

Théorie des nombres [th01] - Utilitaires

Karine Zampieri, Stéphane Rivière

Unisciel  algoprogram  Version 22 mai 2018

Table des matières

1	Utilitaires Théorie des nombres	2
1.1	Fonction miroir (renversé d'un entier)	2
1.2	Fonction nchiffres (nombre de chiffres)	4
1.3	Fonction palindromique (prédicat de palindromie)	5
1.4	Fonction persistance (persistance d'un entier)	6
1.5	Fonction poidsAmis (prédicat de même poids)	7
1.6	Fonction produitChiffres (produit des chiffres)	8
1.7	Fonction sommeChiffres (somme des chiffres)	9
1.8	Opérations de base (sur un entier)	10

Python - Utilitaires Théorie des nombres (Solution)



Mots-Clés Théorie des nombres ■
Requis Axiomatique impérative sauf Fichiers ■



Objectif

Ce module contient un ensemble d'utilitaires de « Théorie des nombres » sous forme de problèmes externalisés.

1 Utilitaires Théorie des nombres

1.1 Fonction miroir (renversé d'un entier)



Définition

Le **renversé d'un entier** (dit aussi **miroir**) est la lecture de la gauche vers la droite de ses chiffres. Exemples :

- Le renversé de 2035 est 5302.
- Celui de 8954070 est 704598.
- Et celui de 14500 est 541.



Comment réaliser cette opération pour un entier n ?
Prenez par exemple 12306.

Aide méthodologique

Le tableau ci-dessous montre la méthode pour l'exemple :

Valeurs successives de l'entier n	Restes successifs	Miroirs successifs
12306	6	6
1230	0	60
123	3	603
12	2	6032
1	1	60321

Solution simple

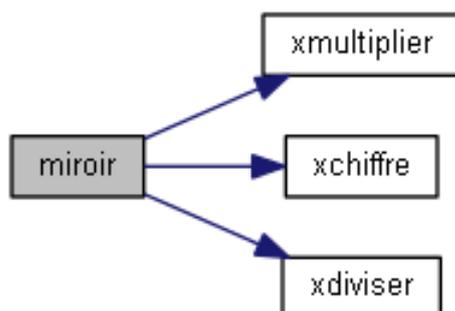
Soit r l'entier miroir, initialement nul.

Tant que n n'est pas nul :

- On fait entrer un zéro dans r (en le multipliant par 10).
- On récupère le dernier chiffre de n (par le modulo 10).
- Et on l'ajoute dans r .
- Enfin on perd le dernier chiffre de n (par une division par 10).



Écrivez une fonction `miroir(n)` qui calcule et renvoie le renversé d'un entier n (supposé positif).



Solution simple

On récupère un par un (opération `xdiviser`) le chiffre de poids faible de l'entier (opération `xchiffre`) et on l'insère en tant que poids faible (opération `xmultiplier`) au résultat à retourner.

Solution détaillée

Voici les étapes :

- Initialisez le résultat `rs` à zéro.
- Puis tant que `n` n'est pas nul :
 - Faites entrer un zéro dans `rs` (opération `xmultiplier`).
 - Récupérez le chiffre de poids faible de `n` (opération `xchiffre`).
 - Et ajoutez-le dans le `rs`.
 - Enfin perdez le chiffre de poids faible de `n` (opération `xdiviser`).



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTH.py]

```
def miroir(n):
    """ Renversé d'un entier

    :param n: un entier positif
    :return: le renversé de n
    """
    rs = 0
    while n != 0:
        rs *= 10
        rs += n % 10
        n //= 10
    return rs
```

1.2 Fonction `nchiffres` (nombre de chiffres)



Écrivez une fonction `nchiffres(n)` qui calcule et renvoie le nombre de chiffres d'un entier `n` (supposé strictement positif). Exemples :

```
nchiffres(2613609) ==> 7
nchiffres(10000) ==> 5
```

Solution simple

L'idée est d'isoler les chiffres successivement, jusqu'à ce que l'entier `n` vaut zéro, traduisant que tous les chiffres de `n` ont été analysés. Le nombre d'itérations, initialement nul, et incrémentez à chaque tour de boucle divisant `n` par 10, équivaut au nombre de chiffres de `n`.



Modifiez votre fonction de sorte qu'elle renvoie le nombre de chiffres d'un entier `n` positif ou nul, c.-à-d. :

```
nchiffres(0) ==> 1
```

Solution simple

On modifie l'initialisation du compteur à un ou zéro selon la valeur de `n`.



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python `@[UtilsTH.py]`

```
def nchiffres(n):
    """ Nombre de chiffres d'un entier

    :param n: un entier positif
    :return: le nombre (=taille) de chiffres de n
    """
    rs = (1 if n == 0 else 0)
    while n != 0:
        rs += 1
        n //= 10
    return rs
```

1.3 Fonction palindromique (prédicat de palindromie)



Définition

Un **entier** est dit **palindromique** s'il est égal à son renversé.

Exemple : Les entiers 12021, 134431 et 1047401 sont palindromiques.



Écrivez une fonction `palindromique(n)` qui teste et renvoie `Vrai` si un entier `n` (supposé positif) est palindromique, `Faux` sinon.



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTH.py]

```
def palindromique(n):  
    """ Prédicat de palindromie d'un entier  
  
    :param n: un entier positif  
    :return: Vrai si n est palindromique, Faux sinon  
    """  
    return (n == miroir(n))
```

1.4 Fonction persistance (persistance d'un entier)



Définition

La **persistance d'un entier** positif est le nombre d'itérations nécessaires jusqu'à réduire le produit de ses chiffres à un seul chiffre.

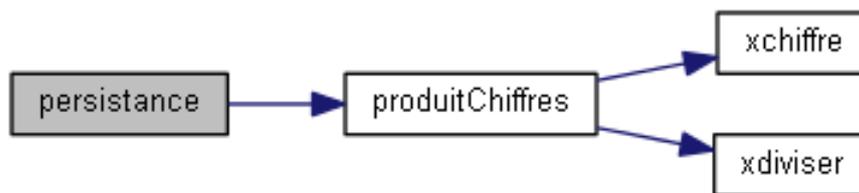
Exemple : La persistance de 6788 vaut 6 car :

1. $6 \times 7 \times 8 \times 8 = 2688$
2. $2 \times 6 \times 8 \times 8 = 768$
3. $7 \times 6 \times 8 = 336$
4. $3 \times 3 \times 6 = 54$
5. $5 \times 4 = 20$
6. $2 \times 0 = 0$

Il a fallu six étapes pour sa réduction à un entier compris entre 0 et 9.



Écrivez une fonction `persistance(n)` qui calcule et renvoie la persistance d'un entier `n` (supposé positif).



Solution simple

On utilise la fonction `produitChiffres` et on compte le nombre d'itérations à effectuer jusqu'à le réduire à un unique chiffre, c.-à-d. tant que $n \geq 10$.



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTH.py]

```

def persistance(n):
    """ Persistence d'un entier

    :param n: un entier positif
    :return: la persistance de n
    """
    niters = 0
    while n >= 10:
        niters += 1
        n = produitChiffres(n)
    return niters
  
```

1.5 Fonction poidsAmis (prédicat de même poids)



Définition

Deux entiers a et b ont **même poids** si la somme de leurs chiffres est identique.
Exemple : 24 et 11121 ont même poids, la somme des chiffres étant 6.



Écrivez une fonction `poidsAmis(a,b)` qui teste et renvoie `Vrai` si deux entiers a et b (supposés positifs) ont même poids, `Faux` sinon.



Solution simple

Soient $s1$ la somme des chiffres de a et $s2$ celle de b .
Alors a et b ont même poids si $s1$ vaut $s2$.



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTH.py]

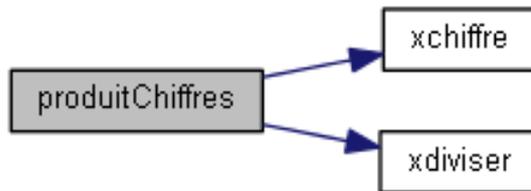
```
def poidsAmis(a, b):  
    """ Prédicat de poids amis de deux entiers  
  
    :param a: un entier positif  
    :param b: un entier positif  
    :return: Vrai si a et b ont meme poids, Faux sinon  
    """  
    return (sommeChiffres(a) == sommeChiffres(b))
```

1.6 Fonction produitChiffres (produit des chiffres)



Écrivez une fonction `produitChiffres(n)` qui calcule et renvoie le produit des chiffres d'un entier `n` (supposé positif). Exemple :

```
produitChiffres(82419) ==> 9*1*4*2*8 = 576
```



Solution simple

On récupère un par un le chiffre de poids faible de l'entier `n` (opération `xchiffre`), on le multiplie au résultat à retourner, puis on perd le chiffre traité dans `n` (opération `xdiviser`).

Attention! C'est un produit d'où l'initialisation à 1 (si `n` n'est pas nul).



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTH.py]

```
def produitChiffres(n):
    """ Produit des chiffres d'un entier

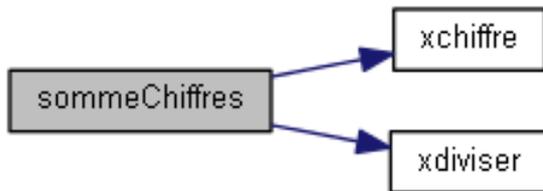
    :param n: un entier positif
    :return: le produit des chiffres de n
    """
    rs = (0 if n == 0 else 1)
    while n != 0:
        rs *= n % 10
        n //= 10
    return rs
```

1.7 Fonction sommeChiffres (somme des chiffres)



Écrivez une fonction `sommeChiffres(n)` qui calcule et renvoie la somme des chiffres d'un entier `n` (supposé positif). Exemple :

```
sommeChiffres(213609) ==> 9+0+6+3+1+2 = 21
```



Solution simple

La fonction doit traverser l'entier (boucle `TantQue`) et :

- Récupérer le dernier chiffre de `n` : opération `xchiffre`
- Perdre le dernier chiffre de `n` : opération `xdiviser`

Solution détaillée

On effectue les opérations suivantes :

- Initialisation du résultat à zéro (c'est une somme).
- Puis tant que tous les chiffres de l'entier `n` n'ont pas été traités :
 - Récupération du chiffre de poids faible de `n` (par le modulo).
 - Sommaton au résultat à retourner.
 - Puis perte du chiffre traité dans `n` (par la division).



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTH.py]

```
def sommeChiffres(n):
    """ Somme des chiffres d'un entier

    :param n: un entier positif
    :return: la somme des chiffres de n
    """
    rs = 0
    while n != 0:
        rs += n % 10
        n //= 10
    return rs
```

1.8 Opérations de base (sur un entier)

Terminologie

Dans le système décimal, un entier naturel N est représenté par une séquence de **chiffres** $a_n a_{n-1} \cdots a_k \cdots a_0$ dont la valeur est :

$$\begin{aligned} N &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \times 10^k \end{aligned}$$

avec $0 \leq a_k < 10$, $0 \leq k \leq n$ et $a_n \neq 0$. L'entier a_0 est appelé le **chiffre de poids faible** de N et a_n son **chiffre de poids fort**.

Exemple

Pour $N = 8107$:

- $n = 3$, $a_3 = 8$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 7$
- $N = 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 8000 + 100 + 7$
- 7 est le chiffre de poids faible de N
- 8 est le chiffre de poids fort de N



Associez chacun des éléments (à gauche) à son opération (à droite).

Etiquette	Cible
Décale les chiffres d'un entier vers la gauche d'une position Exemples : 30129 ==> 301290 et 210 ==> 2100	Par le modulo 10
Chiffre de poids faible d'un entier Exemples : 30129 ==> 9 et 210 ==> 0	En le divisant par 10
Décale les chiffres d'un entier vers la droite d'une position Exemples : 30129 ==> 3012 et 210 ==> 21	En le multipliant par 10

Solution

- Le modulo 10 (reste de la division euclidienne par 10) récupère le chiffre de poids faible d'un entier.
- La division par 10 décale les chiffres d'un entier vers la droite d'une position.
- Alors que la multiplication par 10 décale les chiffres d'un entier vers la gauche d'une position.