PCSI 1 (O.Granier)

Lycée
Clemenceau

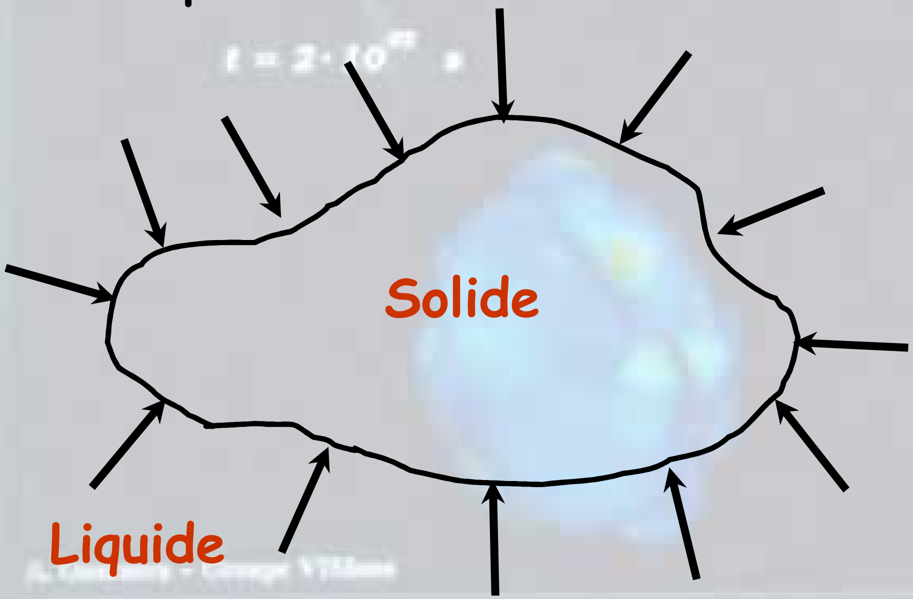
Eléments de statique des fluides

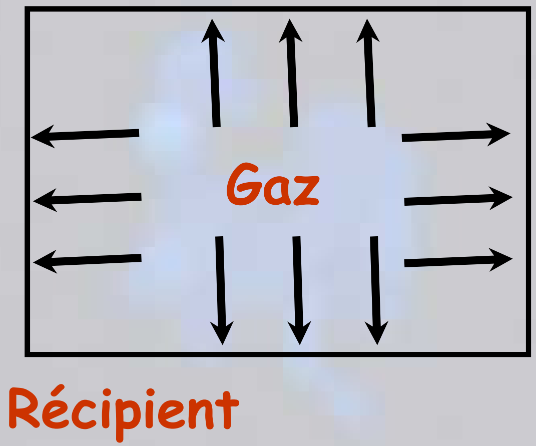
Olivier GRANIER

I - Pression dans un fluide

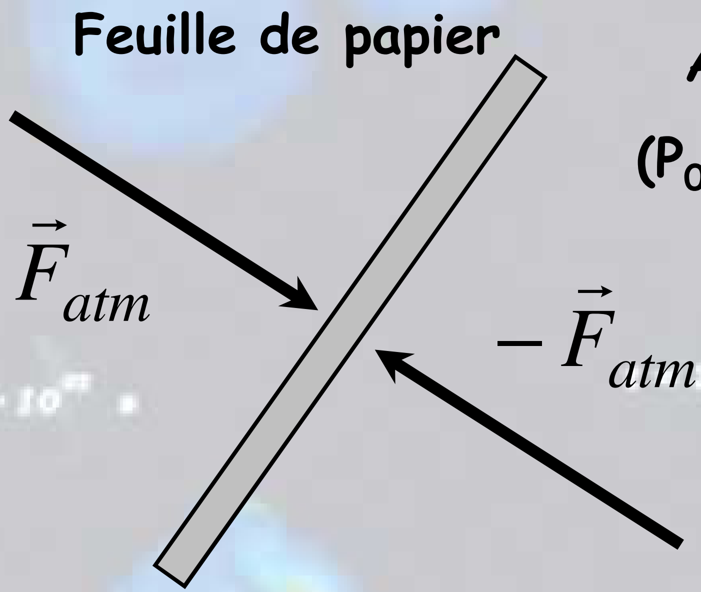
1 - Mise en évidence expérimentale des forces pressantes au sein d'un fluide :

Tous les fluides (liquides ou gaz) exercent sur toutes les surfaces avec lesquelles ils sont en contact, des forces pressantes perpendiculaires en tout point à ces surfaces :





Ordre de grandeur des forces de pression (forces pressantes) :



Air atmosphérique

(P_0 = 1 bar = 10^5 Pa)

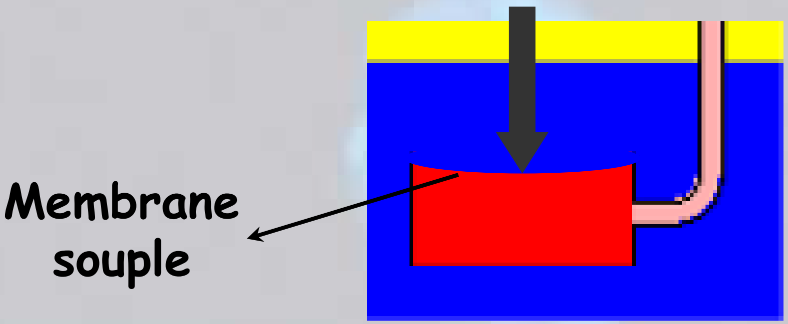
$$F_{atm} = P_0 S = 10^5.(0,3).(0,2) = 6.10^3 N$$

Soit l'équivalent d'une masse de 600 kg.

Manomètre à liquide :

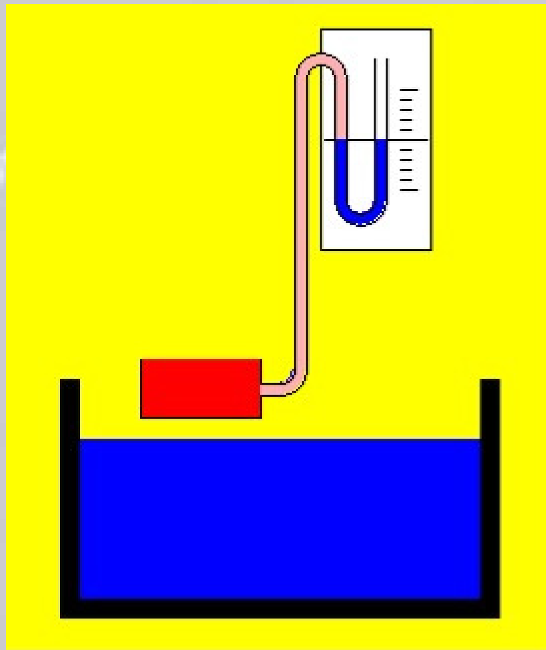
Le manomètre proposé utilise un tube en U qui contient un liquide coloré (ici en bleu).

Ce tube est relié à une « capsule manométrique », boîte rigide dont une des faces, plane, est remplacée par une membrane souple, sensible aux forces pressantes :



Animation

Manomètre dans un fluide



Quelques constatations expérimentales :

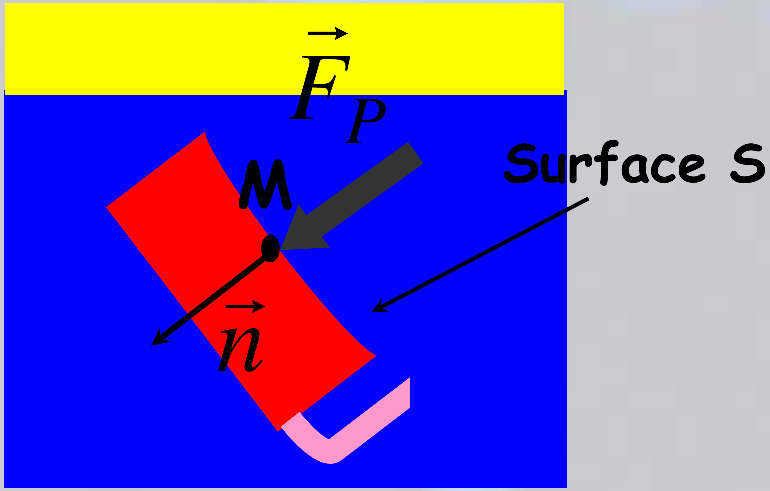
✓ La force exercée par le liquide sur la membrane de la capsule croît avec la profondeur d'immersion.

✓ L'intensité de cette force est la même en tous les points d'un même plan horizontal.

✓ L'intensité ne dépend pas de l'orientation de la capsule.

✓ L'intensité de la force est proportionnelle à la surface de la capsule.

2 – Définition de la pression au sein d'un fluide :



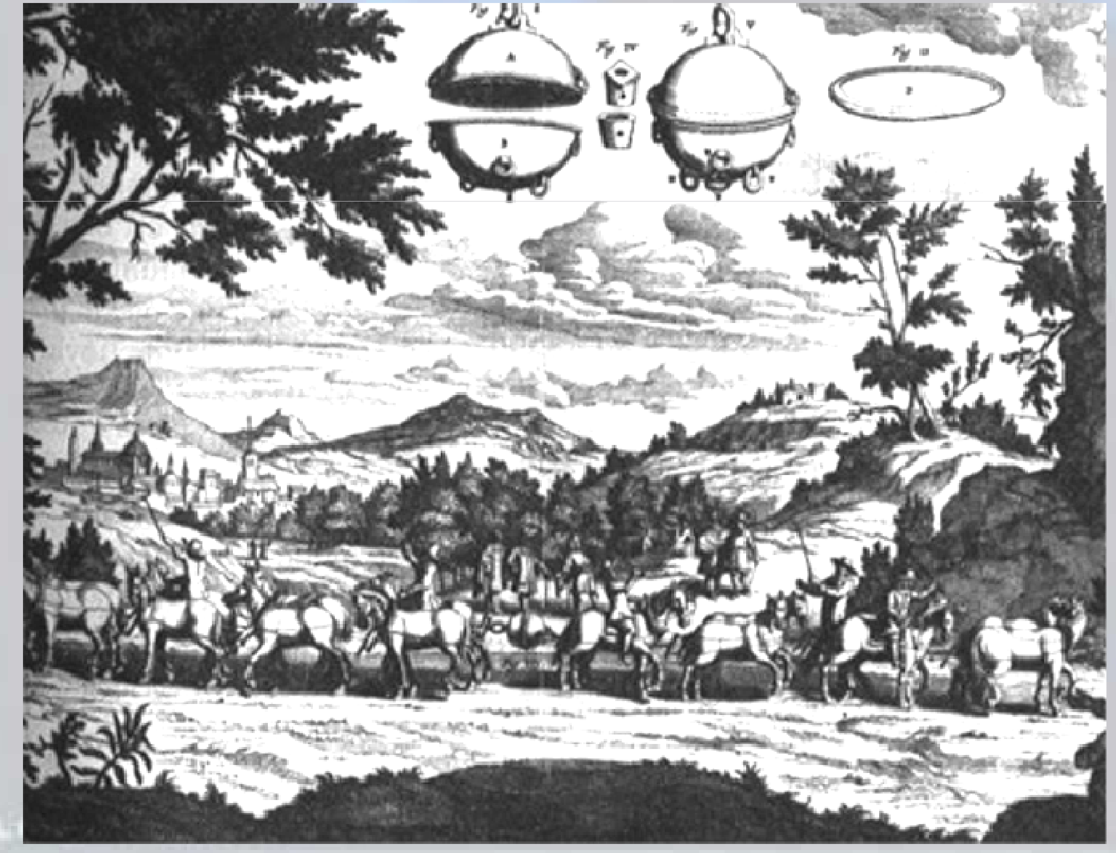
La pression P(M) exercée au point M par le fluide est donnée par :

$$\boxed{\vec{F}_P = P(M)\, S\, \vec{n}}$$

Si la surface est élémentaire :

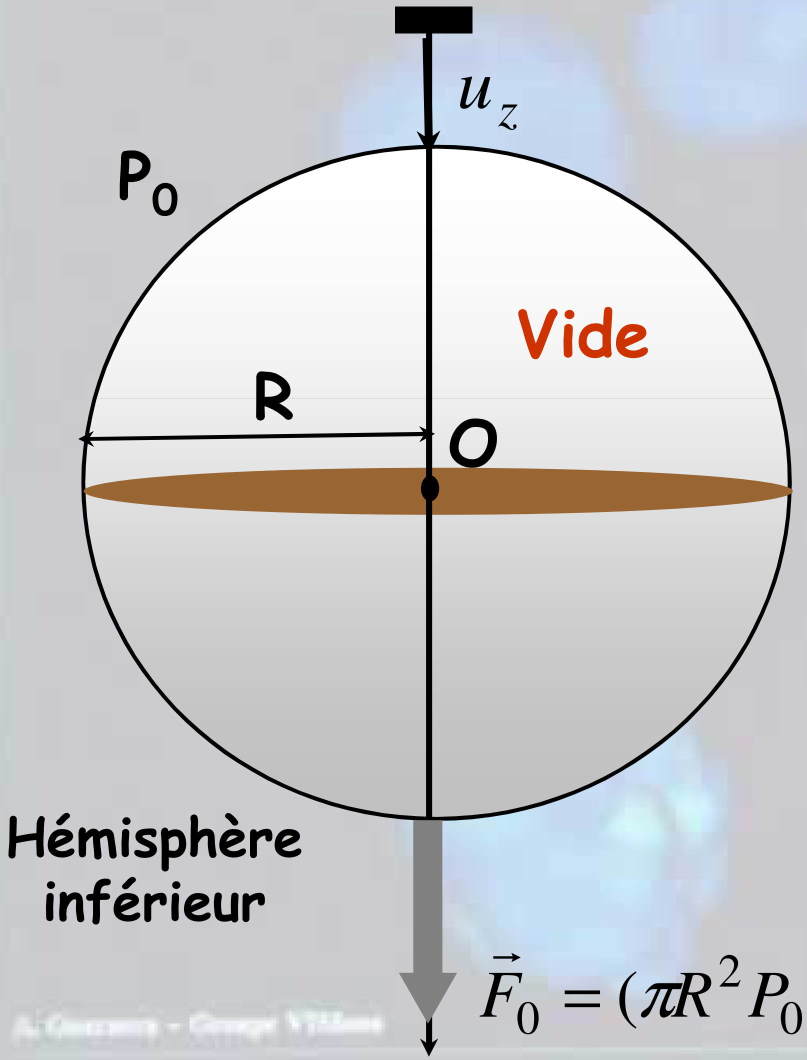
$$d\vec{F}_P = P(M)\, dS\, \vec{n} \quad ; \quad P(M) = \frac{dF_P}{dS}$$

3 – Un exemple de calcul de forces pressantes ; les hémisphères de Magdebourg :



L'expérience a été réalisée par Von Guericke, en 1654.

Il a fallu 16 chevaux pour décoller les deux hémisphères.



Deux hémisphères creux en cuivre se juxtaposent et forment, par leur réunion, une sphère hermétiquement close par un bourrelet en cuir.

Si on fait le vide à l'intérieur, il devient difficile de séparer les deux hémisphères.

Quelle est la force minimale F_0 à exercer sur l'hémisphère inférieur pour le séparer de l'hémisphère supérieur ?

AN : rayon d'un hémisphère, R, de 20 cm et pression atmosphérique, P_0, égale à 1 bar.

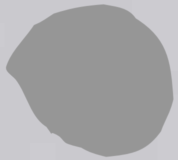
$$\vec{F}_0 = (\pi R^2 P_0)\, u_z \quad (F_0 = 1{,}26.10^4\, N)$$

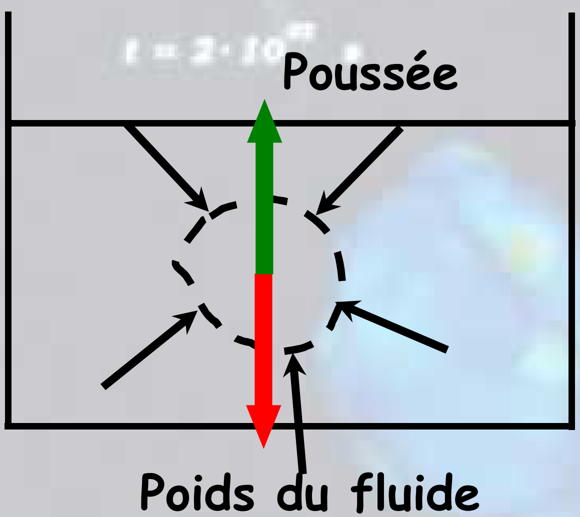
Lycée **Clemenceau**

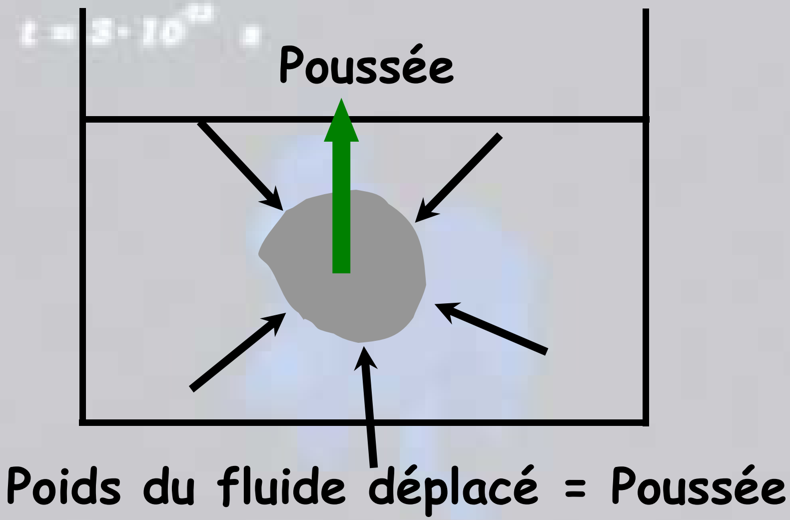
PCSI 1 - Physique

4 – Le principe d'Archimède :

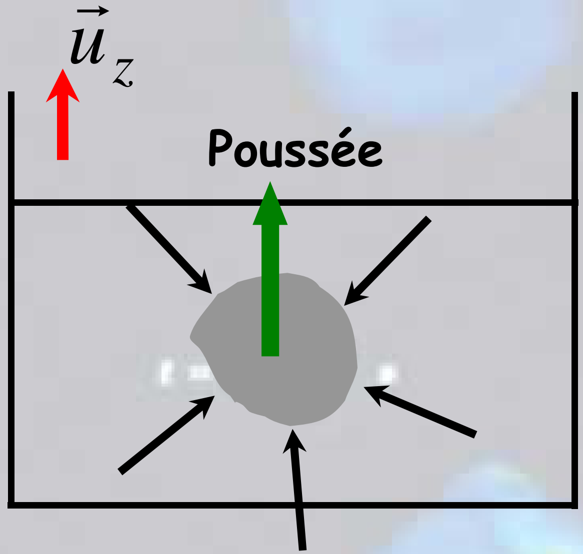
« Tout corps plongé dans un fluide subit, de la part de celui-ci, un force (poussée) dirigée vers le haut et égale au poids du volume de fluide déplacé. »

Démonstration « imagée » :  **solide de masse m et de volume V**





Expression de la poussée d'Archimède :

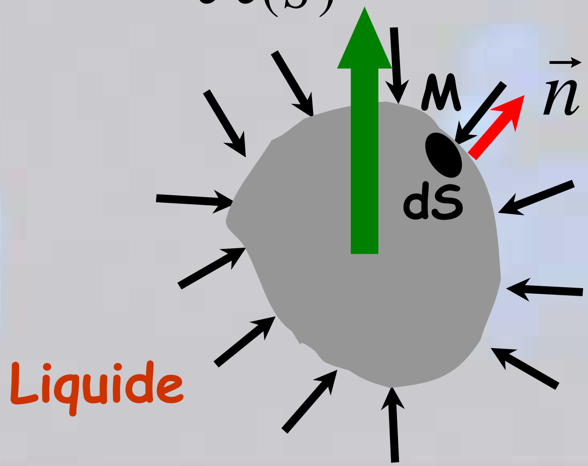


Soit μ la masse volumique du fluide.

On note V le volume du corps immergé.

La poussée d'Archimède vaut :

$$\vec{F}_A = -\oiint_{(S)} P(M)\,\vec{n}\,dS = \mu g V\,\vec{u}_z$$



Application :

Un morceau de métal de volume inconnu est suspendu à une corde.

Avant immersion, la tension de la corde est T_1 = 10 N.

Quand le métal est immergé dans l'eau, elle vaut T_2 = 8 N.

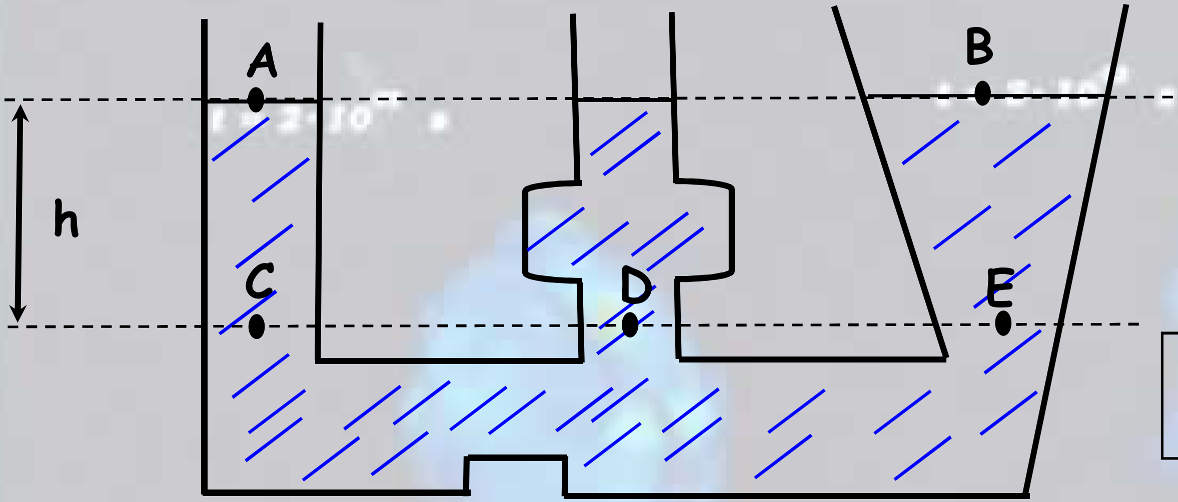
Déterminer la masse volumique du métal.

$$\mu_{métal} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}\mu_{eau} = 5\,000\ kg.m^{-3}$$

II – Loi fondamentale de l'hydrostatique et conséquences

1 – La loi fondamentale de l'hydrostatique :

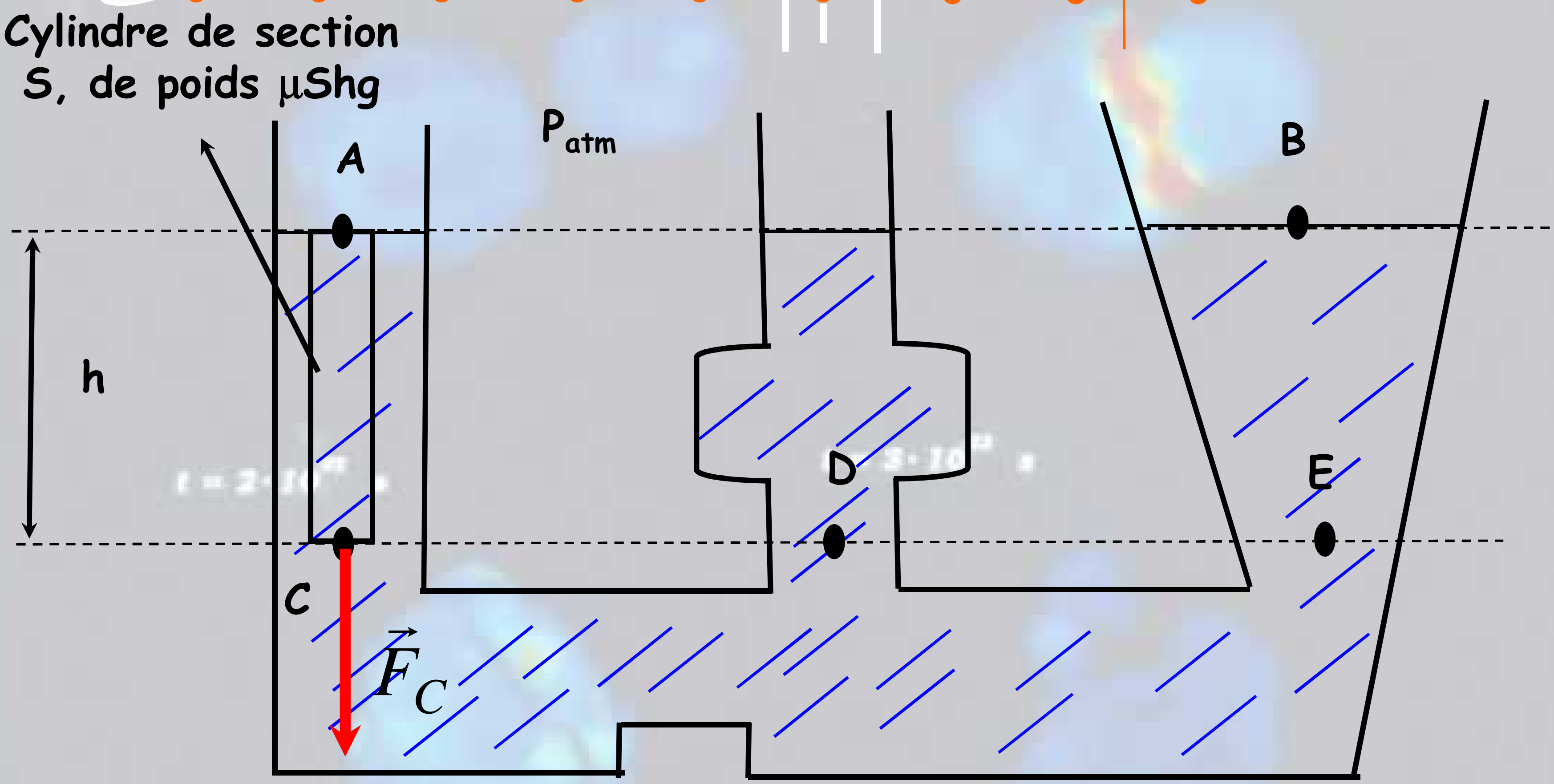
Le liquide est incompressible et a pour masse volumique μ.



$$P_A = P_B = P_{atm}$$

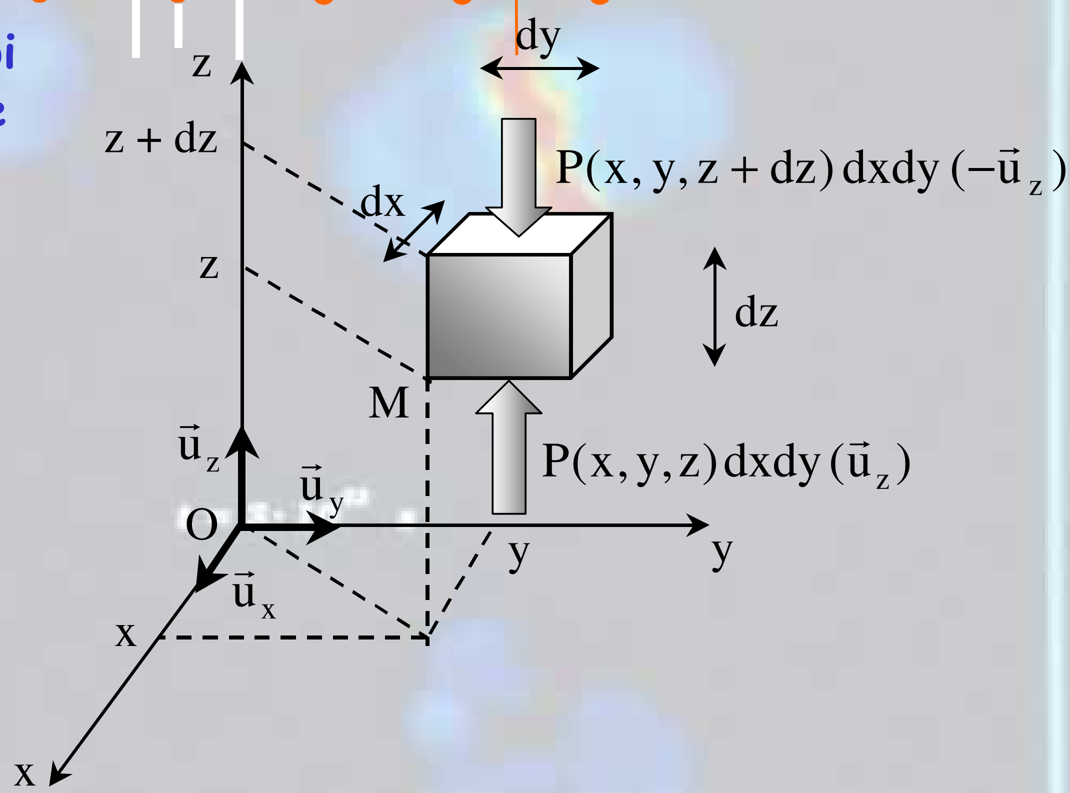
$$P_C = P_D = P_E$$

$$\boxed{P_C = P_{atm} + \mu g h}$$



$$F_C = P_{atm}S + \mu(Sh)g \quad ; \quad P_C = \frac{F_C}{S} = P_{atm} + \mu hg$$

Démonstration générale de la loi fondamentale de l'hydrostatique des fluides :

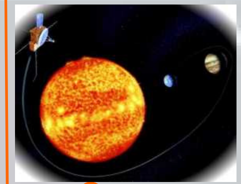


On considère une particule de fluide de forme parallélépipédique.

La force résultante de pression qui s'exerce dans la direction (Oz) par exemple, est donnée par :

$$d\vec{F}_z = -P(x, y, z + dz)\, dxdy\, \vec{u}_z + P(x, y, z)\, dxdy\, \vec{u}_z$$

$$d\vec{F}_z = -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}(dxdydz)\,\vec{u}_z$$



La force totale de pression subie par la particule de fluide peut ainsi s'écrire :

$$d\vec{F} = -\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\,\vec{u}_z \right) d\tau$$

$$\boxed{d\vec{F} = -(\overrightarrow{grad}\,P)\,d\tau}$$

Lorsque la particule de fluide est soumise au champ de pesanteur, la condition d'équilibre (dans le référentiel du laboratoire) est :

$$-(\overrightarrow{grad}\,P)\,d\tau + (\mu\,d\tau)\,\vec{g} = \vec{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,P = \mu\vec{g}}$$

Loi fondamentale de la statique des fluides

Le champ de pesanteur étant vertical (axe dirigé vers le bas), on en déduit que la pression ne dépend que de la profondeur z et :

$$\frac{dP(z)}{dz} = \mu g \quad ; \quad dP(z) = \mu g \; dz$$

Si l'axe vertical est dirigé vers le haut :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu g \quad ; \quad dP(z) = -\mu g \; dz$$

Le calcul de la pression au sein d'un fluide nécessite la connaissance de la loi de variation de la masse volumique μ du fluide (en fonction de la profondeur (ou de l'altitude), de la pression, de la température, …).

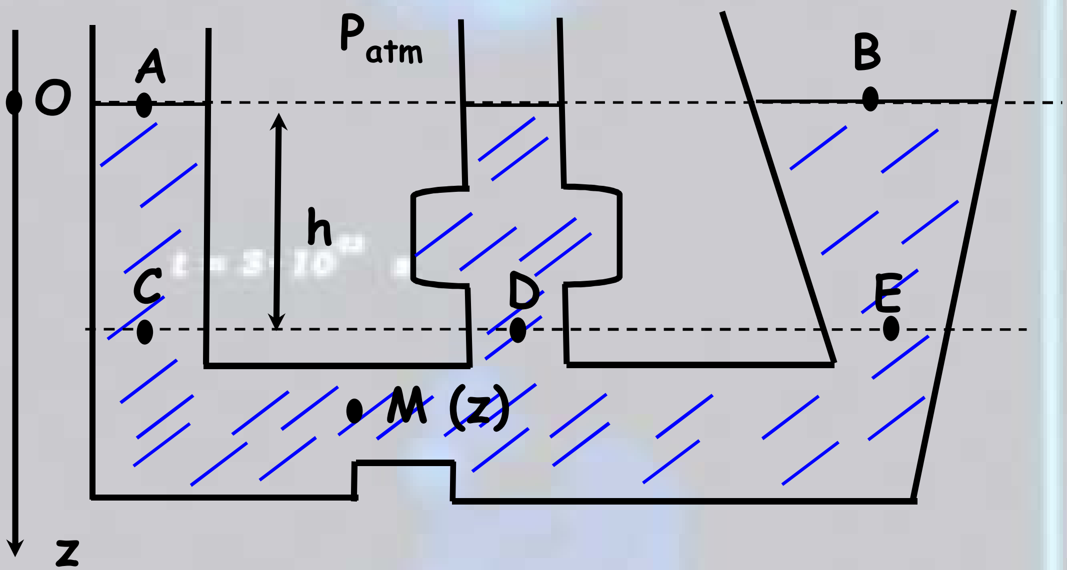
2 – Cas des fluides incompressibles :

Pour un fluide incompressible : $\mu = \mu_0 = cste$.

$$dP(z) = \mu g \, dz$$

$$P(z) - P_{atm} = \mu g \, z$$

$$\boxed{P(z) = P_{atm} + \mu g \, z}$$



Tous les points situés à une même profondeur subissent la même pression.

AN : Dans l'eau, la pression augmente de 1 bar tous les 10 m.

3 – Quelques exemples historiques classiques :

a - Retour sur le manomètre à liquide :

$$P_A = P_B = P_C$$

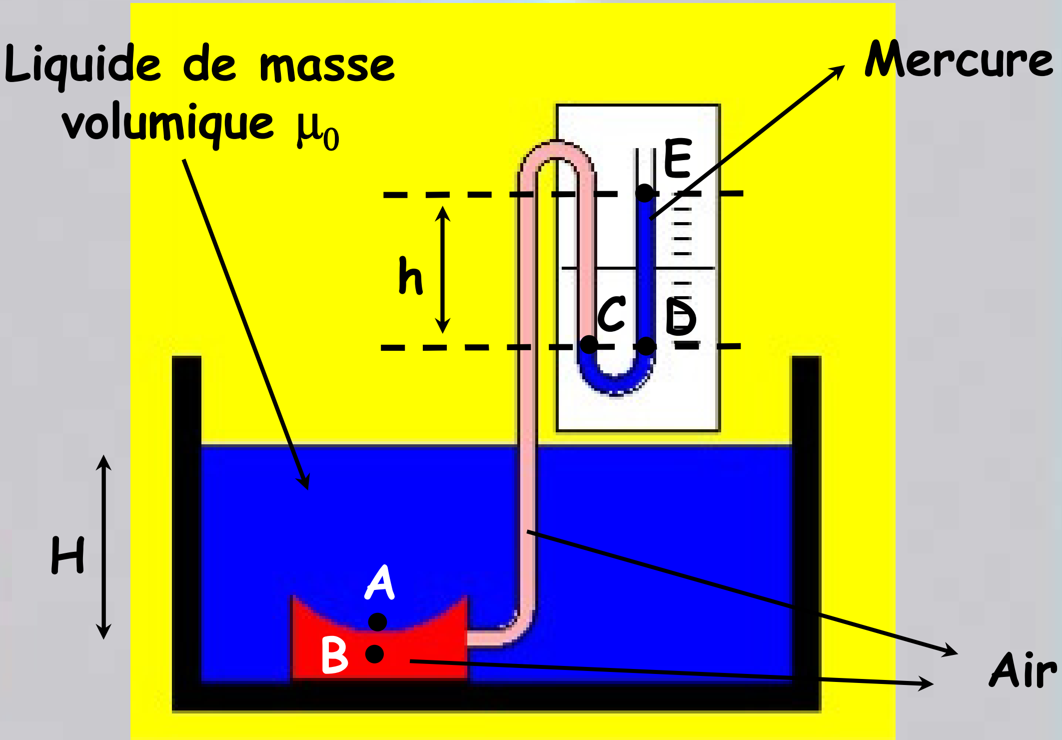
$$P_C = P_D$$

$$P_D = P_E + \mu_{Hg} gh$$

$$P_E = P_{atm}$$

$$P_A = P_{atm} + \mu_0 gH$$

$$\boxed{\mu_0 gH = \mu_{He} gh}$$



La surpression au sein du liquide vaut donc h cm de mercure.

3 – Quelques exemples historiques classiques :

b - L'expérience de Torricelli :

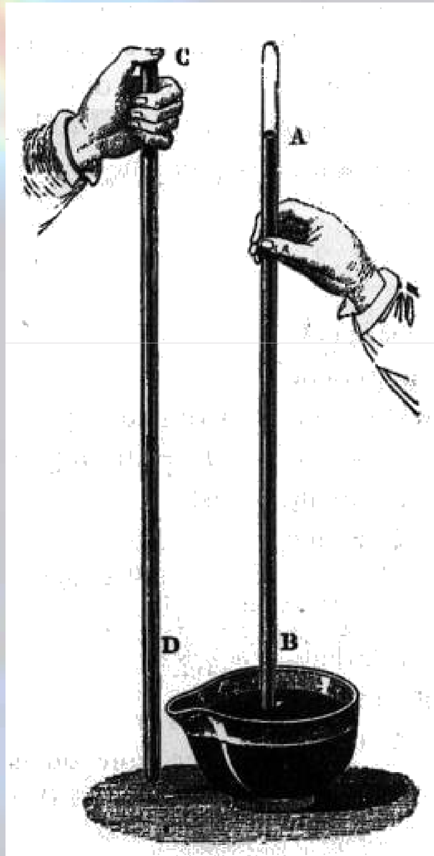
La première mesure de la pression atmosphérique a été réalisée par Torricelli (1608 – 1647), secrétaire et assistant de Galilée.

Le tube était rempli de mercure sur une hauteur de 1 m.

Renversé sur la cuve à mercure, il apparaît :

*** Un vide dans le haut du tube.

*** Quelle que soit la forme du tube et son inclinaison, la hauteur de mercure est toujours la même et vaut de l'ordre de 76 cm (de mercure). Elle évolue en fonction du temps.



Dans le vide : $P(M_1) = 0$.

Dans le mercure :

*** $P(M_3) = P_{atm} = P_0$

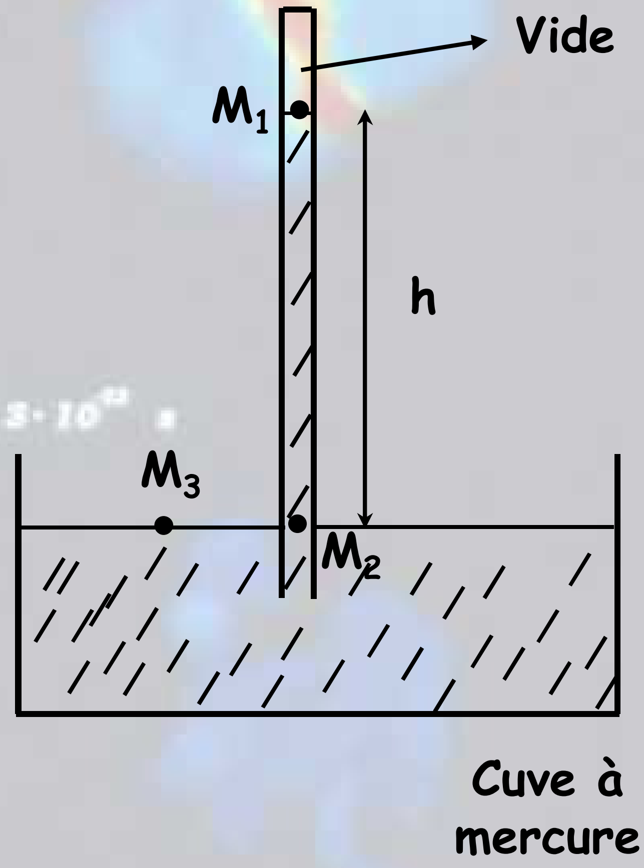
*** $P(M_2) = P(M_1) + \mu g h$

Par conséquent :

$$\boxed{P_0 = \mu g h}$$

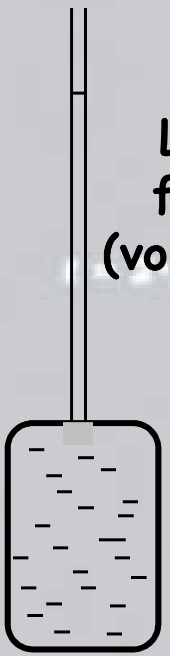
La hauteur de la colonne de mercure mesure directement la pression atmosphérique, exprimée en cm de mercure.

La pression atmosphérique normale vaut 76 cm de mercure (1 013 hPa)



3 – Quelques exemples historiques classiques :

c – Le tonneau de Pascal :



Long tube de faible section (volume de l'ordre du L)

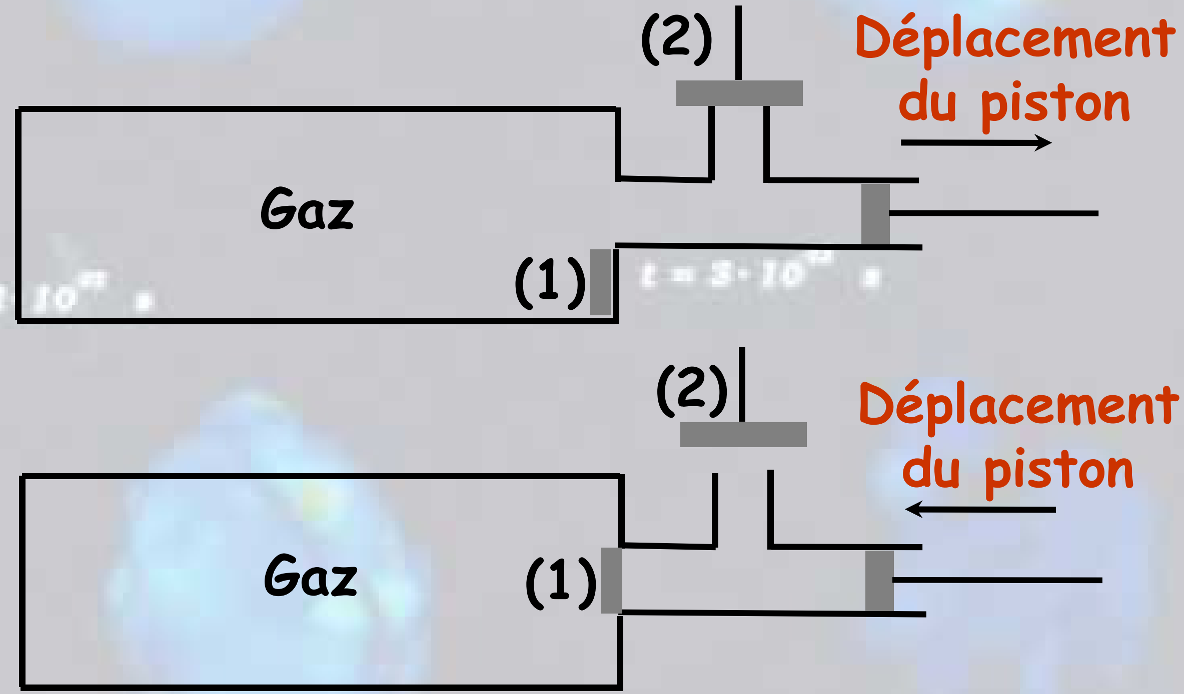
Tonneau (volume de l'ordre de 100 L)

1 L d'eau versée correspond (si la section du tube est de 1 cm²) à une hauteur de 10 m.

La surpression correspondante est donc de 1 bar : elle peut être suffisante pour faire éclater le tonneau.

3 – Quelques exemples historiques classiques :

d – Les techniques du vide : (principe « aspiration – refoulement »)



4 – Cas de liquides compressibles :

On considère une mer en équilibre isotherme.

La masse volumique de l'eau de mer varie avec la pression selon la loi :

$$\mu = \mu_0 \left[1 + a(P - P_0)\right] \qquad (a = \chi_T = 10^{-10}\ Pa^{-1})$$

La profondeur est notée z. Pour z = 0, $P = P_0 = 10^5$ Pa et
$\mu = \mu_0 = 10^3$ kg.m^{-3}.

a) Déterminer la loi de variation de la pression avec la profondeur, P(z).

b) Que devient cette loi pour de faibles profondeurs ?

c) Calculer P_{exacte} et $P_{approchée}$ pour z = 1 km. Quelle est l'erreur relative commise en utilisant la loi approchée ?

5 – La loi fondamentale en référentiel non galiléen :

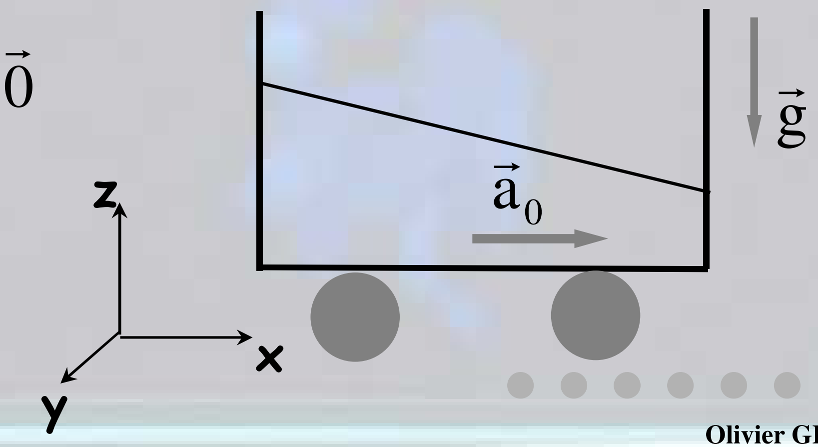
On prend l'exemple de la détermination de la surface libre d'un liquide dans un référentiel en translation accélérée :

« Un chariot rempli d'eau se déplace sur le sol horizontal avec une accélération constante a_0 portée par (Ox). Quelle est l'allure de la surface libre du liquide lorsqu'elle est stabilisée ? »

La relation fondamentale de l'hydrostatique des fluides, dans le référentiel lié au chariot, s'écrit : (il faut prendre en compte la force d'inertie d'entraînement)

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)\,d\tau + \mu\vec{g}\,d\tau + (-\mu\vec{a}_0\,d\tau) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) = \mu(\vec{g} - \vec{a}_0)$$



Soit, en projection :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\mu a_0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

Par intégration « partielle » :

$$P(x,z) = -\mu a_0 x - \mu g z + cste$$

Sur la surface libre, P(x,z) = P_{atm}. L'équation de la surface libre est ainsi une droite :

$$z = -\frac{a_0}{g}x + (cste)'$$

La nouvelle constante peut être connue en écrivant la conservation du volume de liquide dans le chariot.

III – Etude de l'atmosphère terrestre

1 – Les différents modèles d'atmosphère terrestre :

On se limite à la Troposphère.

*** Modèle isotherme : $T = T_0$**

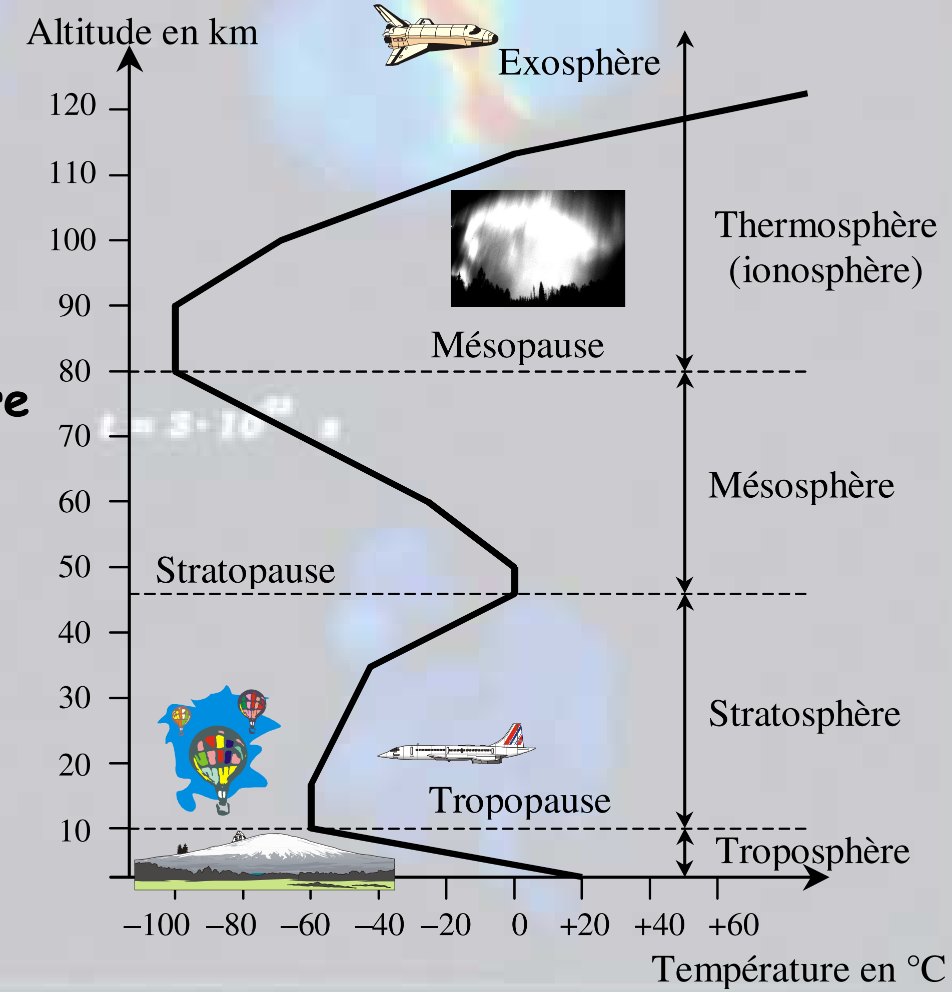
*** Modèle à gradient de température uniforme :**

$$T(z) = T_0 - az$$

Où z est l'altitude et a une constante qu'on peut évaluer à :

$$a = 8\ \mathrm{K.km^{-1}}$$

*** Modèle adiabatique**



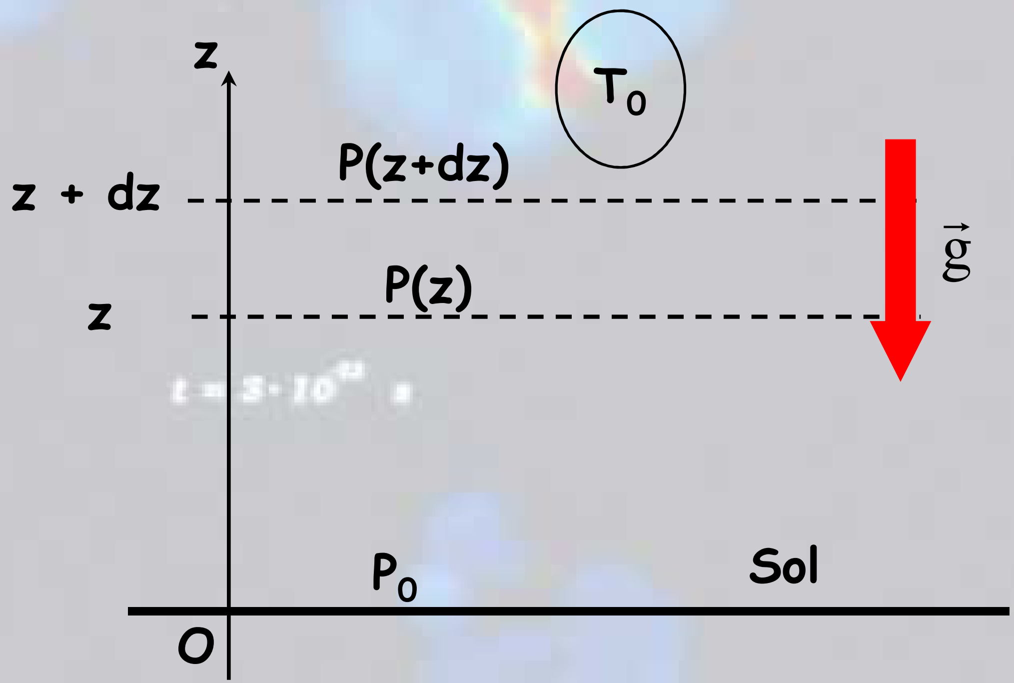
Dans tous les cas, l'atmosphère terrestre est supposée en équilibre et l'air est assimilé à un gaz parfait, de masse molaire $M_{air} = 29\ g.mol^{-1}$.

Manomètre anéroïde (à gauche) et manomètre enregistreur (à droite) : l'élément sensible est une capsule dont les déformations élastiques, en fonction des variations de pression, sont amplifiées. La capsule est reliée à un stylet encreur qui laisse une inscription sur une feuille millimétrée effectuant un tour hebdomadaire.

2 – L'atmosphère terrestre isotherme :

$$P(z) = P(z+dz) + \mu_{air}\, g\, dz$$

$$dP(z) = -\mu_{air}\, g\, dz$$



La masse volumique de l'air s'exprime en fonction de la pression et de la température constante T_0 :

$$\mu_{air} = \frac{P(z)M_{air}}{RT_0}$$

D'où :

$$dP(z) = -\frac{M_{air}\, g}{RT_0} P(z)\, dz$$

Soit, en séparant les variables :

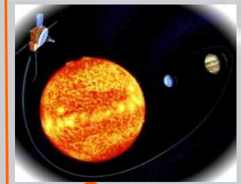
$$\frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{M_{air}\,g}{RT_0}\,dz$$

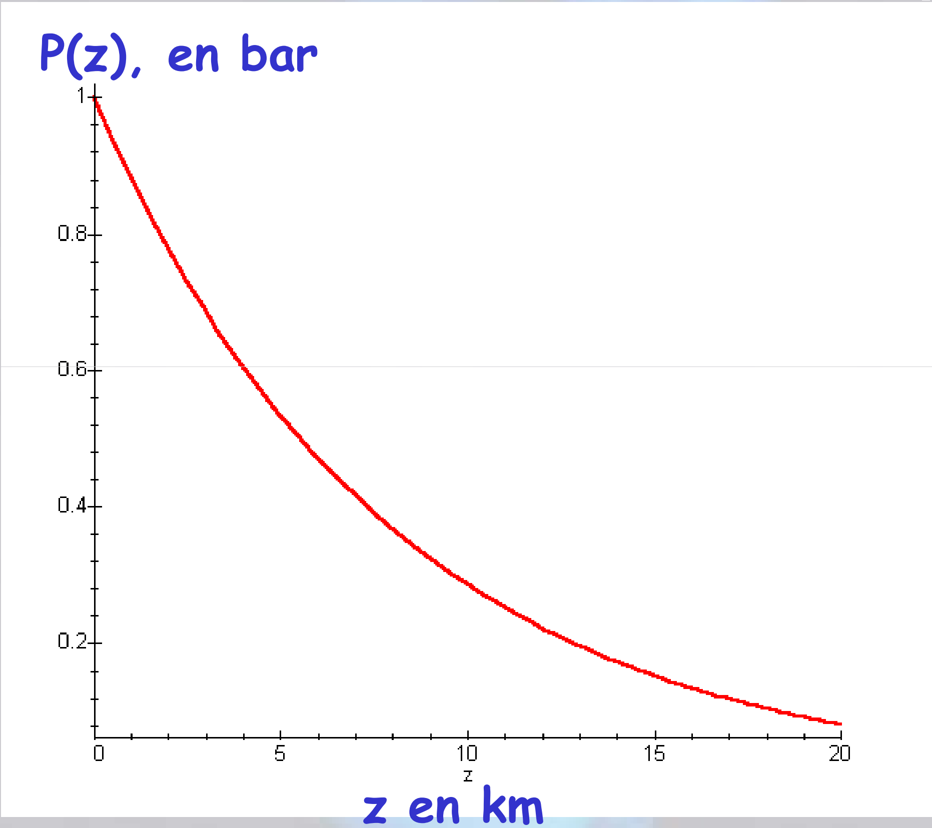
$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP(z')}{P(z')} = -\frac{M_{air}\,g}{RT_0}\int_0^z dz'$$

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{M_{air}\,g}{RT_0}\,z \qquad ; \qquad \boxed{P(z) = P_0\,e^{-\frac{M_{air}\,g}{RT_0}z}}$$

Numériquement :

$$P(z) = P_0\,e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \text{avec} \quad \delta \approx 8\ \text{km}$$





Application : à partir de quelle hauteur h la pression atmosphérique diminue-t-elle de 1% (en partant du sol) ?

On trouve h = 80 m : voilà pourquoi on peut considérer que la pression dans un gaz est uniforme si les dimensions du récipient qui le contient restent modestes.

3 – L'atmosphère terrestre à gradient de température uniforme :

On peut toujours écrire :

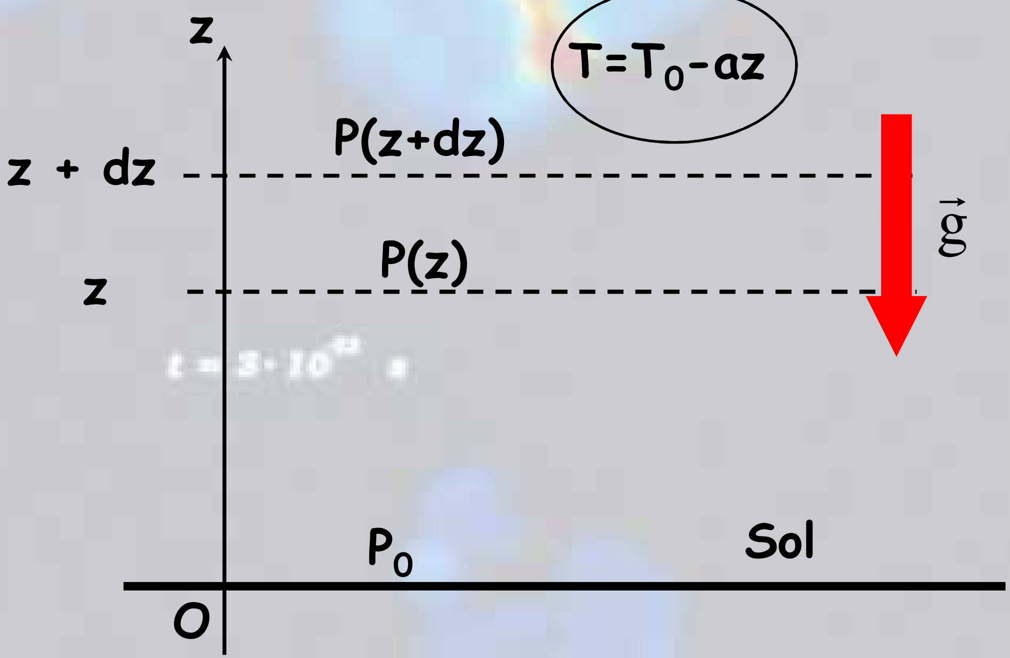
$$dP(z) = -\frac{M_{air}g}{RT(z)}P(z)\,dz$$

Avec :

$$T(z) = T_0 - az$$

Soit :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air}g}{R}\frac{dz}{T_0 - az}$$



$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M_{air}g}{aR}\left[\ln(T_0 - az')\right]_0^z$$

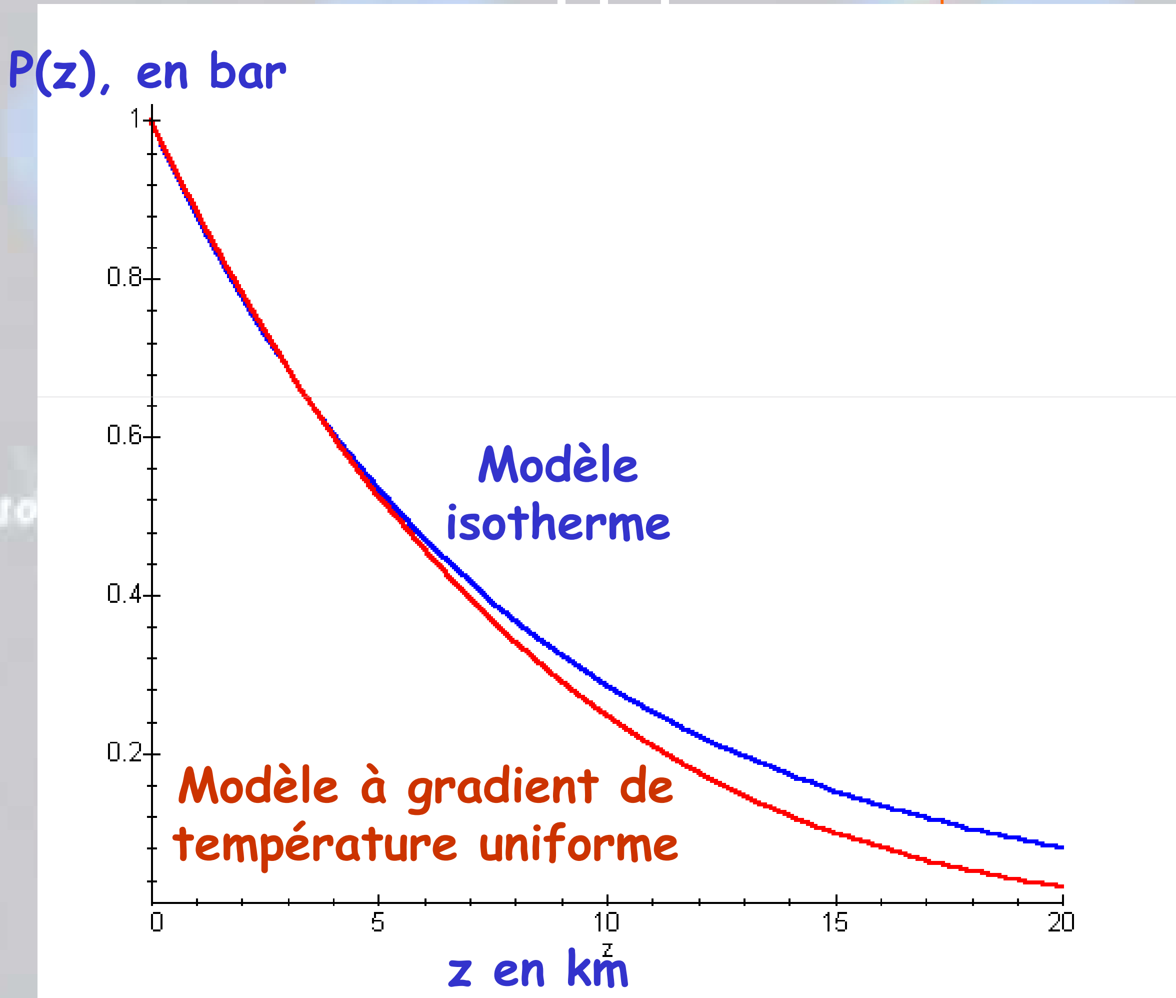
Soit :

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right)=\frac{M_{air}g}{aR}\ln(1-\frac{a}{T_0}z)$$

Avec $\exp(a\ln(x))=x^a$ **, il vient :**

$$\boxed{P(z)=P_0\left(1-\frac{a}{T_0}z\right)^{\frac{M_{air}g}{aR}}}$$

Le transparent suivant montre les évolutions comparées de la pression pour les deux modèles étudiés.


P(z), en bar
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
5
10
15
20
z
z en km
Modèle isotherme
Modèle à gradient de température uniforme