Tables de hachage [ht] - Algorithmique

Karine Zampieri, Stéphane Rivière

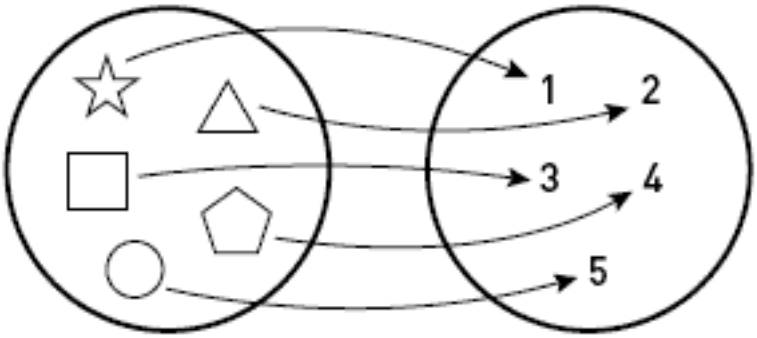
Unisciel algoprog Version 21 mai 2018

Table des matières

Tables de hachage

Mots-Clés Tables de hachage ■
Requis Axiomatique impérative ■
Difficulté ● ● ○

Introduction
Ce module décrit les **tables de hachage**.



1 Liminaire : Exemple

On veut stocker dans un tableau les éléments de valeur 1, 5 et 50. On peut utiliser un tableau de 50 cases `t[1..50]` :

- On met l'élément de valeur 1 dans la case 1.
- On met l'élément de valeur 5 dans la case 5.
- ...

La complexité des opérations d'insertion, de recherche et de suppression sont alors en $O(1)$: les performances sont *excellentes*. Le problème : il y a seulement 3 cases utilisées sur 50. On échange de la vitesse contre de la mémoire. Peut-on faire mieux ? Oui par exemple :

- Valeur 1 dans la case 1, valeur 5 dans la case 2, valeur 50 dans la case 3.
- Seulement 3 cases nécessaires ce qui est beaucoup plus efficace.

Comment a-t-on fait ? On a diminué le nombre de valeurs possibles.

2 Définitions

Table de hachage

Soit U l'ensemble des valeurs possibles et soit K l'ensemble des valeurs effectivement utilisées. Une **table de hachage** est une table (tableau) dont :

- Les éléments sont placés dans des cases.
- Le choix de la case est effectué en appliquant une fonction sur une valeur : c'est la *fonction de hachage*.

Remarque

Si U est grand, la taille du tableau est problématique.
Si K est petit, il y a gaspillage de ressources.

Fonction de hachage, Valeur de hachage

Une **fonction de hachage** h établit une relation entre U (univers des valeurs) et un sous-ensemble fini :

$$h : U \to \{0, 1, ..., m-1\}$$

$h(k)$ est appelé **valeur de hachage** de k.

- On place notre élément dans la case $h(k)$.
- Bonne nouvelle : on doit gérer m valeurs au lieu de $|U|$.
- Mauvaise nouvelle : plusieurs valeurs peuvent avoir une même valeur de hachage : c'est une *collision*.
- Si chaque élément a la même chance d'être haché dans n'importe laquelle des alvéoles, indépendamment des éléments précédents, la fonction de hachage est dite *uniforme simple*.

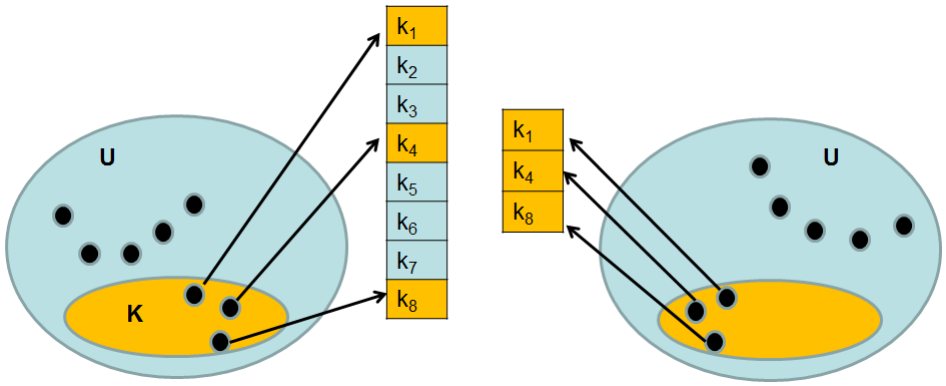


FIGURE 1 – Comparaison tableau/table de hachage

Collision

Il y a **collision**, si deux valeurs (ou plus) ont la même valeur de hachage, c.-à-d. :

$$h(k_1) = h(k_2)$$

Exemple

Dans les exemples, seules les clés apparaissent : nous faisons abstraction des valeurs. Prenons une table de capacité 10, pour y stocker des éléments déterminés par des clés à valeurs entières. La fonction de hachage est $h(x) = x \bmod 10 + 1$. Si les valeurs des clés à introduire dans la table sont 12, 17, 29 et 33 on aura la configuration suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		12	33				17		29

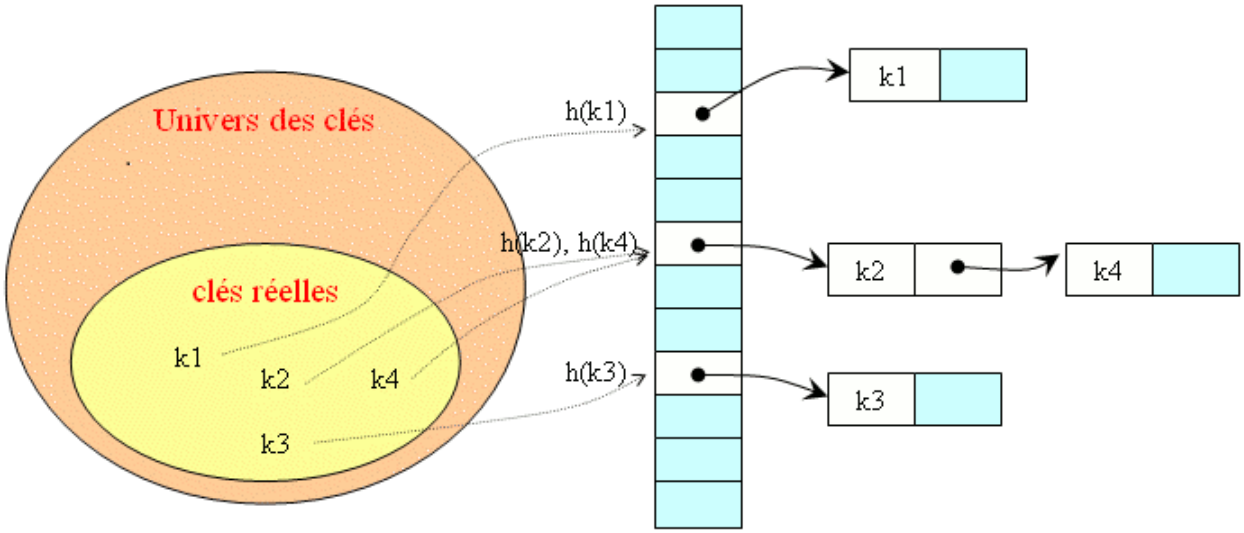
Nous voyons que l'occupation du tableau est irrégulière. Il faut dès lors pouvoir reconnaitre les cases vides des cases occupées (par exemple en y mettant une valeur aberrante de la clé). Que se passerait-il si on veut introduire la clé de valeur 42 ? Elle devrait occuper la même case que 12, ce qui n'est pas possible. Nous sommes dans le cas d'une « collision » pour lequel nous envisageons deux solutions :

- Le chaînage.
- L'adressage ouvert.

3 Le chaînage

3.1 Principe

Résolution des collisions par chaînage
Avec cette technique, on place dans une liste chaînée tous les éléments ayant la **même valeur de hachage** :



Pour rechercher un élément, il suffit à présent de parcourir la liste chainée dont l'accès se trouve dans la case d'indice $h(x)$. L'avantage est l'aisance de l'implémentation, et de plus, il n'y a pas de limitation (théorique) au nombre de clés. Toutefois, il faut veiller à prendre un tableau assez grand pour que la taille des listes reste réduite, le but étant de minimiser les parcours.

Exemple
L'introduction des clés 12, 17, 29, 33, 42 et 39 dans la table donnerait la configuration suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nil	Nil			Nil	Nil	Nil		Nil	
		↓	↓				↓		↓
		42	33				17		39
		↓							↓
		12							29

(Il est évident que les ajouts se feront toujours en tête de liste).

3.2 Opérations de dictionnaire

Les opérations de dictionnaire sont implémentées facilement :

- `inserer(x)` : insertion d'un élément `x` en tête de la liste chaînée $h(x.valeur)$
- `chercher(k)` : recherche d'un élément de valeur `k` dans la liste chaînée $h(k)$
- `supprimer(x)` : suppression d'un élément `x` dans la liste chaînée $h(x.valeur)$

Si l'opération de hachage est $O(1)$ alors l'insertion est en $O(1)$ mais la complexité de la recherche et de suppression sont indéfinies. On introduit la notion de facteur de remplissage.

Facteur de remplissage

Étant donné une table de hachage T avec m cases et contenant n éléments, le **facteur de remplissage** est défini par :

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

Remarque

Le comportement dans le pire cas est en $\Theta(n)$ si tous les objets sont dans la même case. On suppose qu'un objet a une chance équitable de se retrouver dans une des cases : le hachage est *uniforme simple*.

3.3 Complexité de la recherche

Théorème

Dans une table de hachage avec résolution des collisions par chaînage, une recherche qui échoue prend en moyenne un temps $\Theta(1+\alpha)$ avec une fonction de hachage uniforme simple.

Preuve

Avec un hachage uniforme simple, toute valeur a la même probabilité d'être hachée vers une case m. Le temps moyen d'une recherche infructueuse est donc le temps moyen de parcours d'une des m listes chaînées. La longueur moyenne de ces listes étant le facteur de remplissage, il y a donc en moyenne α éléments à examiner. Rappel : le calcul de la fonction de hachage est en $O(1)$. ■

Théorème

Dans une table de hachage avec résolution des collisions par chaînage, une recherche réussie prend en moyenne un temps $\Theta(1+\alpha)$ avec une fonction de hachage uniforme simple.

Preuve
Pour simplifier la preuve, on suppose que l'on insère toujours en fin de la liste chaînée. Si on cherche le i-ème élément inséré, il nous faut parcourir la chaîne sur une longueur égale à celle qu'elle avait sans cet élément puis effectuer une comparaison. Quand l'élément i a été ajouté, la chaîne avait une longueur $\frac{i-1}{m}$. Rechercher le i-ème élément demande donc $1 + \frac{i-1}{m}$ opérations. En faisant la moyenne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{m}\right) &= 1+\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\\ &= 1+\frac{1}{nm}\left(\frac{(n-1)m}{2}\right)\\ &= 1+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2m}\end{aligned}$$

Si l'on considère que le nombre de cases m est proportionnel au nombre d'éléments n, on a $n = O(m)$ et $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$. ■

Conclusion
Il est possible d'avoir une recherche en $O(1)$ en moyenne dans une table utilisant des listes chaînées mais il faut maintenir la relation $n = O(m)$, autrement dit augmenter/diminuer la taille de la table tout le temps. En pratique, on ne le fait pas, mais on est très poche de $O(1)$ quand même.

3.4 Complexité de la suppression

La complexité de la suppression dépend de l'information dont on dispose pour retirer l'objet (valeur ou référence vers l'objet) et de la façon dont est gérée la liste chaînée (simple ou double).

En considérant α le nombre d'éléments dans la liste, et si on ne dispose que de la valeur, il faut trouver l'objet en $O(\alpha)$ puis le supprimer. Rappel (si on a une référence sur un élément) :

- Supprimer dans une liste simplement chaînée : $O(\alpha)$
- Supprimer dans une liste doublement chaînée : $O(1)$

3.5 Conclusion : Complexité moyenne

On a donc les complexités suivantes :

- Insertion : $\Theta(1)$
- Recherche : $\Theta(1+\alpha)$
- Suppression : $\Theta(1+\alpha)$

Si le nombre de cases est proportionnel au nombre d'éléments, alors toutes les opérations peuvent être supportées en $O(1)$.

3.6 Exemple de fonction de hachage

Idéalement une fonction de hachage devrait vérifier l'hypothèse de hachage uniforme. En pratique, on essaie de s'en approcher au maximum.

Méthode de la division
Elle fait correspondre une valeur k avec une des m alvéoles, en prenant le reste de la division de k par m :

$$h(k) = k \mod m$$

Remarque
Cette méthode est très rapide mais certaines valeurs de m sont à éviter.

Exemple
Prenons l'ensemble des étudiants d'une université, avec comme clé le numéro d'étudiant de 5 chiffres. La fonction $h(x) = x$ div 1000 ne serait pas un bon choix car elle donnerait un nombre réduit de valeurs (comprises actuellement entre 35 et 40), à partir d'un ensemble de plusieurs centaines d'étudiants. La fonction $h(x) = x \mod 100$ est déjà bien meilleure, elle donnerait des valeurs entre 0 et 99. Il y aura bien sûr des collisions, vu que les étudiants de numéros 37156 et 38956 seraient « hachés » de la même façon.

Exemple
Pour les codes postaux des villes de Belgique, on pourrait prendre la fonction $h(x) = x \mod 10$. Elle donnerait un ensemble de valeurs entre 100 et 999 où les collisions seraient peu nombreuses (vu que la plupart des codes se terminent par 0).

4 Adressage ouvert

4.1 Principe

Résolution des collisions par l'adressage ouvert

L'idée est la suivante : lorsqu'on veut utiliser un emplacement de la table et que celui-ci est occupé, on va voir ailleurs. Dans la technique la plus simple, on va simplement continuer le parcours du tableau, à partir de la position de départ, à la recherche d'un « trou ». Pour la recherche, on procède de même : la fonction de hachage nous indique où commencer à chercher et on poursuit jusqu'à trouver l'élément ou un « trou ».

Exemple

Reprenons l'exemple ci-avant : la clé 42 devrait occuper la case d'indice 3. Comme celle-ci est occupée, on parcourt le tableau jusqu'à la prochaine case libre, celle d'indice 5 et on y place l'élément :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		12	33	42			17		29

Ce parcours de recherche est « circulaire » : arrivé à la dernière case, on revient au début. Ainsi, la clé 39 qui ne peut pas être mise à sa place « normale » (occupée par 29) sera placée en première position :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
39		12	33	42			17		29

L'exemple peut laisser perplexe vu la petite taille du tableau ; si le tableau a une taille suffisante, on peut imaginer que la clé cherchée ne sera jamais très loin de la position donnée par $h(x)$ de telle façon que la longueur du parcours requis peut être considéré comme négligeable.

La suppression est plus délicate à mettre en oeuvre : il ne suffit pas de supprimer simplement la clé dans la case donnée par la fonction de hachage, car s'il y a eu une collision, on ne retrouverait plus l'autre valeur de clé. Il faut donc reboucher le trou avec la dernière clé donnant la même valeur de hachage. Ainsi, dans l'exemple, si on supprime 12, il faut déménager 42 dans la case d'indice 3 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
39		42	33				17		29

Conclusion

Notons que la table a aussi une capacité maximale, on ne pourra pas y mettre plus de clés que sa taille. Cette technique est donc assez délicate mais intéressante lorsque les allocations dynamiques sont impossibles ou coûteuses. Si elles sont possibles, on utilisera plutôt la technique du chaînage.

4.2 Opérations de dictionnaire

Opération d'insertion

Pour effectuer une insertion, on examine (sonde) successivement les cases de la table jusqu'à en trouver une vide. La séquence de positions à tester dépend de la clé à insérer.

On étend la fonction de hachage pour y inclure le nombre de sondages déjà effectués :

$$h : U \times \{0, 1, ..., m-1\} \to \{0, 1, ..., m-1\}$$

Pour examiner toutes les cases, il faut que la séquence de sondage soit une permutation de l'ensemble des valeurs de hachage. L'opération d'insertion s'écrit :

Algorithme inserer

```
Fonction inserer ( DR T : OpenHash ; x : Elément ) : Entier
Variable k : Entier
Début
  |  k <- clé ( x )
  |  i <- 0
  |  Répéter
  |    |  j <- h ( k , i )
  |    |  Si T [ j ] = Nil Alors
  |    |    |  T [ j ] <- x
  |    |    |  Retourner j
  |    |  Sinon
  |    |    |  i <- i + 1
  |    |  FinSi
  |  Jusqu'à i = m
  |  Erreur "Plus de place"
Fin
```

Opération de recherche

L'opération de recherche s'écrit :

Algorithme rechercher

```
Fonction recherche ( T : OpenHash ; x : Elément ) : Itérateur
Variable k : Entier
Début
  |  k <- clé ( x )
  |  i <- 0
  |  Répéter
  |    |  j <- h ( k , i )
  |    |  Si T [ j ] = Nil Alors
  |    |    |  Retourner j
  |    |  Sinon
  |    |    |  i <- i + 1
  |    |  FinSi
  |  Jusqu'à ( T [ j ] = Nil Ou i = m )
  |  Retourner Nil
Fin
```

4.3 Complexité de la recherche

Théorème
Dans une table de hachage en adressage ouvert avec un facteur de remplissage $\alpha = n/m < 1$, le nombre de sondages lors d'une recherche infructueuse vaut au plus $1/(1-\alpha)$ avec une fonction de hachage uniforme.

Preuve
Étudions le pire cas d'une recherche infructueuse.

- Chaque sondage sauf le dernier accède à une case ne contenant pas la valeur recherchée.
- Le dernier accède à une case vide.
- Pourquoi la dernière case ne peut pas être pleine ?

On définit

$$p_i = \Pr\{i \text{ sondages exactement accèdent à des alvéoles occupées}\}, i = 0, 1, 2, ...$$

Pour $i > n$, on a $p_i = 0$ car on ne peut pas trouver plus de n alvéoles occupées.

Le nombre de sondages attendues est donc :

$$1 + \sum_{i=0}^{\infty} i p_i$$

Pour calculer cette formule, on utilise un résultat de probabilité. Quand une variable aléatoire X prend une valeur dans l'ensemble des naturels, on a :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \Pr(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i(\Pr(X \geq i) - \Pr(X \geq i+1)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X \geq i) \end{aligned}$$

en remarquant que chaque terme $\Pr(X \geq i)$ est ajouté i fois et soustrait $i-1$ fois, sauf pour le premier terme.

On introduit :

$$q_i = \Pr\{i \text{ sondages au moins accèdent à des alvéoles occupées}\}, i = 0, 1, 2, ...$$

On a donc (cf. résultat précédent)

$$\sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

Que vaut q_i ?

- q_1 est la probabilité pour que le premier sondage bute sur une case occupée, donc :

$$q_1 = \frac{n}{m}$$

- Avec un hachage uniforme simple, le deuxième sondage se fera uniquement sur une nouvelle case, donc parmi $m-1$ cases. On effectue le deuxième sondage que si le premier bute sur une case occupée, d'où :

$$q_2 = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n-1}{m-1}\right)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} q_i &= \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n-1}{m-1}\right)\cdots\left(\frac{n-i+1}{m-i+1}\right) \\ &= \leq \left(\frac{n}{m}\right)^i \\ &= \leq \alpha^i \end{aligned}$$

Finalement en utilisant l'hypothèse $\alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned} 1+\sum_{i=0}^{\infty} ip_i &= 1+\sum_{i=1}^{\infty} q_i \\ &\leq 1+\alpha+\alpha^2+\ldots \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. ■

4.4 Exemple de fonction de hachage

Cette fois, la fonction de hachage ne doit pas seulement retourner une valeur, mais elle doit donner une série de valeurs (toutes les alvéoles).

Méthode de sondage linéaire
Elle est classiquement utilisée :

$$h(k,i) = (h'(k)+i) \mod m$$

avec $h'(k)$ une fonction de hachage ordinaire. Bien sûr, cette méthode a ses défauts.

5 Conclusion

Les tables de hachage ont de très bonnes propriétés :

- Rapidité : probablement la structure la plus rapide pour l'insertion quand le nombre de données est grand
- Efficacité : nul besoin d'ajouter des informations ou d'envelopper (Noeud) les données pour l'adressage ouvert.

Mais elles souffrent de limitations :

- Elles permettent juste de savoir si un élément est présent, pas de rechercher le plus petit.
- Il faut prévoir la taille de la table avant exécution, contrairement aux autres structures dynamiques.
- Toutes leurs propriétés de complexité dépendent du bon fonctionnement de la fonction de hachage.

6 Références générales

Aho-AL2 @BookAho-AL2, author = Aho, A.V. AND Ullmann, J.D., title = Concepts fondamentaux de l'informatique, publisher = Dunod, ISBN = 2-10-001683-0, year = 1993, note = Best-seller mondial. Fortement recommandé pour toutes les matières du centre informatique.

Baynat-AL1 @BookBaynat-AL1, author = Baynat B., title = Exercices et problèmes d'algorithmique, publisher = Dunod, ISBN = 978-2-10-054991-7, year = 2010 (3e édition), note = 155 énoncés avec solutions détaillées – Très bon complément de [L'algorithmique, Cormen-A1]