigma'}(\varphi) = I_{\sigma'}(\varphi)$.

Donc $I_\sigma(\varphi)$ est indépendant de σ. On peut donc écrire $I(\varphi)$.

Définition : Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à φ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$.

Le réel $I(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k$, noté $\int_a^b \varphi(x)dx$, est indépendant de σ est appelé intégrale de la fonction φ sur $[a,b]$.

Si φ est positive, c'est l'aire située sous la courbe.

La variable x est une variable muette.

Exemple : $\int_0^3 \mathrm{Ent}(x)dx = 0(1-0) + 1(2-1) + +2(3-2) = 3$.

3) Propriétés

Linéarité : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(x)dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)dx + \beta \int_a^b \psi(x)dx$

Démonstration : Soient σ une subdivision adaptée à φ et σ' une subdivision adaptée à ψ,.

Donc $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision adaptée à φ et à ψ. Soit $\sigma \cup \sigma' = (x_0, ..., x_n)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k \quad \psi(x) = d_k \quad \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) = \alpha c_k + \beta d_k$.

Donc $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision adaptée à $\alpha\varphi + \beta\psi$.

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(\alpha c_k + \beta d_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) d_k .$$

Donc : $\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(x)dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)dx + \beta \int_a^b \psi(x)dx$.

Relation de Chasles : $\forall c \in]a,b[\quad \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx$.

Démonstration : Soient σ une subdivision adaptée à φ et $\sigma' = \sigma \cup \{c\} = (x_0, ..., x_p = c, ..., x_n)$.
On pose : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = \lambda_k$. Donc :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\lambda_k = \sum_{k=0}^{j-1}(x_{k+1}-x_k)\lambda_k + \sum_{k=j}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\lambda_k = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx$$

Positivité : Si $\forall x \in [a,b] \;\; \varphi(x) \geq 0$, alors $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$.

Démonstration : Evidente car on additionne des nombres positifs.

Comparaison de deux intégrales : Si $\forall x \in [a,b] \;\; \varphi(x) \leq \psi(x)$, alors $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$.

Démonstration : On utilise le théorème précédent pour la fonction $\psi - \varphi$ et la linéarité.
Remarque : Toutes ces propriétés reposent sur le fait que $a < b$.

III – Fonctions bornées intégrables

Dans tout ce paragraphe, on considère un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$.

1) Définition

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.
Soit $\mathscr{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui minorent *f* et $\mathscr{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui majorent *f*. Donc :
$\mathscr{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E} \,/\, \forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) \leq f(x)\}$ et $\mathscr{E}^+(f) = \{\psi \in \mathscr{E} \,/\, \forall x \in [a,b] \quad \psi(x) \leq f(x)\}$.
Et : $\forall \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \quad \forall \psi \in \mathscr{E}^+(f) \quad \varphi \leq f \leq \psi$ donc $I(\varphi) \leq I(\psi)$.
Soit *f* une fonction bornée sur $[a,b]$: $\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$.
Les fonctions $\varphi_0 : x \mapsto m$ et $\psi_0 : x \mapsto M$ sont des fonctions en escalier qui minorent et majorent respectivement *f*. Donc $\varphi_0 \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\psi_0 \in \mathscr{E}^+(f)$.
L'ensemble $A = \{I(\varphi) \,/\, \varphi \in \mathscr{E}^-(f)\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ car elle contient $I(\varphi_0)$ et majorée par $I(\psi_0)$. Donc *A* possède une borne supérieure notée $I^-(f)$.
De même, l'ensemble $B = \{I(\psi) \,/\, \psi \in \mathscr{E}^+(f)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car elle contient $I(\psi_0)$ et minorée par $I(\varphi_0)$. Donc *B* possède une borne inférieure notée $I^+(f)$.
On a l'inégalité : $\forall \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \quad \forall \psi \in \mathscr{E}^+(f) \quad I(\varphi) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq I(\psi)$.

Définition : Une fonction *f* bornée est intégrable sur $[a,b]$ si $I^-(f) = I^+(f)$ avec :

$$I^-(f) = \text{Sup}\{I(\varphi) \,/\, \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leq f\} \text{ et } I^+(f) = \text{Inf}\{I(\psi) \,/\, \psi \text{ en escalier et } f \leq \psi\}$$

Cette borne commune est appelée intégrale de *f* sur $[a,b]$ et notée $\int_a^b f(x)dx$.

Cela paraît évident, mais ce n'est pas le cas de toutes les fonctions.
Par exemple la fonction indicatrice des rationnels n'est pas intégrable sur $[0,1]$:
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Alors : $I^-(f) = 0$ et $I^+(f) = 1$.

Lorsque la fonction est intégrable : $\forall \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \quad \forall \psi \in \mathscr{E}^+(f) \quad I(\varphi) \leq \int_a^b f(x)dx \leq I(\psi)$.

Donc, pour toute fonction bornée intégrable sur $[a,b]$, on a : $I(\varphi_0) \leq \int_a^b f(x)dx \leq I(\psi_0)$.

<u>Théorème</u> : Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et si $\forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M$, alors : $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Pour tout $x \in]a,b]$, on a : $m(x-a) \le \int_a^x f(x)dx \le M(x-a)$. Donc $\lim_{x\to a} \int_a^x f(x)dx = 0$.

<u>Extension de la définition</u> : $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2) Exemples de fonctions intégrables

On peut remarquer que pour démontrer qu'une fonction f bornée est intégrable, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ qui vérifient $\varphi \le f \le \psi$ et $|I(\psi) - I(\varphi)| < \varepsilon$. C'est en particulier le cas si l'on a deux suites de fonctions en escalier telles que $\lim_{n\to+\infty} [I(\psi_n) - I(\varphi_n)] = 0$.

Cas des fonctions monotones

On peut remarquer que toute fonction monotone sur $[a,b]$ est bornée par $f(a)$ et $f(b)$.

Ici, on suppose que f est une fonction croissante sur $[a,b]$ et on considère la subdivision régulière σ_n définie par : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Comme f est croissante : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}] \quad f(x_k) \le f(x) \le f(x_{k+1})$.

La fonction φ_n définie par : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\quad \varphi_n(x) = f(x_k)$ et $\varphi_n(b) = f(b)$ est une fonction en escalier qui minore f. Et $I(\varphi_n) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

La fonction ψ_n définie par : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}] \quad \psi_n(x) = f(x_{k+1})$ et $\psi_n(a) = f(a)$ est une fonction en escalier qui majore f. Et $I(\psi_n) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I(\varphi_n) \le I^-(f) \le I^+(f) \le I(\psi_n)$.

Et : $I(\psi_n) - I(\varphi_n) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} [I(\psi_n) - I(\varphi_n)] = 0$. Donc : $I^-(f) = I^+(f)$. Donc f est intégrable.

Une démonstration analogue peut être faite pour une fonction décroissante.

Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Cas des fonctions de classe C^1

On peut remarquer que toute fonction de classe C^1 est continue sur $[a,b]$, donc bornée.

De plus sa dérivée est continue sur $[a,b]$, donc bornée : $\forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \le M$. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall (y,z) \in [a,b]^2 \quad |f(y) - f(z)| \le M|y-z|$.

On considère la subdivision régulière σ_n définie par : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

La fonction f est continue, donc bornée sur tous les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, et atteint ses bornes. Donc il existe y_k et z_k dans $[a,b]$ tels que : $\forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad f(y_k) \le f(x) \le f(z_k)$

La fonction φ_n définie par : $\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\quad \varphi_n(x) = f(y_k)$ et $\varphi_n(b) = f(b)$ est une fonction en escalier qui minore *f*. Et $I(\varphi_n) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)$.

La fonction ψ_n définie par : $\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}] \quad \psi_n(x) = f(z_k)$ et $\psi_n(a) = f(a)$ est une fonction en escalier qui majore *f*. Et $I(\psi_n) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I(\varphi_n) \le I^-(f) \le I^+(f) \le I(\psi_n)$.

Et : $|I(\psi_n) - I(\varphi_n)| \le \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(z_k) - f(y_k)| \le M\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|z_k - y_k| \le M\dfrac{(b-a)^2}{n}$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}[I(\psi_n) - I(\varphi_n)] = 0$. Donc : $I^-(f) = I^+(f)$. Donc *f* est intégrable.

Toute fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

3) Cas des fonctions continues

Théorème (admis) : Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Interprétation géométrique : Si la fonction est positive, il s'agit de l'aire de la partie de plan limitée par la courbe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Relation de Chasles : $\forall c \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ qui vérifient : $\varphi \le f \le \psi$ et $0 \le \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \le \varepsilon$. Et : $\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \psi(x)dx$.

On considère les restrictions de φ et ψ à $[a,c]$ et $[b,c]$. Ce sont des fonctions en escaliers et on a évidemment : $\varphi_{[a,c]} \le f_{[a,c]} \le \psi_{[a,c]}$ et $\varphi_{[c,b]} \le f_{[c,b]} \le \psi_{[c,b]}$.

Donc : $\int_a^c \varphi(x)dx \le \int_a^c f(x)dx \le \int_a^c \psi(x)dx$ et $\int_c^b \varphi(x)dx \le \int_c^b f(x)dx \le \int_c^b \psi(x)dx$.

Donc en additionnant et en utilisant la relation de Chasles pour les fonctions en escalier :

$\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \le \int_a^b \psi(x)dx$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \int_a^b f(x)dx - \left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right] \right| < \varepsilon$.

Donc : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

On se propose de trouver un moyen plus simple de calculer une intégrale.

Soit *F* la fonction définie par : $\forall x \in [a,b] \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On étudie la dérivabilité de cette fonction pour tout $x \in]a,b[$.

Soit $h > 0$ tel que $x + h \le b$. D'après la relation de Chasles : $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$.

Or *f* est continue sur $[a,b]$, donc sur $[x, x+h]$. Elle est donc bornée sur $[x, x+h]$ et atteint ses bornes. Il existe c_h et d_h dans $[x, x+h]$ tels que $\forall t \in [x, x+h] \quad f(c_h) \le f(t) \le f(d_h)$.

On a deux fonctions en escaliers qui minorent et majorent *f* sur $[x, x+h]$.

Donc : $hf(c_h) \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le hf(d_h)$. Donc $f(c_h) \le \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(d_h)$.

Or quand *h* tend vers 0^+, c_h et d_h tendent vers *x* et par continuité, $f(c_h)$ et $f(d_h)$ tendent vers $f(x)$. Donc par encadrement : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

On fait une démonstration analogue pour $h<0$ sur l'intervalle $[x+h, x]$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

Donc la fonction *F* est dérivable sur $]a,b[$ et $\forall x \in]a,b[\quad F'(x) = f(x)$.

Le même raisonnement peut être fait à droite de *a* et à gauche de *b*.

Donc *F* est une primitive de *f* et $F(a) = 0$.

On a ainsi prouvé l'existence d'une primitive de *f* sur $[a,b]$.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$, la fonction *F* définie par : $\forall x \in [a,b] \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de *f* qui s'annule en *a*.

Si *G* est une autre primitive de *f*, alors $G-F$ est une fonction constante : $\forall x \in [a,b] \quad G(x) = F(x) + k$. Donc : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$, alors, quelle que soit la primitive *F* de *f* sur $[a,b]$, on a : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Donc pour calculer l'intégrale d'une fonction continue, il suffit de trouver une primitive quelconque de la fonction *f*.

<u>Conséquence</u> : Si *f* est dérivable sur $[a,b]$, alors : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

<u>En particulier</u> : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln x = \int_1^x \dfrac{dt}{t}$.

4) <u>Cas des fonctions continues par morceaux</u>

Comme pour tous les intervalles, les valeurs aux bornes n'interviennent pas, on peut étendre ce qui précède à une autre classe de fonctions un peu plus large.

<u>Définition</u> : Une fonction *f* définie sur le segment $[a,b]$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que *f* soit continue sur tous les intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, et qu'elle admette pour chaque a_k une limite à gauche et une limite à droite réelles.

Cela revient à dire que la fonction *f* possède un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.

<u>*Exemple*</u> : $f(x) = 2x - \mathrm{Ent}(x)$ sur $[-1, 2]$.

<u>Théorème</u> : Toute fonction continue est continue par morceaux.
Toute fonction en escalier est continue par morceaux.
Si *f* et *g* sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et si λ est un réel, alors $f+g$, λf et fg sont continues par morceaux sur $[a,b]$.

Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma=(a_0,...,a_n)$ de $[a,b]$ telle que f soit continue sur tous les intervalles $]a_k,a_{k+1}[$ pour tout $k\in [\![0,n-1]\!]$. Et comme elle admet à gauche et à droite de tous les a_k une limite finie, elle admet un prolongement par continuité que l'on notera $\hat{f}_k$ sur l'intervalle $[a_k,a_{k+1}]$ pour tout $k\in [\![0,n-1]\!]$.

Définition : Si f est une fonction continue par morceaux et si $\sigma=(a_0,...,a_n)$ est une subdivision telle que f soit continue sur chaque $]a_k,a_{k+1}[$ et admette un prolongement par continuité $\hat{f}_k$ à $[a_k,a_{k+1}]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est : $I=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\hat{f}_k(x)dx$.

On admettra que cette définition ne dépend pas de la subdivision considérée puisque si l'on rajoute un point, f est continue en ce point.
Toutes les propriétés des intégrales de fonctions continues sont vérifiées sur chaque intervalle $[a_k,a_{k+1}]$ pour $\hat{f}_k$, donc s'étendent aux fonctions continues par morceaux.
Cela revient à utiliser la relation de Chasles.
Exemple : $f(x)=2x-\text{Ent}(x)$ sur $[-1,2]$.

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x+1)dx+\int_{0}^{1}2xdx+\int_{1}^{2}(2x-1)dx=\left[x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[x^2\right]_{0}^{1}+\left[x^2-x\right]_{1}^{2}=3.$$

IV – Intégrales des fonctions continues

1) Généralisation

On a vu que si f est continue sur $[a,b]$ avec $a<b$, elle est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$.

On a vu aussi que $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0=F(a)-F(a)$.

On généralise la définition :

Définition : Si f est une fonction continue sur un intervalle J, si a et b appartiennent à J, on appelle intégrale de a à b de la fonction f le réel : $I=\displaystyle\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur l'intervalle J.

Exemple : $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2+t-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{4}{3}$.

Remarque : La lettre t appelée variable d'intégration est une variable muette. Elle peut d'ailleurs s'appeler x, u ou ...
a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et b la borne supérieure, même si $a>b$.

Propriétés : $\displaystyle\int_a^a f(t)dt=0$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$.

2) Propriétés de l'intégrale

Toutes les fonctions considérées sont supposées continues sur un intervalle J.

<u>Relation de Chasles</u> : Pour tous *a*, *b* et *c* de *J* : $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$.

<u>Démonstration</u> : $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$.

<u>Linéarité</u> : Pour tous *a* et *b* de *J* et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$: $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

<u>Démonstration</u> : Une primitive de $f + g$ est $F + G$ et une primitive de kf est kF.

$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = [\alpha F(b) + \beta G(b)] - [\alpha F(a) + \beta G(a)] = \alpha[F(b) - F(a)] + \beta[G(b) - G(a)]$.

Donc $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.

<u>Positivité</u> : Si $a \le b$ et si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

<u>Démonstration</u> : $\forall t \in [a,b] \quad F'(t) \ge 0$. Donc *F* est croissante sur $[a,b]$.

Or $a \le b$. Donc $F(a) \le F(b)$. Donc $F(b) - F(a) \ge 0$. Donc $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

<u>Remarque</u> : Si $a \ge b$, c'est le signe inverse. Donc ne pas oublier la comparaison des bornes.
D'autre part, si le signe de *f* n'est pas constant, on ne peut rien dire du signe de l'intégrale.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b] \quad f(t) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Il est évident que si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) = 0$, alors $\int_a^b f(t)dt = 0$.

Réciproquement, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) \ne 0$. Donc $f(c) > 0$. On pose $\varepsilon = \frac{1}{2} f(c)$. Or *f* est continue en *c*.

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, donc $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$.

Donc si $a \le c - \alpha < c + \alpha \le b$, alors : $\int_a^b f(t)dt \ge \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t)dt \ge \alpha f(c) > 0$.

Si $c = a$, on raisonne sur $[a, a+\alpha]$. Si $c = b$, on raisonne sur $[b-\alpha, b]$.

Comparaison de deux intégrales :

Si $a \le b$ et si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \le g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration : On utilise le théorème précédent pour la fonction $g - f$ et la linéarité.

$\forall t \in [a,b] \quad g(t) - f(t) \ge 0$, donc $\int_a^b [g(t) - f(t)]dt \ge 0$, donc $\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \ge 0$.

Cas particulier : Si $a \le b$, alors $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le \int_a^b |f(t)| dt$.

Démonstration : $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \le |f(t)|$ et $\forall t \in [a,b] \quad -f(t) \le |f(t)|$.

Donc : $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b |f(t)| dt$ et $-\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b |f(t)| dt$. Donc $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le \int_a^b |f(t)| dt$.

Inégalité de la moyenne :
Si $a \le b$ et s'il existe deux réels *m* et *M* tels que $\forall t \in [a,b] \quad m \le f(t) \le M$, alors :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$$

Démonstration : On utilise deux fois le théorème de comparaison des intégrales avec les fonctions constantes $t \mapsto m$ et $t \mapsto M$, ou bien l'inégalité des accroissements finis pour *F*.

D'après la formule des accroissements finis pour *F* : $\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$.

Définition : Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$ ($a < b$), le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de *f* sur $[a,b]$.

C'est la fonction constante qui a même intégrale que *f*.

Cas particulier : Si $\forall t \in [a,b] \quad |f(t)| \le M$, alors $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le M|b-a|$.

Il suffit de prendre $m = -M$ et d'étudier les cas $a \le b$ et $a \ge b$.
L'intérêt de cette formule est que l'on n'a pas besoin de l'ordre de *a* et *b*.

3) Intégration par parties

Une des difficultés de l'intégration vient du fait que l'on ne sait pas trouver une primitive d'un produit. On réussit cependant à contourner la difficulté dans certains cas.

Théorème : Si *u* et *v* sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle *J*, alors quel que soient *a* et *b* dans *J* : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Démonstration : $(uv)' = u'v + uv'$. Donc *uv* est une primitive de $u'v + uv'$.

Donc $[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b [u'(t)v(t) + u(t)v'(t)]dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Exemple : $I=\int_0^1 (2t-1)e^{-t}dt$. En posant $v(t)=2t-1$ et $u'(t)=e^{-t}$, donc $u(t)=-e^{-t}$:

$$I=\left[(2t-1)(-e^{-t})\right]_0^1-\int_0^1 2(-e^{-t})dt=-\frac{1}{\mathrm{e}}-1-2\left[e^{-t}\right]_0^1=-\frac{1}{\mathrm{e}}-1-2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)=1-\frac{3}{\mathrm{e}}.$$

On remplace le calcul d'une intégrale par le calcul d'une autre que l'on espère plus facile à calculer. La difficulté réside dans le choix des fonctions u et v. Il faut avoir un objectif précis: par exemple, dériver un polynôme permet d'en diminuer le degré, dériver un logarithme permet de se ramener à une fraction rationnelle, dériver une exponentielle ne sert à rien!
Parfois, on est obligé d'enchaîner plusieurs intégrations par parties, par exemple pour faire disparaître un polynôme car chaque dérivation diminue le degré de 1.

Exemple : $I=\int_0^1 (t^2+1)e^{-t}dt$. On pose $v(t)=t^2+1$ et $u'(t)=e^{-t}$, donc $u(t)=-e^{-t}$.

$$I=\left[(t^2+1)(-e^{-t})\right]_0^1-\int_0^1 (2t)(-e^{-t})dt=-\frac{2}{\mathrm{e}}+1+2\int_0^1 te^{-t}dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on pose $v(t)=t$ et $u'(t)=e^{-t}$, donc $u(t)=-e^{-t}$.

$$I=-\frac{2}{\mathrm{e}}+1+2\left(\left[t(-e^{-t})\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-t})dt\right)=-\frac{2}{\mathrm{e}}+1+2\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}-\left[e^{-t}\right]_0^1\right)=3-\frac{6}{\mathrm{e}}.$$

4) <u>Changement de variable</u>

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$.
Si *f* est une fonction continue sur $[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$ et si *F* est une primitive de *f*, la fonction $F\circ\varphi$ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et : $\forall t\in[\alpha,\beta]\ \ (F\circ\varphi)'(t)=(F'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.
Donc $F\circ\varphi$ est une primitive sur $[\alpha,\beta]$ de la fonction $t\mapsto f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

Donc $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=(F\circ\varphi)(\beta)-(F\circ\varphi)(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction continue sur un intervalle *I* et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle *J* telle que $\varphi(J)\subset I$, alors : $\forall(\alpha,\beta)\in J^2\quad \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du$.
On dit qu'on a effectué le changement de variable $u=\varphi(t)$ et que l'on a posé $du=\varphi'(t)dt$.

De manière pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $u=\varphi(t)$: on remplace $\varphi(t)$ par *u*, $\varphi'(t)dt$ par *du* et on change les bornes.
Lorsque φ est bijective, cela revient à poser $t=\varphi^{-1}(u)$ et $dt=(\varphi^{-1})'(u)du$.

Exemple : $I=\int_0^4 (t+1)e^{\sqrt{t}}dt$. On pose $u=\sqrt{t}$, donc $t=u^2$ et $dt=2udu$.

Si $t=0$, alors $u=0$. Et si $t=4$, alors $u=2$.

Donc : $I=\int_0^2 (u^2+1)e^u(2udu)=2\int_0^2(u^3+u)e^u du$.

On obtient une intégrale que l'on sait intégrer par parties (3 fois) :

$$I = 2\left[(u^3+u)e^u\right]_0^2 - 2\int_0^2 (3u^2+1)e^u du = 20\mathrm{e}^2 - 2\left(\left[(3u^2+1)e^u\right]_0^2 - \int_0^2 6ue^u du\right).$$

$$I = -6\mathrm{e}^2 + 2 + 12\int_0^2 ue^u du = -6\mathrm{e}^2 + 2 + 12\left(\left[ue^u\right]_0^2 - \int_0^2 e^u du\right) = 18\mathrm{e}^2 + 2 - 12\left[e^u\right]_0^2 = 6\mathrm{e}^2 + 14.$$

<u>Conséquence 1</u> : Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[-a,a]$.

- Si *f* est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si *f* est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

En effet, avec le changement de variable $u=-t$, donc $t=-u$ et $dt=-du$:

$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du$, donc $\int_0^a f(t)dt$ si *f* est paire et $-\int_0^a f(t)dt$ si *f* est impaire.

On applique ensuite la relation de Chasles.

<u>Conséquence 2</u> : Soit *f* une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période *P*.

Alors : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+P} f(t)dt = \int_0^P f(t)dt$.

En effet : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+P} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^P f(t)dt + \int_P^{a+P} f(t)dt$

Et avec le changement de variable $u = t-P$, donc $t = u+P$ et $dt = du$:

$$\int_P^{a+P} f(t)dt = \int_0^a f(u+P)du = \int_0^a f(u)du = -\int_a^0 f(u)du$$

V - Applications

1) Calculs d'aires

Etant donnée la construction de l'intégrale :

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ (avec $a \le b$), l'aire (exprimée en unités d'aire) de la partie de plan limitée par la courbe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$.

L'unité d'aire est déterminée par les unités de longueur sur chacun des axes : aire du rectangle ainsi formé.

<u>Exemple</u> : On considère sur [0,1] les courbes d'équations $y = x^2$ et $y=\sqrt{x}$. Elles découpent le carré de côté 1 en trois domaines de même aire 1/3 unité d'aire. En effet :

$$A_1 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \qquad A_1 + A_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} \qquad A_1 + A_2 + A_3 = 1$$

Dans le cas où la fonction *f* est négative sur $[a,b]$, la fonction $(-f)$ est positive et par symétrie par rapport à l'axe *x'Ox* des courbes de *f* et de $(-f)$, les deux domaines situés entre les courbes et l'axe *x'Ox* ont même aire. Donc l'aire est égale à $\int_a^b |f(t)|dt$.

Pour calculer l'aire entre les courbes de *f* et de *g*, on procède par différence en se ramenant à l'axe et on obtient $A = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$.

Interprétation de la valeur moyenne : Géométriquement, si la fonction est positive, c'est la hauteur du rectangle qui a la même aire que l'aire limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

2) Sommes de Riemann

Théorème : Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration : On la démontre pour *f* de classe C^1 et on l'admet pour *f* continue.

Soit $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

D'après la relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$.

Donc : $\int_a^b f(x)dx - S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]dx$.

Donc : $\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_k)| dx$

Or la fonction *f* est de classe C^1 sur $[a,b]$, donc sa dérivée est continue, et donc majorée sur $[a,b]$. Donc $|f'|$ est majorée sur $[a,b]$: $\exists M \quad \forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \le M$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad |f(x) - f(x_k)| \le M|x - x_k|$, donc $|f(x) - f(x_k)| \le M(x_k - x)$.

Donc : $\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \le \sum_{k=1}^{n} M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)dx$.

Donc $\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \le M\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}(x_k - x)^2\right]_{x_{k-1}}^{x_k}$.

Donc $\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \le M\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^2}{2n^2}$. Donc $\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \le \frac{M(b-a)^2}{2n}$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

Remarque : Le résultat reste vrai si la somme va de 0 à *n* ou de 1 à *n*, puisque l'on ajoute des termes qui tendent vers 0 :

$S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = S_n + \frac{b-a}{n} f(b)$ et $T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = S_n + \frac{b-a}{n}[f(a) - f(b)]$.

Exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ converge vers $I = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

<u>Conséquence (Méthode des rectangles)</u> : La somme $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Si *f* est de classe C^1, un majorant de l'erreur commise est $\frac{M(b-a)^2}{2n}$ où *M* est un majorant de $|f'(x)|$ sur $[a,b]$.

Donc la valeur moyenne de *f* sur $[a,b]$ est : $\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des valeurs $f(x_k)$.

Cette propriété permet de justifier la définition de l'espérance d'une variable à densité.

<u>Remarque</u> : Si *f* est continue et croissante sur $[a,b]$, alors sur tout $[a_{k-1},a_k]$: $f(a_{k-1}) \le f(x) \le f(a_k)$, donc en intégrant : $\frac{b-a}{n} f(a_{k-1}) \le \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \le \frac{b-a}{n} f(a_k)$, donc : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1}) \le \int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$, donc : $S_n \le \int_a^b f(x)dx \le T_n$.

Lorsque la fonction *f* est décroissante, on obtient : $T_n \le \int_a^b f(x)dx \le S_n$.

Dans les deux cas, l'intégrale est encadrée par les suites (S_n) et (T_n).

On peut généraliser :

<u>Définition</u> : Etant donnée une subdivision $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ et une fonction *f* définie sur $[a,b]$, on appelle somme de Riemann toute somme de la forme $S = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(y_k)$ où, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, y_k appartient à $[x_{k-1},x_k]$.

On peut évidemment construire une infinité de sommes de Riemann.

Les sommes définies précédemment sont des sommes de Riemann particulières correspondant à des subdivisions de module $\frac{b-a}{n}$. Elles convergent vers l'intégrale lorsque *n* tend vers l'infini, donc quand le pas de la subdivision tend vers 0.

On démontre plus généralement que, si *f* est continue, toutes les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

3) <u>Equation différentielle</u>

En Terminale, on a étudié l'équation différentielle $f' = f$, c'est-à-dire déterminer toutes les fonctions *f* dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$.

On va généraliser aux équations différentielles $f' = fg$ qui apparaissent dans des modélisations de phénomènes économiques.

<u>Théorème</u> : Soit *g* une fonction continue sur un intervalle *I*. Les fonctions dérivables sur *I* solutions de l'équation différentielle $f' = fg$ sont les fonctions *f* telles qu'il existe un réel *K* et une primitive *G* de *g* sur *I* vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{G(x)}$.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, *g* est continue sur *I*, donc admet au moins une primitive *G*.

Si *K* est un réel et si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{G(x)}$, alors *f* est dérivable sur *I* par composition et :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = KG'(x)e^{G(x)} = Kg(x)e^{G(x)} = f(x)g(x)$.

Donc toutes les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation différentielle.
Réciproquement, soit *f* une solution de l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)g(x)$

Soit *G* une primitive de *g*. On pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f(x)e^{-G(x)}$.
Par composition et produit, *h* est dérivable sur *I* et :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = f'(x)e^{-G(x)} - f(x)G'(x)e^{-G(x)} = [f'(x) - f(x)g(x)]e^{-G(x)} = 0$.
Donc *h* est une fonction constante : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = K$, donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{G(x)}$.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + xf(x) = 0$ a pour solutions : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{-x^2/2}$.

4) Prolongement des fonctions de classe C^n

C'est une généralisation du théorème de prolongement de la dérivée.

Théorème : Si une fonction *f* est de classe C^n sur $]a,b]$ (où $a < b$) et si sa dérivée $f^{(n)}$ admet une limite réelle en *a*, alors *f* admet un prolongement de classe C^n sur $[a,b]$.

Démonstration : Par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$, *f* est continue sur $]a,b]$ et admet une limite réelle en *a*, donc *f* admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ continu sur $[a,b]$, donc de classe C^0.
Hérédité : On suppose que toute fonction de classe C^n sur $]a,b]$, dont la dérivée d'ordre *n* admet une limite réelle en *a*, admet un prolongement de classe C^n sur $[a,b]$.
Soit *f* une fonction de classe C^{n+1} sur $]a,b]$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f^{(n+1)}(x) = \ell$.
La fonction $f^{(n+1)}$ admet donc un prolongement par continuité *g* sur $[a,b]$.
La fonction *g* est continue sur $[a,b]$. Soit *G* la primitive de *g* qui s'annule en *b*.

Donc : $\forall x \in]a,b] \quad G(x) = \int_b^x g(t)\,dt = \int_b^x f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(b)$.

Donc : $\forall x \in]a,b] \quad f^{(n)}(x) = f^{(n)}(b) + G(x)$.
Or *G* est dérivable, donc continue sur $[a,b]$. Donc : $\lim\limits_{x \to a} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(b) + G(a)$.

La fonction *f* est donc de classe C^n sur $]a,b]$ et $f^{(n)}$ admet une limite réelle en *a*.
Donc d'après l'hypothèse de récurrence, *f* admet un prolongement *h* de classe C^n sur $[a,b]$.
$\forall x \in]a,b] \quad h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ et $h^{(n)}(a) = \lim\limits_{x \to a} h^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to a} f^{(n)}(x)$ par continuité de $h^{(n)}$.

Donc : $\forall x \in [a,b] \quad h^{(n)}(x) = f^{(n)}(b) + G(x)$. Or *G* est de classe C^1 sur $[a,b]$.
Donc $h^{(n)}$ est de classe C^1 sur $[a,b]$. Donc *h* est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$.
Conclusion : le théorème est démontré.