

Puissance nième d'un nombre [rc02] - Exercice

Karine Zampieri, Stéphane Rivière

Unisciel

sciel

algotprog

UNIVERSITÉ
HAUTE-ALSACE

Version 21 mai 2018

Table des matières

1	Puissance nième d'un nombre / pgpuissance	2
1.1	Puissance naïve	2
1.2	Stratégie basée sur la parité	2
1.3	Autre stratégie basée sur la parité	2
1.4	Fonction itérative	3
1.5	Programme de test	3

alg - Puissance nième d'un nombre (TD)



Mots-Clés Récursivité des actions ■

Requis Schéma itératif ■

Difficulté ●●○ (30 min) ■



Objectif

Cet exercice calcule récursivement la puissance x^n d'un réel x par un entier $n \geq 0$ de plusieurs manières. Dans le même ordre d'idées, l'exercice @[Fonction produit] calcule récursivement le produit $a \cdot n$ d'un réel a par un entier $n \geq 0$ de plusieurs manières.

1 Puissance nième d'un nombre / pgpuissance

1.1 Puissance naïve

Soient un réel x et un entier $n \geq 0$.

L'idée la plus simple pour le calcul de x^n consiste à utiliser :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$



Écrivez une fonction récursive `puiss1(x,n)` qui calcule et renvoie la puissance d'un réel x (avec n entier positif) à partir de la définition par récurrence.



Combien y a-t-il d'appels récurrents ?

1.2 Stratégie basée sur la parité

La propriété suivante accélère le calcul :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (x^{n \div 2})^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ x \cdot x^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$



Écrivez une fonction `carre(x)` qui renvoie le carré de x (réel).



Écrivez une fonction récursive `puiss2(x,n)` qui calcule et renvoie la puissance d'un réel x (avec n entier positif) comme décrit ci-avant.



1.3 Autre stratégie basée sur la parité

Une autre façon d'accélérer significativement le calcul de la puissance (en le ramenant à au plus $2 \log_2 n$) est la propriété suivante :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (x^2)^{n \div 2} & \text{si } n \text{ pair} \\ x \cdot x^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple, on calcule x^{10} en quatre multiplications au lieu de 9 :

$$x^{10} = (x^2)^5 = x^2 \left((x^2)^4 \right) = x^2 ((x^2)^2)^2$$



Écrivez une fonction récursive `puiss3(x,n)` qui calcule et renvoie la puissance d'un réel `x` (avec `n` entier positif) en appliquant la relation ci-dessus.



Donnez la suite des transformations de (x, n, y) pour le calcul de 5^8 puis le calcul de 5^7 . Concluez.

1.4 Fonction itérative

La fonction du problème précédent étant récursive terminale,



Écrivez une fonction itérative `puiss4(x,n)`, équivalente à la version récursive terminale `puiss3(x,n)`, en remplaçant la liste des paramètres des appels récursifs par des affectations appropriées.

1.5 Programme de test



Écrivez un algorithme qui saisit un réel et un entier puis calcule et affiche le résultat de chacune des fonctions.

