Transferts thermiques

Conduction - Convection

Rayonnement

Transferts thermiques

(Conduction, convection, rayonnement)

I) Conduction (diffusion) thermique :

1 – Les différents modes de transfert thermique :

- Conduction (diffusion thermique) :

Exemples :

* Cuillère métallique dont une extrémité est plongée dans de l'eau bouillante

* Déperdition de chaleur à travers une fenêtre en plein hiver

Dans ces deux cas, le transfert thermique considéré a lieu à travers un milieu matériel macroscopiquement au repos ; c'est au niveau microscopique que le transfert d'énergie s'effectue de proche en proche. On parle de conduction (ou diffusion) thermique.

Les métaux sont bons conducteurs thermiques (cela est dû aux électrons libres qui participent à l'échange microscopique d'énergie).

Le bois, le verre, la laine de verre sont des solides mauvais conducteurs de la chaleur (et sont isolants électriques).

Les liquides et les gaz présentent également une conductivité thermique, beaucoup plus faible dans le cas des gaz.

La diffusion thermique, au même titre que la diffusion de particules et la conduction électrique, sont des exemples de « phénomènes de transport ».

- Convection thermique :

A l'inverse de la conduction thermique (de type « diffusif »), la convection correspond à des transports supportés par des mouvements macroscopiques de la matière.

Par exemple, dans un fluide (gaz ou liquide), les différences de température au sein du milieu entraînent des mouvements convectifs. L'air chaud au voisinage d'un radiateur d'une pièce d'habitation est plus léger, tend ainsi à s'élever et à être remplacé par de l'air plus froid, provoquant de la sorte une convection qui tend à uniformiser la température de la pièce.

Pour les gaz, la convection est bien plus efficace que la conduction dans un même gaz immobile.

- Rayonnement thermique :

Les corps chauffés émettent un rayonnement EM. Ce phénomène est appelé rayonnement thermique. Il ne s'agit pas d'un transfert thermique a proprement parlé. En particulier, il peut se propager dans le vide alors que la conduction thermique nécessite un support matériel. Toutefois, le rayonnement thermique devra intervenir dans les bilans énergétiques comme autre cause d'échange d'énergie.

Le rayonnement thermique a pour origine le mouvement des charges électriques présentes dans la matière (qui génèrent alors une onde EM) et il est d'autant plus important que la température est élevée. Un métal chauffé donne lieu au phénomène d'incandescence caractérisé par une émission de lumière utilisée pour l'éclairage dans des lampes à incandescence. Le métal apparaît d'abord rougeâtre, puis jaune, en fin de plus en plus blanc à mesure que la température s'élève. A l'inverse, à température ambiante, c'est le rayonnement infra-rouge qui domine.

On supposera dans la suite que les déséquilibres de température (responsables des phénomènes de transfert) restent faibles ; on pourra ainsi toujours définir en chaque point et à chaque instant, une température, une pression, une masse volumique, …(axiome « d'équilibre thermodynamique local »).

2 – Loi de Fourier et vecteur densité de courant de chaleur :

La présence, dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique, d'une inhomogénéité de température fait apparaître un transfert thermique par conduction qui possède les propriétés suivantes :

- Le transfert a lieu des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides
- Il est proportionnel à la surface à travers laquelle on évalue la puissance diffusée ainsi qu'à la durée du transfert
- Il augmente de manière linéaire avec le gradient de la température

Joseph Fourier (1768 – 1830) a proposé une loi phénoménologique décrivant ce mode de transfert thermique par conduction :

On considère un corps dont la température dépend de x uniquement et du temps.

La quantité d'énergie δQ, qui traverse par conduction thermique une surface élémentaire dS perpendiculaire à l'axe (Ox) pendant une durée dt dans le sens choisi pour l'axe (Ox) est :

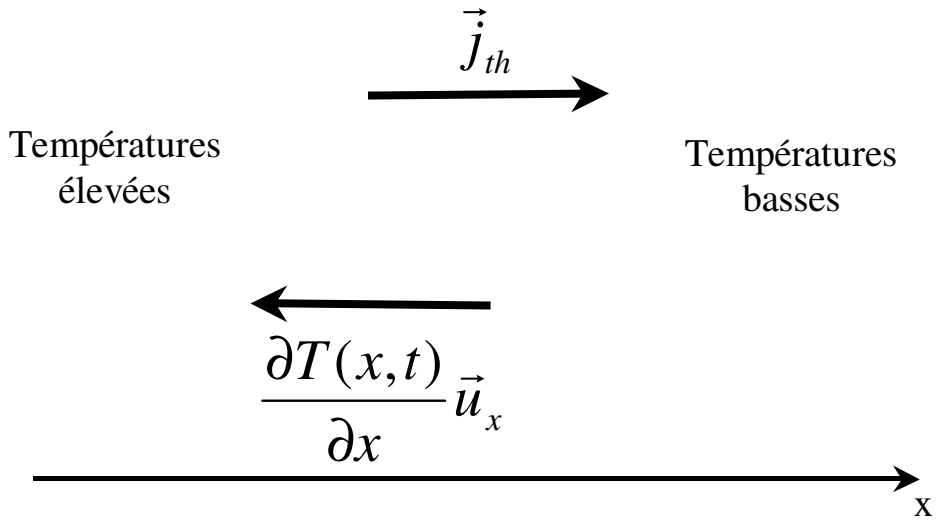
$$\delta Q = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dS \; dt$$

où λ (notée parfois K) est une constante positive caractéristique du matériau appelée conductivité thermique (elle s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

On définit le vecteur densité de courant thermique : (par analogie avec le vecteur densité de courant électrique)

$$j_{th} = \frac{\delta Q}{dSdt} = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad ; \quad \vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\vec{u}_x = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T(x,t)$$

Cette dernière expression, faisant intervenir le gradient de la température, constitue la loi de Fourier.



Elle se généralise à des distributions de températures dépendant des trois variables d'espace :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T(x,y,z,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

* Un peu de vocabulaire : (flux thermique)

$$\frac{\delta Q}{dt} = j_{th}.dS = \vec{j}_{th}.dS\ \vec{u}_x$$

est le flux thermique noté Φ (c'est une puissance) ; il s'interprète comme le flux de $\vec{j}_{th}$ à travers la surface dS orientée.

* Quelques conductivités thermiques : (λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$)

- Gaz (λ de 0,006 à 0,18) : mauvais conducteurs
- Liquides non métalliques (λ de 0,1 à 1) : conducteurs moyens (eau)
- Solides métalliques (λ de 10 à 400) : excellents conducteurs (cuivre, acier)
- Matériaux non métalliques (λ de 0,004 à 4) : conducteurs moyens (verre, béton, bois) ou mauvais conducteurs (laine de verre, polystyrène expansé)

3 – Bilan local d'énergie : (sans ou avec sources)

On considère un corps homogène (en fait, le plus souvent liquide ou solide) de masse volumique ρ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique c. Ces grandeurs sont supposées constantes.

Dans un 1er temps, on suppose qu'il n'y a pas au sein du milieu de sources susceptibles de fournir de la chaleur localement.

On applique le 1er principe de la thermodynamique à un petit volume dSdx :

$$dU = \delta Q \qquad ; \qquad U = \rho dSdx\, c\, T(x,t)$$

$$\rho dSdx\, c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt = j_{th}(x,t)dSdt - j_{th}(x+dx,t)dSdt$$

$$\rho dSdx\, c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} dSdtdx$$

Finalement : (équation de conservation de l'énergie sans sources)

$$\rho\, c\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}$$

On suppose maintenant la présence de sources de chaleur au sein du milieu ; on note $p_s(x,t)$ la puissance volumique dégagée (de manière algébrique) par ces sources.

Exemple (effet Joule) : si le matériau est parcouru par un courant électrique, le volume dSdx, de résistance électrique dR, traversé par le courant électrique di = jdS, reçoit, par effet Joule, pendant la durée dt, l'énergie :

$$\delta Q = dR\,(di)^2\,dt = \frac{1}{\sigma}\frac{dx}{dS}\,j^2\,(dS)^2\,dt = \frac{1}{\sigma}\,j^2\,dx dS dt$$

D'où la puissance volumique due à l'effet Joule :

$$p_s = \frac{j^2}{\sigma}$$

Le bilan énergétique devient :

$$\rho dSdx\, c\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} dSdtdx + p_s(x,t) dSdxdt$$

Soit :

$$\rho\, c\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} + p_s(x,t)$$

4 – Equation de la chaleur ou de la diffusion thermique (sans ou avec sources) :

En utilisant la loi de Fourier :

* Sans sources :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho\, c}{\lambda} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

* Avec sources :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda} p_s(x,t) = \frac{\rho\, c}{\lambda} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Il n'existe de solutions analytiques de cette équation que dans des cas particuliers que l'on étudiera dans les paragraphes suivants.

La solution de cette équation aux dérivées partielles dépend de constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux limites spatiales et temporelles. Si ces conditions traduisent toutes les données significatives du problème physique, la solution obtenue est unique et c'est donc la bonne !

5 – Exemples de résolution de l'équation de la chaleur :

- Résistance thermique : (régime permanent dans une tige cylindrique)

On souhaite déterminer, en régime permanent, la température dans une tige homogène cylindrique de section S, de longueur L et dont les extrémités sont maintenues aux températures T_1 et $T_2 < T_1$. On suppose que la surface latérale est isolée.

L'équation de la chaleur devient simplement :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Le flux thermique qui traverse la tige est :

$$\Phi = j_{th} S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S = cste$$

Par analogie avec la résistance électrique, on définit la résistance thermique de la tige :

$$T_1 - T_2 = R_{th}\Phi \qquad soit \qquad R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$$

On définit également la conductance thermique $G_{th} = 1/R_{th}$.

Exemple : (isolation des murs d'une maison)

* parpaings, polystyrène, placoplâtre et papier-peints : résistances thermiques en série

* idem mais avec une fenêtre en plus : résistances thermiques en parallèle

- Méthode de séparation des variables :

Voir exercice n°4.

- Onde thermique (température d'une cave) :

Voir exercice n°5.

• Même si les variations climatiques au niveau du sol (cycle journalier ou annuel) sont loin d'être harmoniques, l'étude d'un système en RSF est intéressante, car tout régime variable peut être considéré comme la superposition de régimes sinusoïdaux (analyse de Fourier).

• Considérons un demi-espace (le sol) situé dans les $z \geq 0$: il est caractérisé par une masse volumique ρ, une conductivité thermique λ et une capacité thermique massique c_V. A la surface, la température varie suivant la loi : $T(z=0,t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$

(T_0 représente la température moyenne à la surface du sol et θ_0 l'amplitude des variations de température au même endroit).

• En l'absence de production locale de chaleur, l'équation de la diffusion thermique s'écrit :

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c_V}\times\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \quad \text{ou :} \quad \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c_V}\times\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2}, \quad \text{avec :} \quad \theta(z,t)=T(z,t)-T_0$$

($\theta(z,t)$ est donc une grandeur à valeur moyenne nulle, pratique pour passer en complexe).

• Comme pour « l'effet de peau » électromagnétique , nous allons utiliser la notation complexe et chercher des solutions (stables temporellement) sous la forme :

$$\underline{\theta}(z,t)=f(z)e^{i\omega t} \Rightarrow \text{ on obtient : } \frac{d^2 f(z)}{dz^2}-\frac{i\rho c_V \omega}{\lambda}f(z)=0 \Rightarrow f(z) \text{ est en } e^{rz}.$$

Les solutions de l'équation caractéristique donnent : $r=\pm\frac{1+i}{\delta}$, avec : $\boxed{\delta=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c_V \omega}}}$

• On élimine la solution qui diverge pour $z\to\infty$, on repasse en réel et l'on affirme la continuité de la température en z=0 ; en final, il vient :

$$\boxed{T(z,t)=T_0+\theta_0\exp(-z/\delta)\cos(\omega t-z/\delta)}$$

Rq1 : on obtient donc une **pseudo-OPPM** de diffusion thermique, de vitesse de phase :

$$v_\varphi=\omega\delta=\sqrt{\frac{2\lambda\omega}{\rho c_V}} \Rightarrow \text{ le sol est donc } \textbf{dispersif} \text{ vis-à-vis des ondes thermiques } (v_\varphi \text{ dépend de } \omega)$$

Rq2 : δ s'exprime en **mètres**, et est appelée « **épaisseur de peau thermique** » ; à une profondeur de 3δ dans le sol, l'amplitude des variations de température n'est plus que de $0,05\times\theta_0$. Il est donc intéressant d'évaluer numériquement δ :

- **variations journalières de T :** pour un sol « typique » : $\delta_J \approx 9cm$
- **variations annuelles de T :** on multiplie δ_J par $\sqrt{365} \Rightarrow \delta_A \approx 1,7m$

$\Rightarrow$ on peut dire qu'à 5 mètres de profondeur, la température est pratiquement constante tout au long de l'année (= « **effet de cave** »).

Rq3 : si l'on compare la peau thermique $\delta_{th} = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c_V \omega}}$ à la peau électromagnétique $\delta_{em} = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

On constate une **analogie** (dépendance en $\omega^{-1/2}$, μ_0 caractérise le milieu de propagation comme le produit ρc_V), mais la conductivité ne joue pas le même rôle : en fait, il est logique que plus le sol est un bon conducteur thermique, plus la profondeur de pénétration de l'onde thermique est grande (si $\lambda = 0,\ \delta = 0$) ; en revanche, meilleure est la conductivité électrique, moins l'onde électromagnétique pourra pénétrer dans le conducteur, ce qui peut paraître surprenant : il ne faut pas oublier la **loi de Lenz** (plus λ est grande, plus l'effet pourra s'opposer à la cause qui lui a donné naissance…).

Donc si deux phénomènes physiques sont régis par la même équation différentielle (obtenue par « combinaison » d'équations propres à chacun des phénomènes étudiés), la **forme** des **solutions** sera **identique**, mais l'**analogie** que l'on peut en tirer peut n'être que **partielle**.

6 – Equation de la chaleur à trois dimensions :

Elle se généralise à des distributions de températures dépendant des trois variables d'espace :

$$\vec{j}_{th} = j_{th,x}(x,y,z,t)\,\vec{u}_x + j_{th,y}(x,y,z,t)\,\vec{u}_y + j_{th,z}(x,y,z,t)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T(x,y,z,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

$$\rho\,c\,\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j_{th,x}(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial j_{th,y}(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial j_{th,z}(x,y,z,t)}{\partial z}\right) + p_s(x,y,z,t)$$

Soit, en utilisant la définition de la divergence d'un vecteur :

$$\rho\,c\,\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = -div(\vec{j}_{th}) + p_s(x,y,z,t)$$

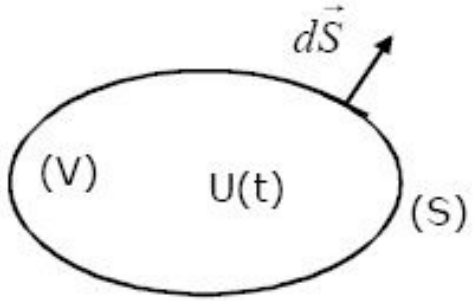
Puis, en utilisant la loi de Fourier :

$$\rho\, c\, \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right) + p_s(x,y,z,t)$$

Soit, en définissant le laplacien d'une grandeur scalaire :

$$\rho\, c\, \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(x,,z,t) + p_s(x,y,z,t)$$

On peut aussi effectuer un bilan général, calqué sur la conservation de la charge électrique en EM :



On considère une "**surface de contrôle**" (S), délimitant un "**volume de contrôle**", de coordonnées fixes dans le référentiel d'étude.
Examinons les causes de variation temporelle de l'énergie interne U(t) contenue dans (V):

- En l'absence de travail échangé, le **Premier Principe** permet d'écrire :

$$\frac{dU}{dt} = P_{th}^{T} + P_{th}^{P}$$ où : P_{th}^{T} = puissance thermique reçue par TRANSFERT à travers la surface (S)
P_{th}^{P} = puissance thermique PRODUITE localement au sein du volume (V)

- En notant $p(x,y,z,t)$ la puissance **volumique** (en $W.m^{-3}$) créée au sein du système (par effet Joule, à la suite de réactions nucléaires...), on peut écrire : $\boxed{P_{th}^{P} = \iiint_V p \times d\tau}$

Par ailleurs : $\boxed{P_{th}^{T} = -\oiint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V div\vec{j}_{th} \times d\tau}$

Enfin : $dU = C_V dT + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T \times dV = C_V dT$, puisque, par définition, le volume de contrôle est fixé.

C_V est la capacité thermique du volume (V), que l'on peut mettre sous la forme :

$C_V = \iiint_V \rho c_V d\tau$, où $\rho(x,y,z)$ est la masse volumique du système, et c_V sa capacité thermique **massique** (par hypothèse, ces 2 grandeurs ne dépendront pas du temps).

D'où : $\frac{dU}{dt} = \iiint_V \rho(x,y,z) c_V(x,y,z) \times \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \times d\tau$ (U ne dépend que de t, mais pas T)

- Il vient alors : $\iiint_V \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \iiint_V p d\tau - \iiint_V div\vec{j}_{th} \times d\tau$

Cette relation étant vérifiée $\forall$ (V), aussi petit que l'on veut, on obtient :

$$\boxed{\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -div\vec{j}_h + p} \quad (3)$$

= « équation **locale** de conservation de l'énergie interne »

7 – Analogie entre les lois phénoménologiques de Fourier et d'Ohm :

On s'intéresse ici à la conduction électrique dans les métaux.

a – Loi d'Ohm locale et vecteur densité de courant électrique :

Le modèle classique de Drude (voir cours PP) permet d'interpréter la loi d'Ohm locale dans les métaux.

On rappelle l'expression de la résistance électrique R d'un fil métallique de longueur L, de section transverse S et de conductivité σ (de résistivité ρ) :

$$R = \rho \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

On fait évidemment l'analogie avec la résistance thermique d'un barreau rectiligne unidimensionnelle.

b – Bilan local de conservation de la charge électrique :

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

II) Transfert thermique convectif (convection) :

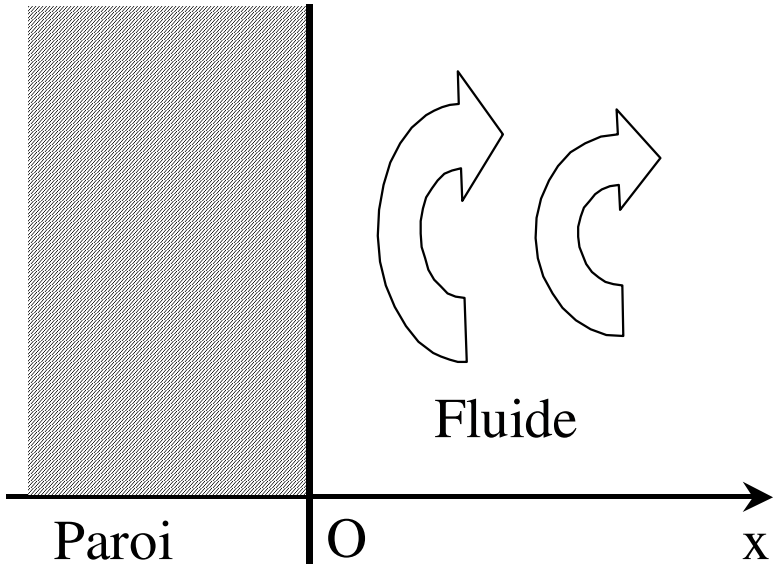
1 – Transfert conducto-convectif :

Il est d'observation courante que, pour refroidir un liquide chaud contenu dans un flacon, on agite le flacon. Ainsi font les parents avant de présenter le biberon à leur bébé.

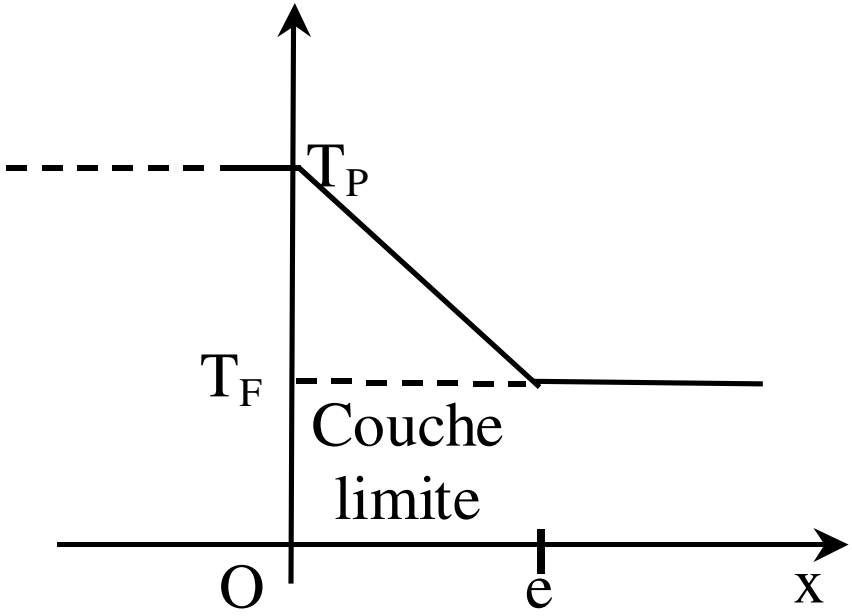
Le transfert thermique à travers les parois du flacon s'effectue par conduction thermique diffusive. L'agitation du liquide provoque en son sein des mouvements convectifs qui favorisent la conduction thermique à travers les parois.

Un autre exemple est donné par l'échange conducto-convectif entre l'air d'une pièce d'habitation et la surface des radiateurs utiles pour chauffer la pièce.

Pour modéliser ces exemples, on considère un modèle unidirectionnel en régime stationnaire, tel que représenté sur la figure suivante :



Le fluide est animé de mouvements de convection qui provoquent une homogénéisation de la température. On considère que ce brassage est suffisamment efficace pour que la température du fluide soit constante spatialement et égale à T_F. Dans la paroi, en revanche, le transfert est conductif et dirigé selon l'axe (Ox). On y observe donc un gradient de température.



La température de la paroi T_P est différente de la température du fluide ; il existe une couche limite de faible épaisseur e (de l'ordre de qq mm) dans laquelle le fluide est pratiquement immobile et où le transfert de chaleur se fait de manière conductive.

2 – La loi de Newton :

Les transferts thermiques entre un corps et le milieu extérieur suivent la loi de Newton si la densité de flux thermique sortant algébriquement à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre celle de la surface du matériau et celle de l'extérieur.

Avec les notations du paragraphe précédent :

$$j_{conv} = h(T_P - T_F)$$

h est appelé le coefficient de transfert thermique de surface.

On peut montrer que $h = \frac{\lambda_F}{e}$, où λ_F est la conductivité thermique du fluide et e l'épaisseur de la couche limite.

Dans le cas d'une convection forcée, la couche limite est moins épaisse et donc h augmente : le transfert conducto-convectif est alors favorisé.

3 – Un 1er exemple ; l'ailette de refroidissement :

Cet exemple mêle les aspects conductif et conducto-convectif.

On se propose de déterminer le profil de température T(x) atteint en régime permanent dans une tige cylindrique (de rayon R et d'axe (Ox)) dont une extrémité est maintenue à la température T_0.

La tige n'est pas isolée latéralement :

On suppose que le transfert thermique sur la surface latérale avec l'atmosphère (de température constante $T_a < T_0$) est du type conducto-convectif (il vérifie la loi de Newton).

On supposera l'ailette de longueur infinie.

Un bilan énergétique donne désormais, en régime permanent :

$$-\frac{dj_{th}(x)}{dx}(\pi R^2)dxdt - h(T(x)-T_a)2\pi R dxdt = 0$$

Soit, en utilisant la loi de Fourier :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}T(x) = \frac{2h}{\lambda R}T_a$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$T(x) = Ae^{\frac{x}{D}} + Be^{-\frac{x}{D}} + T_a \qquad (Avec : D = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}})$$

L'ailette étant de longueur infinie, A = 0 :

$$T(x) = Be^{-\frac{x}{D}} + T_a$$

La condition au limite en x = 0 permet de calculer B. Finalement :

$$T(x) = (T_0 - T_a)e^{-\frac{x}{D}} + T_a$$

On constate que la température de l'ailette tend vers celle du milieu environnant lorsque la distance x à l'origine est >> que la distance caractéristique D.

Intérêt de l'ailette de refroidissement : finalement, on peut s'interroger sur la valeur du flux thermique évacué par l'ailette de refroidissement vers l'atmosphère.

On détermine ce flux à l'aide de la loi de Fourier en x = 0. En effet, en régime permanent, ces deux flux thermiques sont identiques puisque l'ailette cède à l'air ambiant tout ce qu'elle reçoit.

Ainsi, ce flux Φ_c vaut :

$$\Phi_c = -\pi R^2 \lambda \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\lambda}{D} \pi R^2 (T_0 - T_a)$$

On aurait obtenu le même résultat en intégrant sur toute la surface latérale de la barre le flux conducto-convectif :

$$\Phi_c = \int_0^\infty h(T(x) - T_a) 2\pi R \, dx = 2\pi R h \int_0^\infty (T_0 - T_a) e^{-\frac{x}{D}} \, dx$$

$$\Phi_c = 2\pi R h D (T_0 - T_a) = \frac{\lambda R}{D^2} \pi R D (T_0 - T_a) = \frac{\lambda}{D} \pi R^2 (T_0 - T_a)$$

En l'absence d'ailette, le flux aurait été :

$$\Phi_{c,0} = h\pi R^2 (T_0 - T_a)$$

Le rapport de ces deux flux vaut :

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_{c,0}} = \frac{\lambda}{hD}$$

Avec des valeurs numériques courantes, ce rapport est de l'ordre de 71 ; on voit bien ici l'intérêt de cette ailette de refroidissement.

III) Le rayonnement thermique :

1 – Rayonnement d'équilibre :

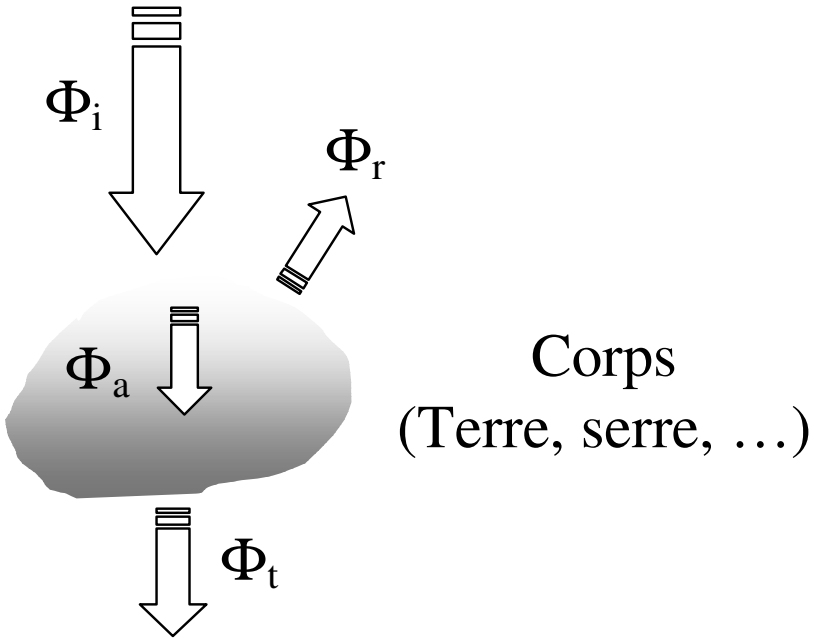
- L'origine du rayonnement thermique est le mouvement des charges électriques de la matière (rayonnement d'accélération, le spectre d'émission est **continu**, la **fréquence augmentant** avec la **température** (à température ambiante, on est dans le domaine des **I.R**).
- Le rayonnement d'équilibre est émis par un système en **équilibre thermodynamique** à la température T (une source laser n'est pas à l'équilibre thermique et les propriétés de l'émission seront différentes).

L'énergie d'un photon est $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$; plus la température est élevée et plus l'énergie est grande et donc plus la fréquence importante et la longueur d'onde faible.

Bilan énergétique pour l'interaction matière-rayonnement

- Considérons un corps recevant un flux de rayonnement thermique incident Φ_i (en W) ; on peut écrire : $\Phi_i = \Phi_a + \Phi_r + \Phi_t$ (Φ_a = flux absorbé par le corps; Φ_r = flux réfléchi ; Φ_t = flux transmis).
- Un corps **transparent** sera défini par : $\boxed{\Phi_r = \Phi_a = 0} \Rightarrow \boxed{\Phi_i = \Phi_t}$

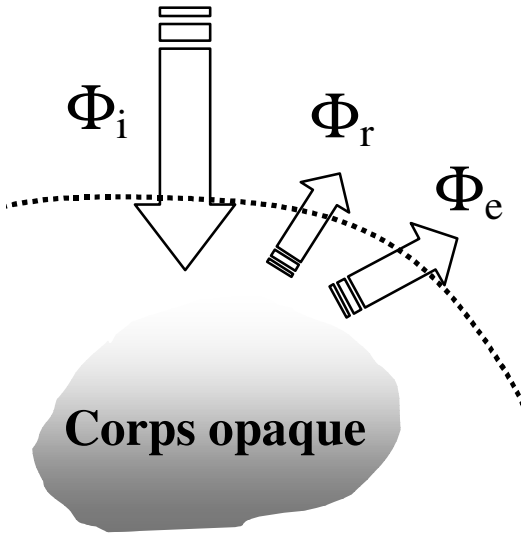
  un corps **opaque** est caractérisé par : $\boxed{\Phi_t = 0} \Rightarrow \boxed{\Phi_i = \Phi_a + \Phi_r}$



Les corps opaques : ils ne permettent pas la transmission de la lumière. On ne prend en compte que les phénomènes de réflexion (diffusion) et d'absorption.

Les corps transparents : ils ne mettent en jeu ni réflexion, ni absorption.

* Par ailleurs, le corps peut, de lui-même, émettre un flux propre Φ_e ; on définit alors le « flux radiatif » Φ_R, relatif au corps opaque considéré, comme étant le flux total algébrique sortant du corps. Alors :



$$\Phi_R = \Phi_e + \Phi_r - \Phi_i = \Phi_e - \Phi_a$$

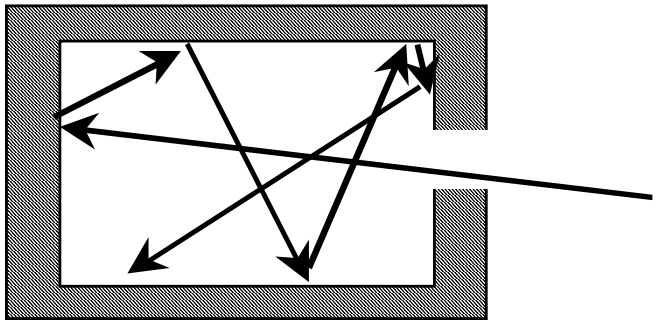
Un corps opaque sera dit en « équilibre radiatif » avec le champ de rayonnement si l'on a la relation :

$$\Phi_R = 0 \quad \text{soit} \quad \Phi_e = \Phi_a$$

Corps noir

- Un **corps noir** est un corps qui absorbe tout le rayonnement incident ($\Phi_i = \Phi_a$), **quelle que soit la longueur d'onde** incidente et **quelle que soit la direction** incidente (par rapport à un corps opaque, on a la relation supplémentaire : $\Phi_r = 0$).
- Une enceinte, dans laquelle on a aménagé une **petite** ouverture et possédant des parois **absorbantes**, peut être modélisée par un corps noir.

Une surface recouverte de noir de fumée réalise approximativement un corps noir. La brique constitue également un bon corps noir. Cependant, la meilleure réalisation d'un corps noir est constituée par une petite ouverture ménagée à la surface d'une enceinte dont les parois intérieures sont absorbantes.



T

En effet, tout rayonnement qui pénètre dans l'enceinte par cette ouverture subit plusieurs réflexions au cours desquelles il est partiellement absorbé ; après quelques réflexions, il est complètement absorbé.

2 – Loi du rayonnement thermique d'équilibre :

L'onde EM qui règne en tout point du milieu est assimilable à un gaz de photons en équilibre à la température T. Les propriétés d'un tel système sont bien décrites dans le cadre des théories statistiques et quantique.

Le rayonnement d'équilibre à la température T est le rayonnement du champ EM qui existe dans une enceinte fermée vide (ou remplie d'air dont l'indice est proche de 1) dont la paroi est opaque et maintenue à une température constante T.

Loi de Planck

• Considérons une enceinte à l'équilibre thermique avec le rayonnement quelle contient. On notera u = « densité volumique d'énergie de rayonnement » (en $J.m^{-3}$) ; du sera la contribution de la bande de longueurs d'onde $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ à l'énergie volumique totale et l'on écrira :

$\boxed{du = u_\lambda d\lambda}$ où $u_\lambda(\lambda, T)$ est la « **densité SPECTRALE d'énergie volumique** », en $J.m^{-4}$.

• On montre que : $\boxed{u_\lambda(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1}}$

$h =$ cste de Planck $= 6{,}63.10^{-34} J.s^{-1}$

$k_B =$ cste de Boltzmann $= 1{,}38.10^{-23} J.K^{-1}$

$c =$ célérité de la lumière $= 3.10^8 m.s^{-1}$

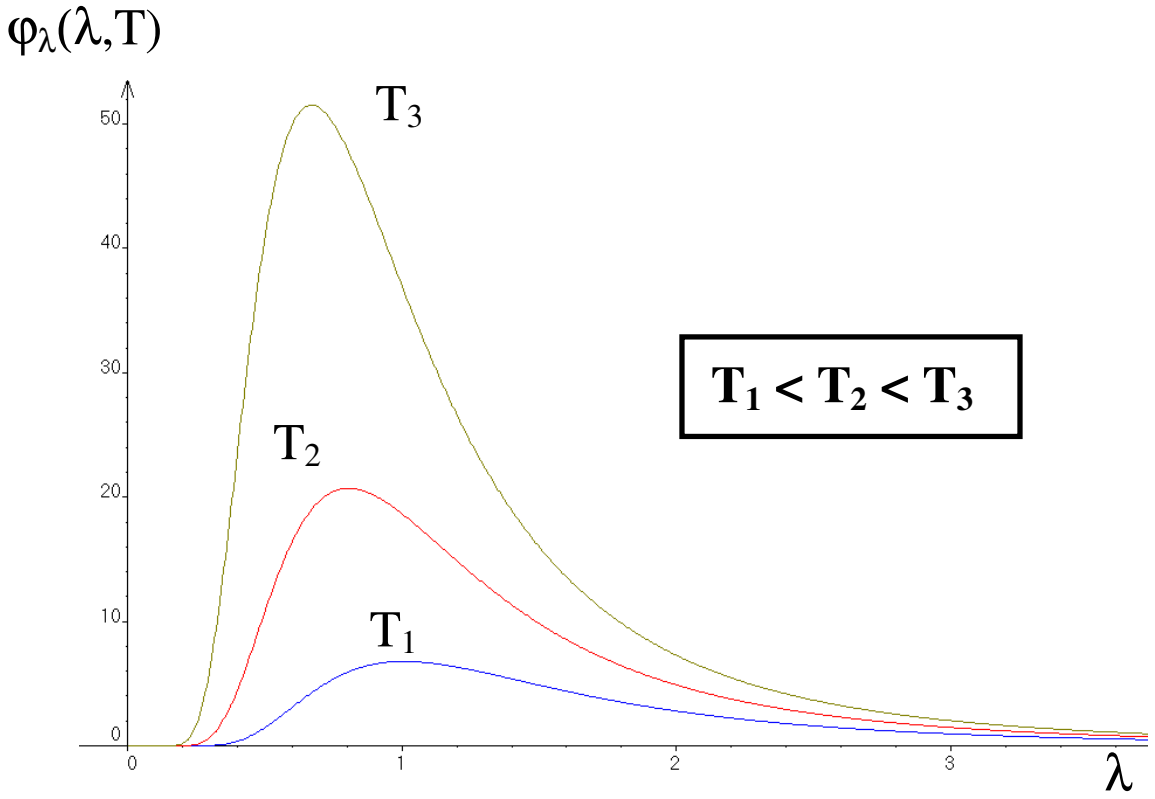
• En outre, le rayonnement d'équilibre est **ISOTROPE** ; enfin, si l'on s'intéresse à une portion de surface s de l'enceinte (considérée comme un corps opaque récepteur), on peut calculer le flux reçu par cet élément pour la bande de longueurs d'onde $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, soit :

$$d\Phi = \varphi_\lambda(\lambda, T)\, s\, d\lambda$$

Avec :

$$\varphi_\lambda(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}$$

(flux surfacique spectral, en $W.m^{-3}$)



$T_1 < T_2 < T_3$

Relation entre u_λ et φ_λ :

$$d\Phi = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Omega}{4\pi} u_\lambda Sc\cos(\theta)dt}{dt} d\lambda = \frac{1}{4\pi} Scu_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)2\pi\sin(\theta)d\theta d\lambda = \frac{Sc}{4} u_\lambda d\lambda = \varphi_\lambda S d\lambda$$

Donc :

$$\varphi_\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda$$

Remarque :

En supposant que les photons ne peuvent se déplacer que dans trois directions possibles (et donc six sens, comme les molécules en théorie cinétique), on trouve alors simplement que $\varphi_\lambda = \frac{c}{6} u_\lambda$ (l'ordre de grandeur est correct).

Loi de Wien du déplacement

- Pour une température donnée, on peut déterminer la longueur d'onde λ_M rendant $u_\lambda(\lambda,T)$ maximum : $\left.\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right|_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_M \times T = 2898 \mu m.K}$
- La loi de Wien est très pratique pour calculer rapidement la longueur d'onde correspondant au maximum de flux spectral ; ainsi, pour le Soleil dont la température de surface $T_S \approx 6000K$, on trouve $\lambda_M \approx 0,5\mu m$, ce qui correspond à du jaune.

On peut faire le calcul à partir du flux surfacique spectral $\varphi_\lambda(\lambda,T)$. On remarque que celui-ci peut s'écrire : (Pour une température fixée)

$$\varphi_\lambda(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1} = A\frac{1}{\lambda^5}f(\lambda) \qquad avec \qquad f(\lambda) = \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}$$

Par conséquent, $\varphi_\lambda(\lambda,T)$ est extremum pour :

$$\frac{\partial \varphi_\lambda(\lambda,T)}{\partial \lambda} = A\left(-\frac{5}{\lambda^6} f(\lambda) + \frac{1}{\lambda^5} f'(\lambda)\right) = 0 \qquad soit \qquad \lambda = \frac{5 f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

La résolution numérique de cette dernière relation conduit à la loi de Wien :

$$\lambda_m T = 2{,}898.10^{-3}\ K.m$$

Ordres de grandeur :

- Pour le soleil : T_S = 5 800 K, λ_m = 500 nm (jaune)
- Corps à température ambiante : λ_m = 10 µm (infrarouge)
- Rayonnement fossile de l'Univers : λ_m = 1 mm (ondes radio millimétriques)

Remarque (étendue du flux surfacique spectral $\varphi_\lambda(\lambda,T)$) :

Toujours à température fixée, on constate que le flux surfacique spectral $\varphi_\lambda(\lambda,T)$ devient négligeable dès que l'on s'éloigne sensiblement de la valeur λ_m.

On définit alors une étendue spectrale (appelé encore domaine spectral), prise, par convention, égale à $\left[\frac{\lambda_m}{2},8\lambda_m\right]$, qui contient 98% de l'énergie rayonnée.

Ainsi, un corps à température ambiante rayonne dans l'infrarouge lointain, tandis que le rayonnement solaire couvre le visible et l'infrarouge proche.

Loi de Stefan

• On peut alors calculer le flux total reçu par l'élément de surface s (soumis à un rayonnement d'**équilibre**), en sommant les contributions de toutes les fréquences : $\Phi(T) = s\int_0^\infty \varphi_\lambda(\lambda,T)d\lambda$; on en déduit le flux **surfacique** total :

$$\varphi(T) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(\lambda,T)d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B\lambda T}\right)-1} d\lambda \quad \Rightarrow \text{ en posant } x = \frac{hc}{k_B\lambda T}\text{, il vient :}$$

$$\varphi(T) = \frac{2\pi k_B^4}{h^3c^2}T^4\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1}dx \text{ ; or : } \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15} \Rightarrow \varphi(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}T^4 \text{ ; on écrira :}$$

$$\boxed{\varphi(T) = \sigma T^4} \quad \text{avec : } \boxed{\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2} = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}} \quad = \text{cste universelle de Stefan}$$

Rq : ce flux d'**équilibre** ne dépend que de T, et non de la nature du corps opaque considéré.

3 – Rayonnement du corps noir :

Flux émis par un corps noir isotherme

• Considérons un corps noir isotherme en **équilibre radiatif** avec un rayonnement. On sait que : $\Phi_R = 0 \Rightarrow \Phi_e = \Phi_a$; par ailleurs, pour un corps noir : $\Phi_i = \Phi_a \Rightarrow \boxed{\Phi_i = \Phi_a = \Phi_e}$

$\Rightarrow$ un corps noir en **équilibre radiatif** **émet tout le rayonnement qu'il absorbe**, ceci sur toute l'étendue du spectre.

• Pour un équilibre thermique entre le rayonnement incident et le corps noir, les flux précédents obéissent à la loi de Planck ; quant aux densités de flux, on peut écrire en particulier :

$$\boxed{\varphi_i = \varphi_a = \varphi_e = \sigma T^4}$$

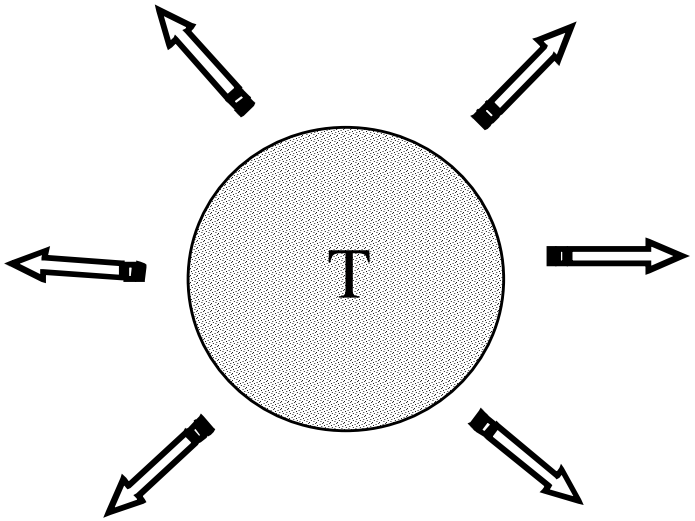
Un corps noir isotherme à température T émet un rayonnement thermique présentant les caractéristiques du rayonnement d'équilibre à cette température T.

Exemple ; refroidissement d'un corps noir par rayonnement :

Un corps sphérique (de rayon R = 10 m) est assimilé à un corps noir de température T = 1 000 K. Il est supposé seul dans l'espace. Quelle variation de sa température provoque le rayonnement en 1 heure ?

Données :

masse volumique $\mu = 10^3 \ kg.m^{-3}$, capacité thermique massique $c = 5.10^3 J.kg^{-1}.K^{-1}$.



Le 1er principe de la thermodynamique appliqué au corps noir donne :

$$dU = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu c dT = -4\pi R^2 \sigma T^4 dt$$

En 1 heure, la variation de température reste faible. On peut écrire :

$$\Delta T = -\frac{3\sigma T^4}{\mu c R}\Delta t = -12\ K \qquad (en\ 1\ h)$$

Rq : un volume est **convexe** si le plan tangent en tout point de la surface extérieure **ne recoupe pas** cette surface : le flux émis est alors de la forme $\Phi_e = \varphi_e \times S = \sigma T^4 \times S$ (si le corps n'est pas convexe, une partie du flux émis peut être réabsorbé).

Corps noir isotherme convexe recevant un rayonnement d'équilibre

• On considère un corps noir isotherme convexe, de température T et de surface S, placé dans une enceinte où règne un rayonnement d'**équilibre** de température T_0 ; on peut appliquer la loi de Stefan pour calculer le flux radiatif : $\boxed{\Phi_R = \Phi_e - \Phi_a = \sigma(T^4 - T_0^4)S}$

Les dimensions du corps noir doivent être faibles devant celles de l'enceinte. Le rayonnement est alors peu perturbé par la présence du corps. Ainsi, il est possible de faire l'approximation d'un rayonnement dans l'enceinte présentant les caractéristiques du rayonnement d'équilibre à la température T_0.

Rq1 : en l'absence d'autres transferts thermiques, et en appelant C la capacité thermique du corps noir, on peut appliquer le Premier Principe à ce dernier pour obtenir :

$$dU = \delta Q_{reçu} = -\Phi_R dt = -\sigma(T^4 - T_0^4)Sdt = CdT \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\sigma S}{C}(T^4 - T_0^4) = 0$$

(si T et T_0 sont proches, on peut poser : $T = T_0 + \theta$, avec $\theta \prec\prec T_0$; alors : $T^4 - T_0^4 \approx 4T_0^3 \times \theta$ et l'équation différentielle précédente devient **linéaire**, ce qui permet de déterminer $\theta(t)$).

Rq2 : le corps noir n'est qu'un **modèle**, qui n'a pas d'existence physique sur toute l'étendue du spectre ; en revanche, il peut rendre compte des propriétés d'un corps réel sur une bande de longueurs d'onde (λ_1, λ_2) de **largeur finie**.

Exercice d'application :

Le Soleil peut être considéré comme une sphère de rayon $R_S = 700\,000$ km, à la température $T_S = 5\,800$ K. On assimile le Soleil à un corps noir.

a) Quel est le domaine de longueur d'onde dans lequel le Soleil émet majoritairement ?

b) Calculer la puissance totale émise par le Soleil.

On donne : $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$.

c) En déduire le flux surfacique incident φ_i au niveau de l'orbite terrestre. La distance Terre-Soleil vaut D = 150 millions de km.

d) Quel est le flux Φ_i total incident arrivant sur la Terre ? Le rayon terrestre est $R_T = 6\,400$ km.

e) On suppose que la Terre est également un corps noir. Quel est le flux Φ_a absorbé par la Terre ?

f) Quel est le flux Φ_e émis par la Terre ? On appellera T_t la température de la Terre, supposée uniforme.

g) Exprimer et calculer la température de la Terre en supposant le régime stationnaire.

Solution :

a) Le Soleil est un corps noir à l'équilibre thermodynamique local à la température T_S. Le rayonnement qu'il émet obéit à la loi de Wien.

Le maximum de rayonnement est atteint pour la longueur d'onde λ_m telle que :

$$\lambda_m T_S = 2\,900\ \mu m.K \qquad \text{soit} \qquad \lambda_m = 0{,}5\ \mu m$$

Le maximum est dans le visible. Cependant, 98% du rayonnement appartient au domaine $\left[\frac{\lambda_m}{2}, 8\lambda_m\right]$, soit $[0{,}25 - 4\ \mu m]$. Une grande partie est ainsi située dans l'infrarouge.

b) On utilise la loi de Stefan ; le flux surfacique émis à la surface du Soleil est $\varphi_e = \sigma T_S^4$ et le flux total est :

$$\Phi_e = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 = 4{,}0.10^{26}\ W$$

c) $\varphi_i = \dfrac{\Phi_e}{4\pi D^2} = \dfrac{R_S^2}{D^2}\sigma T_S^4 = 1\,400\ W.m^{-2}$ (c'est l'ordre de grandeur du flux mesuré)

d) $\Phi_i = \pi R_T^2 \varphi_i = \pi R_T^2 \dfrac{R_S^2}{D^2}\sigma T_S^4$

e) Par définition d'un corps noir : $\Phi_a = \Phi_i$

f) On applique de nouveau la loi de Stefan à la Terre assimilé à un corps noir :

$$\Phi_e = 4\pi R_T^2 \sigma T_t^4$$

g) En régime stationnaire, le flux émis est égal au flux absorbé :

$$4\pi R_T^2 \sigma T_t^4 = \pi R_T^2 \frac{R_S^2}{D^2}\sigma T_S^4 \qquad \text{soit} \qquad T_t = \sqrt{\frac{R_S}{2D}} T_S = 275\ K$$

L'ordre de grandeur de la température est tout à fait correct.