

Problème générique de Dijkstra [tr06] - Exercice

Karine Zampieri, Stéphane Rivière

Unisciel  algoprog  Version 21 mai 2018

Table des matières

1	Problème de Dijkstra : Cas $k = 3$	2
2	Téléchargements – Utilitaires	3
3	Problème générique de Dijkstra / pgdijkstra	4
3.1	Représentation des données	4
3.2	Cas $k=2$	4
3.3	Cas $k=3$: Problème de Dijkstra	5
3.4	Cas $k=4$ et Cas générique	6

alg - Problème générique de Dijkstra (TD)



Mots-Clés Algorithmes de tris et rangs ■

Requis Algorithmes de tris et rangs, Complexité des algorithmes ■

Difficulté ● ● ○ (2 h) ■



Objectif

Cet exercice décrit et analyse le problème générique du drapeau hollandais de E. DIJKSTRA.

1 Problème de Dijkstra : Cas $k = 3$

Le problème de Dijkstra

Vous disposez de cailloux rouges, blancs, bleus alignés dans un ordre quelconque. Par **échanges successifs** de cailloux (et non par constitution de paquets séparés en un autre endroit) et en ne testant qu'**une fois** la couleur de chaque caillou, vous devez mener à une situation finale où tous les cailloux bleus se trouvent avant tous les blancs, eux-mêmes avant tous les rouges. Le nombre des cailloux de chaque couleur est quelconque.

Objectif du problème

Le but à atteindre est la répartition des cailloux en trois ($k = 3$) classes, les seules opérations autorisées étant :

- Faire des échanges successifs.
- Tester la couleur une seule fois par caillou.
- Utiliser l'emplacement initial.

Première formalisation du problème

Elle consiste à considérer l'espace occupé par les cailloux comme une suite T de cases numérotées de 1 à n , une case contenant un seul caillou et étant identifié par $T[j]$ avec $1 \leq j \leq n$.

Problème générique de Dijkstra

Soit T un tableau contenant des cailloux colorés, la couleur étant identifiée à un entier de $[1..k]$ (k couleurs). C'est toujours possible : il suffit d'une fonction de couleur $c(v)$ qui associe à chaque élément de valeur v de T , un entier de $[1..k]$.

Objectif du problème générique

Le but à atteindre est la répartition des cailloux en k classes, les deux seules opérations autorisées étant :

- La permutation de deux éléments du tableau.
- Le test de la couleur d'un élément.

...(suite page suivante)...

2 Téléchargements – Utilitaires

Cet exercice utilise les opérations suivantes, toutes définies dans un bon nombre d'exercices de cet espace thématique :

- Fonction `saisirNombreElements`
- Procédure `afficherTri`
- Procédure `aleatoireTri`
- Procédure `permuterTab`

Elles ont été regroupées dans une bibliothèque.

((alg)) Définitions PseudoCode

```
Constante TMAX <- ...
Typedef ITableau = Entier[TMAX]
```



Fixez la constante `TMAX=50` (nombre maximum d'éléments).



Soit la fonction `saisirNombreElements(nmax)` qui renvoie le nombre d'éléments, saisi par l'utilisateur, entier compris dans `[1..nmax]`. Elle affiche l'invite :

Nombre d'éléments dans `[1..[nmax]]?`



Soit la procédure `afficherTri(t,n,g,h)` qui affiche, à la queue-leu-leu séparés par un espace le tout entre crochet, les `n` premières valeurs d'un `ITableau t`, les indices `g` et `h` indiquant le sous-intervalle du tri et représentés par une barre verticale. La barre de gauche est avant `g` et celle de droite est après `h`. Exemple :

`afficherTri(t,10,4,9) ==> [1 2 3 |4 5 6 7 8 9 |10]`



Soit la procédure `aleatoireTri(t,n,vmax)` qui initialise les `n` premiers éléments d'un `ITableau t` en utilisant `vmax` comme valeur maximale pour la fonction de génération d'un entier pseudo-aléatoire.



Soit la procédure `permuterTab(t,j,k)` qui permute les éléments d'indice `j` et `k` d'un `ITableau t`. Les indices sont supposés valides.



Remarque

Si la fonction et les procédures n'ont pas été réalisées, il vous est conseillé de la(les) rédiger dans l'exercice @[Utilitaires Tris et Rangs].

...(suite page suivante)...

3 Problème générique de Dijkstra / pgdijkstra

Nous allons étudier les cas particuliers ($k = 2$, $k = 3$ et $k = 4$) puis le cas générique.

3.1 Représentation des données



Définissez les couleurs `CBLEU=1`, `CBLANC=2`, `CROUGE=3` et `CVERT=4`.



Définissez une fonction `couleur(t,k)` qui, pour un indice k d'un Tableau t , renvoie la couleur

- `CBLEU` si $t[k]=0$
- `CBLANC` si $t[k]=1$
- `CROUGE` si $t[k]=2$
- `CVERT` sinon (cas $t[k]>2$)

3.2 Cas $k=2$

Il y a des cailloux de couleur `CBLEU` et `CBLANC` alignés dans un ordre quelconque. Le but est de placer les premiers à gauche et les seconds à droite.

La bonne méthode est d'élaborer un invariant qui va être maintenu tout au long de l'exécution. Plaçons-nous à une étape intermédiaire où la situation est la suivante :

1	g	j	h	n
...CBLEU ...	inconnu		...CBLANC ...	

Au départ : $j = 1$ et $h = n$. Lorsque $h < j$, la situation désirée est atteinte. Comment progresser vers ce but ?

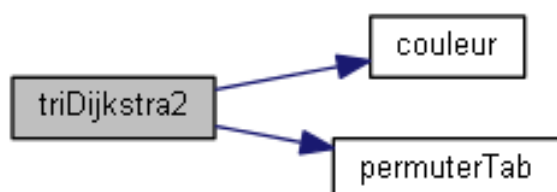
En regardant $T[j]$:

- S'il est de couleur `CBLEU` : incrémentez j . La quantité $(h - j)$ diminue.
- Sinon (il est de couleur `CBLANC`) : permuter les éléments $T[j]$ et $T[h]$ puis décrémente h . La quantité $(h - j)$ diminue.

La quantité $(h - j)$ est le *variant* de la boucle. Au départ elle vaut n et à chaque itération elle décroît. Au bout d'au plus n itérations elle sera négative ou nulle.



Écrivez une procédure `triDijkstra2(t,n)` qui effectue le réarrangement décrit ci-dessus pour n cailloux d'un Tableau t .





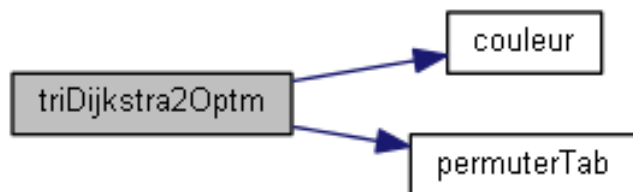
Calculez la complexité au pire de votre solution.



Pouvez-vous l'améliorer ?



Écrivez une procédure `triDijkstra2Optm(t,n)` qui effectue le réarrangement en tenant compte de la symétrie pour n cailloux d'un Tableau t .



Écrivez un algorithme qui saisit le nombre de cailloux, déclare un Tableau et l'initialise de façon aléatoire en prenant 2 pour valeur maximale puis en effectue la partition en deux couleurs et l'affiche.

3.3 Cas $k=3$: Problème de Dijkstra

Il y a des cailloux de couleur **CBLEU**, **CBLANC** et **CROUGE** alignés dans un ordre quelconque. Le but est de placer les premiers à gauche, les seconds au milieu et les troisièmes à droite. Reprenons la démarche par invariant et variant vue pour $k = 2$. La situation générique est donc la suivante :

1	g	j	h	n
...BLEUBLANC ...	inconnu	...ROUGE ...	

Au départ : $g = 0$, $j = 1$ et $h = n + 1$.

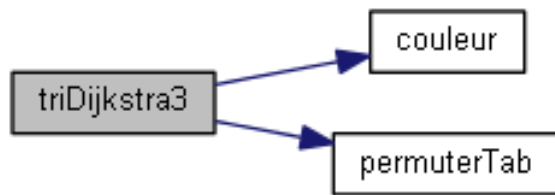
On cherche à réduire la zone inconnue de taille $h - j$.

Regardons $T[j]$:

- S'il est de couleur **CBLANC** : incrémentez j et le variant $(h - j)$ diminue.
- S'il est de couleur **CBLEU** : incrémentez g , permutez les éléments en j et g et incrémentez j . Le variant décroît aussi.
- Sinon (il est de couleur **CROUGE**) : décrémentez h puis permutez les éléments en j et h . Le variant décroît aussi.



Écrivez une procédure `triDijkstra3(t,n)` qui effectue le réarrangement décrit ci-dessus pour n cailloux d'un Tableau t .



Modifiez votre algorithme pour qu'il saisisse en plus le nombre de couleurs dans `ncouleurs` (entier), initialise aléatoirement les cailloux d'un `Tableau` dans `[0..ncouleurs]` puis effectue la partition en deux ou trois couleurs selon la valeur de `ncouleurs` et l'affiche.



Quelle est la complexité de votre solution ?



Qu'en pensez-vous ?
Pouvez-vous l'améliorer ?



Il est possible de trouver une solution indirecte.
Expliquez comment.



Quel est le coût de votre solution indirecte ?

3.4 Cas $k=4$ et Cas générique

Il y a des boules de couleur `CBLEU`, `CBLANC`, `CROUGE` et `CVERT`. Le but est de placer les cailloux de couleur `CBLEU` à gauche, `CBLANC` puis `CROUGE` et `CVERT` à droite. La situation générique est la suivante :

1	g	j	h	v	n
...BLEUBLANC ...	inconnu	...ROUGEVERT ...	

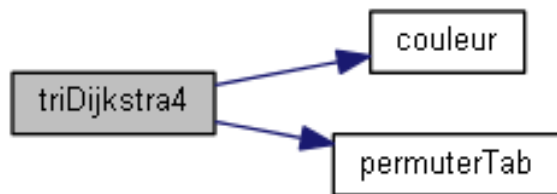
Au départ : $g = 0$, $j = 1$ et $v = h = n + 1$. Nous cherchons à réduire la zone inconnue de taille $h - j$.

Regardons $T[j]$:

- S'il est de couleur `CBLANC` : incrémentez j .
- S'il est de couleur `CBLEU` : incrémentez g , permutez les éléments en j et g et incrémentez j (comme précédemment).
- S'il est de couleur `CROUGE` : décrétez h puis permutez les éléments en j et h .
- Sinon (il est de couleur `CVERT`) : décrétez v puis permutez les éléments en j et v ; puis vérifiez si $h \leq v$ auquel cas il faut également décrétez h et permuter les éléments.



Écrivez une procédure `triDijkstra4(t,n)` qui effectue le réarrangement décrit ci-dessus pour `n` cailloux d'un Tableau `t`.



Complétez votre algorithme afin d'effectuer la partition en quatre couleurs si `ncouleurs` vaut 4.



Quelle est la complexité de votre solution ?



Ici aussi, il est possible de trouver une solution indirecte. Expliquez comment.



Connaissant les solutions pour $k = 1, \dots, m - 1$,
Comment construire une solution pour $k = m$?