Test de magicité [tb04] - Exercice résolu

Karine Zampieri, Stéphane Rivière

Unisciel algoprog Version 19 mai 2018

Table des matières

Python - Test de magicité (Solution)

Mots-Clés Tableau multidimensionnel, Carré magique ■
Requis Structures de base, Structures conditionnelles, Algorithmes paramétrés, Structures répétitives, Schéma itératif, Tableaux ■
Difficulté ● ● ○

Objectif
Cet exercice teste la « magicité » d'un carré d'ordre n.

1 Énoncé

Définitions
Un **carré d'ordre** n est un tableau bidimensionnel $n \times n$ d'entiers.

Il est dit **semi-magique** si la somme de chaque ligne, la somme de chaque colonne et la somme de chaque diagonale principale (montante et descendante) est la même valeur.

Enfin, il est dit **magique**[1] s'il est semi-magique et s'il est une permutation des entiers $[1..n^2]$. Dans ce cas, la somme théorique vaut $n(n^2+1)/2$.

Exemple
Le carré `[4,5,6, 1,2,3, 7,8,9]` d'ordre 3 est une 9-permutation mais n'est pas semi-magique.

4	5	6	=15
1	2	3	=6
7	8	9	=24

Exemple
Le carré `[8,1,6, 3,5,7, 4,9,2]` d'ordre 3 est magique (puisque 9-permutation et semi-magique).

			=15(diag)
8	1	6	=15
3	5	7	=15
4	9	2	=15
=15	=15	=15	=15(diag)

Exemple
Le carré suivant d'ordre 4 est un carré magique.

				=34(diag)
16	3	2	13	=34
5	10	11	8	=34
9	6	7	12	=34
4	15	14	1	=34
=34	=34	=34	=34	=34(diag)

Objectif
Représenter un carré sous sa forme linéaire, saisir un carré et tester sa magicité.

1. Les carrés magiques sont très anciens, puisqu'on trouve leur trace, il y a plus de 3000 ans, sur la carapace d'une tortue chinoise de Lo Shu. En Europe, le premier carré magique apparaît en 1514 sur une gravure du peintre allemand A. Dürer. Si durant de nombreux siècles ces carrés étaient attachés à des superstitions divines, à partir du XVII^{e} siècle, ils ont fait l'objet de nombreuses études mathématiques.

2 Algorithmique, Programmation

Définissez la constante `TMAX=100` (nombre maximal de cases d'un tableau), le type `ITableau` comme étant un tableau de `TMAX` entiers, puis le typ `TCarre` comme étant un `ITableau`.

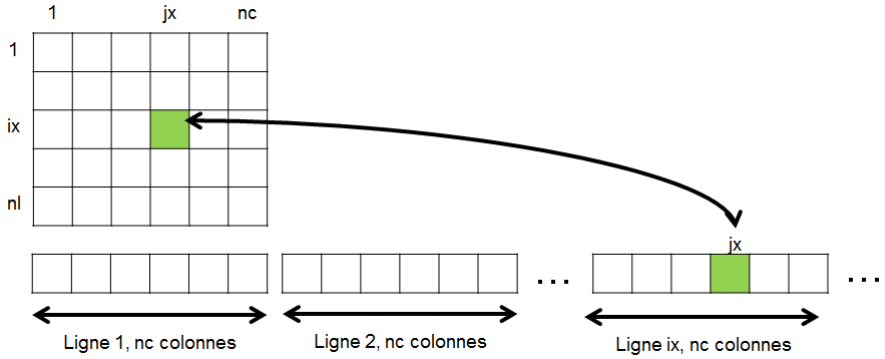
Validez vos définitions avec la solution.

Solution Python @[pgtmagicite.py]

```
TMAX = 100
""" Taille maximale du tableau """
```

2.1 Stockage linéaire (tableau bidimensionnel)

Stockage linéaire d'un tableau bidimensionnel
Il permet d'optimiser son espace mémoire et correspond à effectuer la transformation suivante :



Écrivez une fonction `indexTab2d(j,k,ncols)` qui renvoie l'index linéaire de la case en `(j,k)` pour un `ITableau` à `ncols` colonnes. **Attention,** les indices sont numérotés à partir de 1.

Écrivez une fonction `evalCase(t,j,k,n)` qui renvoie la valeur de l'élément en `(j,k)` d'un `ITableau t` de `n` colonnes.

Écrivez une procédure `fixerCase(t,j,k,n,valeur)` qui fixe l'élément en `(j,k)` d'un `ITableau t` de `n` colonnes à la valeur `valeur`.

Validez vos fonctions et procédure avec la solution.

Solution Python @[UtilsTM.py]

```
def indexTab2d(j, k, ncols):
    """  Index linéaire d'un tableau bi-dimensionnel

     :param j: index-ligne à partir de 1
     :param k: index-colonne à partir de 1
     :param ncols: nombre de colonnes du tableau
     :return: l'index linéaire de (j,k)
    """
    return ((j - 1) * ncols + k - 1)
```

```
def evalCase(t, j, k, n):
    """  Valeur de l'élément d'un TCarre

     :param t: un ITableau
     :param j: index-ligne à partir de 1
     :param k: index-colonne à partir de 1
     :param n: ordre de t
     :return: la valeur de l'élément en (j,k) de t
    """
    return t[indexTab2d(j, k, n)]
```

```
def fixerCase(t, j, k, n, valeur):
    """  Fixe l'élément d'un TCarre

     :param t: un ITableau
     :param j: index-ligne à partir de 1
     :param k: index-colonne à partir de 1
     :param n: ordre de t
     :param valeur: valeur à fixer
    """
    t[indexTab2d(j, k, n)] = valeur
```

2.2 Procédure afficherCarre (affichage d'un carré)

Écrivez une procédure `afficherCarre(t,n)` qui affiche un `ITableau t` d'ordre `n` sous sa forme bidimensionnelle. Exemple d'un carré d'ordre 4 :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[UtilsTM.py]

```
def afficherCarre(t, n):
    """  Affiche un TCarre

     :param t: un ITableau
     :param n: ordre de t
    """
    for j in range(1, n+1):
        for k in range(1, n+1):
            print("{:3d}".format(evalCase(t, j, k, n)), end="")
        print()
```

2.3 Fonction permutationTab (test de permutation)

Définition

Une n-**permutation** est l'ensemble des entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Écrivez le **profil** d'une fonction `permutationTab(t,n)` qui renvoie `Vrai` si les `n` premières valeurs d'un `ITableau t` est une n-permutation, `Faux` sinon.

Solution Paramètres

Entrants : Un `Tableau t` et un entier `n`

Résultat de la fonction : Un booléen

Analyse

Pour tester **efficacement** que chaque entier de `t` est dans `[1..n]` et qu'il n'y est qu'une unique fois, on utilise un tableau de booléens `vu` (« entier déjà vu ») et un booléen `rs` qui est le résultat de la fonction.

On effectue alors les trois étapes :

1. Initialement, aucun entier a été vu (chaque case de `vu` vaut `Faux`) et `t` est une n-permutation (`rs` vaut `Vrai`).
2. On traverse `t` et on vérifie que `t[j]` est dans `[1..n]` et qu'il n'a pas été « entier déjà vu ». Dans le cas où cela n'est pas vérifié, `t` ne peut pas être une n-permutation : on fixe `rs` à `Faux`.
3. On renvoie la valeur de `rs`.

De cette analyse,

Écrivez le corps de la fonction.

Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[UtilsTBOpers.py]

```
def permutationTab(t, n):
    """  Prédicat de permutation d'un ITableau

     :param t: un ITableau
     :param n: ordre du tableau dans [0..TMAX[
     :return: Vrai si t est une permutation d'ordre n, Faux sinon
    """
    TMAX = len(t)
    vu = [False for x in range(TMAX)]
    rs = True
    j = 0
    while rs and j < n:
        valeur = t[j] - 1
        if valeur < 0 or valeur >= n or vu[valeur]:
            rs = False
        else:
            vu[valeur] = True
            j += 1
    return rs
```

2.4 Test de magicité

Définissez le type `TCarre` comme étant un `ITableau`.

Écrivez une fonction `sommePartielle(t,ideb,jdeb,iincr,jincr,n)` qui renvoie la somme de `n` cases d'un `TCarre t` en partant de celle en `(ideb,jdeb)` et d'incrémentations de ligne `iincr` et de colonne `jincr`.

```
.         jdeb
ideb  .    .    .    .
      .    .    .    .
      .    .    .    .
      .    .    .    .
```

Solution simple

On calcule une somme cumulée de `n` cases. Il faut donc déclarer une variable et l'initialiser à zéro puis parcourir `n` cases (boucle `Pour`) en partant de celle en `(ideb,jdeb)`. A chaque tour de boucle, `ideb` est incrémenté avec `iincr` et `jdeb` avec `jincr`.

Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[pgtmagicite.py]

```
def sommePartielle(c, ideb, jdeb, iincr, jincr, n):
    """  Somme partielle depuis une case

     :param c:
```

```
     :param ideb: indice début ligne
     :param jdeb: indice début colonne
     :param iincr: incrément selon les lignes
     :param jincr: incrément selon les colonnes
     :param n: ordre de c
     :return: La somme de n éléments de c en partant de (ideb,jdeb)
    """
    rs = 0
    ix = ideb
    jx = jdeb
    for k in range(1, n+1):
        rs += UtilsTM.evalCase(c, ix, jx, n)
        ix += iincr
        jx += jincr
    return rs
```

Écrivez ensuite une fonction `semiCMagique(t,n)` qui teste et renvoie `Vrai` si un `TCarre t` d'ordre `n` est semi-magique, `Faux` sinon.

Solution simple

Il faut déterminer la somme théorique (sigma d'une ligne par exemple) et vérifier que chacune des lignes, colonnes et diagonales principales ont cette même valeur.

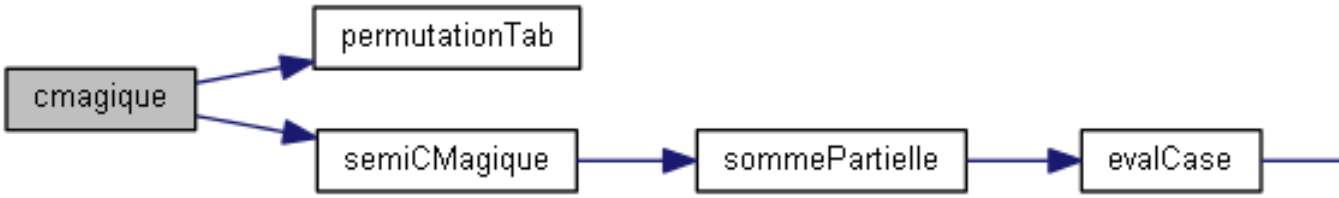
Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[pgtmagicite.py]

```
def semiCMagique(c, n):
    """  Prédicat de carre semi-magique

     :param c: un TCarre
     :param n: ordre de c
     :return: Vrai si c est un carré semi-magique d'ordre n
    """
    rs = True
    sth = (n * (n * n + 1)) // 2
    k = 1
    while k <= n and rs:
        rs = rs and (sommePartielle(c, k, 1, 0, 1, n) == sth)
        k += 1
    k = 1
    while k <= n and rs:
        rs = rs and (sommePartielle(c, 1, k, 1, 0, n) == sth)
        k += 1
    rs = rs and (sommePartielle(c, 1, 1, 1, 1, n) == sth)
    rs = rs and (sommePartielle(c, 1, n, 1, -1, n) == sth)
    return rs
```

Déduisez une fonction `cmagique(t,n)` qui teste et renvoie `Vrai` si un `TCarre t` d'ordre `n` est magique, `Faux` sinon.



Validez votre fonction avec la solution.

Solution Python @[pgtmagicite.py]

```
def cmagique(c, n):
    """  Prédicat de carré magique

     :param c: un TCarre
     :param n: ordre de c
     :return: Vrai si c est un carré magique d'ordre n
    """
    b1 = UtilsTBOpers.permutationTab(c, n * n)
    b2 = semiCMagique(c, n)
    return (b1 and b2)
```

2.5 Algorithme principal

Téléchargez le fichier suivant et mettez-le dans votre dossier.

Python @[UtilsTB.py]

Copiez/collez ensuite les lignes suivantes :

Python **Au début** de votre programme :

```
import UtilsTB
```

Soit la fonction `saisirTab(t)` qui effectue la saisie contrôlée du nombre de valeurs (entier compris entre 1 et `TMAX`), saisit les valeurs entières dans un `ITableau t` puis renvoie l'entier du nombre de valeurs saisies.

Python @[saisirTab] (dans UtilsTB)

Écrivez un script qui :

- Déclare un `TCarre` et saisit les entiers dans le `TCarre` (fonction `saisirTab`).
- Demande et saisit l'ordre du `TCarre`.
- Enfin affiche le `TCarre` ainsi que ses caractéristiques (permutation, semi-magique, magique).

Testez avec les exemples ci-dessous :

- Le carré `[4,5,6,1,2,3,7,8,9]` d'ordre 3.
- Le carré `[8,1,6,3,5,7,4,9,2]` d'ordre 3.
- Le carré `[16,3,2,13,5,10,11,8,9,6,7,12,4,15,14,1]` d'ordre 4.

Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtmagicite.py]

```
def PGTMagicite():
    c = [0 for x in range(TMAX)]
    nelems = UtilsTB.saisirTab(c)
    n = int(input("Ordre n? "))
    UtilsTM.afficherCarre(c, n)

    b1 = UtilsTBOpers.permutationTab(c, n * n)
    b2 = semiCMagique(c, n)
    b3 = cmagique(c, n)
    print("==> permutation: ", b1, sep="")
    print("==> semi-magique: ", b2, sep="")
    print("==> cmagique: ", b3, sep="")
```

3 Références générales

Comprend [Maunoury-AL1 :c8 :ex12] ■