

## SERIE D'EXERCICES 25 : THERMODYNAMIQUE : PREMIER PRINCIPE

### Travail mécanique des forces extérieures de pression.

#### Exercice 1 : cas d'un gaz.

Soit une mole de gaz subissant une compression quasi statique et isotherme de  $(P_0, T_0)$  à  $(2P_0, T_0)$ . Donner l'expression du travail reçu par le gaz selon qu'il s'agit :

- d'un gaz parfait (on exprimera  $W$  en fonction de  $T_0$ );
- d'un gaz de Van der Waals :  $(P + a/V^2)(V - b) = RT$  (on exprimera  $W$  en fonction de  $V_i$  et  $V_f$  les volumes dans l'état initial et l'état final).

#### Exercice 2 : cas d'un liquide.

De l'eau liquide dans les conditions  $(P_0, V_0, T_0)$  subit une transformation quasi statique, son volume restant infiniment voisin de  $V_0$ . Les coefficients thermoélastiques  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\chi_T$  de l'eau sont connus et supposés constants.

- Justifier l'expression du travail élémentaire sous la forme  $\delta W = V_0 P (\chi_T dP - \alpha dT)$ .
- Préciser le travail échangé par l'eau avec le milieu extérieur lors des transformations suivantes :
  - transformation isochore ;
  - transformation quasi statique et isobare (on exprimera  $W$  en fonction de  $\alpha$ ,  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  et  $T_1$  la température atteinte);
  - transformation quasi statique et isotherme (on exprimera  $W$  en fonction de  $\chi_T$ ,  $V_0$ ,  $P_0$  et  $P_1$  la pression atteinte).

#### Exercice 3 : cas d'un solide.

Un solide a une compressibilité isotherme  $\chi_T$  constante. Il subit une transformation isotherme et quasi statique telle que la pression passe de la valeur  $P_1$  à la valeur  $P_2$ .

- Calculer le travail reçu de l'extérieur.  
A.N. :  $\chi_T = 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$  ;  $P_1 = 1 \text{ atm}$  ;  $P_2 = 100 \text{ atm}$  ;  $V = 1 \text{ L}$ .
- Comparer au travail que recevrait un gaz parfait de même volume initial sous la pression  $P_1$  lors d'une transformation identique.

#### Exercice 4 : travail reçu par un gaz pour différents chemins suivis.

On considère deux moles de dioxygène, gaz supposé parfait, que l'on peut faire passer réversiblement de l'état initial A  $(P_A, V_A, T_A)$  à l'état final B  $(P_B = 3P_A, V_B, T_B = T_A)$  par trois chemins distincts :

- chemin A 1 B : transformation isotherme ;
- chemin A 2 B : transformation représentée par une droite en diagramme de Clapeyron  $(P, V)$  ;
- chemin A 3 B : transformation composée d'une isochore puis d'une isobare.

Représenter les trois chemins en diagramme de Clapeyron.

Calculer dans chaque cas les travaux mis en jeu en fonction de  $T_A$ .

A.N. :  $T_A = 300 \text{ K}$ .

#### Exercice 5 : travail reçu par un solide pour différents chemins suivis.

Un solide de volume  $V_0$ , de coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  et de dilatation isobare  $\alpha$  ( $\chi_T$  et  $\alpha$  sont constants), subit un échauffement isobare et réversible de l'état  $A_0 (P_0, T_0)$  à l'état A  $(P_0, T_1 = k T_0)$  ; puis une compression isotherme et réversible, de l'état A à l'état  $A_1 (P_1 = k P_0, T_1)$ , le volume du solide restant infiniment voisin de  $V_0$ .

- Représenter les états  $A_0$ , A et  $A_1$  en diagramme  $(P, T)$ .
- Etablir l'expression du travail reçu pour passer de l'état  $A_0$  à l'état  $A_1$ , en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $k$ ,  $\alpha$  et  $\chi_T$  et  $T_0$  :
  - en suivant le trajet  $A_0 A A_1$  ;
  - en suivant le trajet direct  $A_0 A_1$ .

(On pourra utiliser la réponse à la question 1 de l'exercice 2.)

### Transfert thermique.

#### Exercice 6.

Aux faibles pressions, la capacité thermique massique à volume constant d'un gaz diatomique (monoxyde de carbone) est fonction de la température absolue  $T$  :  $c_v = A_0 - A_1/T + A_2/T^2$  où  $A_0 = 1,41 \text{ J.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$ ,  $A_1 = 492 \text{ J.g}^{-1}$  et  $A_2 = 16.10^4 \text{ J.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$  pour  $c_v$  en  $\text{J.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$ .

- Calculer le transfert thermique pour une mole de monoxyde de carbone lorsque le gaz est chauffé de  $27^\circ\text{C}$  à  $127^\circ\text{C}$  à volume constant. (On donne les masses molaires :  $\text{C} = 12 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ .)
- En déduire la capacité thermique massique moyenne relative à une mole de gaz.

#### Exercice 7.

Du phosphore liquide est placé dans un récipient ouvert à l'air libre à pression constante. On abaisse progressivement sa température jusqu'en dessous de la température normale de solidification, sans provoquer l'apparition du solide, c'est ce que l'on appelle du liquide surfondu.

On donne la température normale de fusion du phosphore  $t_n = 44\text{ }^\circ\text{C}$  ; la capacité thermique massique du phosphore liquide  $c_l = 0,25\text{ cal}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$  ; la capacité thermique massique du phosphore solide  $c_s = 0,20\text{ cal}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$  ; la chaleur latente massique de fusion du phosphore à  $44\text{ }^\circ\text{C}$   $L_{f,m} = 4,7\text{ cal}\cdot\text{g}^{-1}$  .

Calculer la chaleur latente massique de fusion du phosphore à la température  $t$  du phosphore surfondu :  $L_{f,t}$  en fonction de la température  $t$  et des données.

#### Exercice 8.

Un calorimètre de capacité thermique totale  $C$  (y compris celle des corps qui y sont contenus) dont la température initiale est  $\theta_0$  se refroidit par perte thermique. La puissance de fuite est proportionnelle à l'écart entre la température  $\theta$  du calorimètre à chaque instant et la température extérieure constante  $\theta_e$  .

1. Etablir la loi de variation  $\theta$  en fonction du temps  $t$ , de  $C$ , de  $a$  coefficient de proportionnalité de la puissance de fuite, et des températures  $\theta_0$  et  $\theta_e$  .

2. A.N. :  $C = 200\text{ cal}\cdot\text{C}^{-1}$  ;  $\theta_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$  ;  $\theta_e = 10\text{ }^\circ\text{C}$  ; au bout d'une minute la température est de  $19,5\text{ }^\circ\text{C}$  ; calculer le temps au bout duquel elle sera de  $15\text{ }^\circ\text{C}$  .

#### Exercice 9.

On considère un calorimètre et l'eau contenue, de capacité thermique totale  $\Gamma = 400\text{ cal}\cdot\text{C}^{-1}$  (on rappelle  $1\text{ cal} = 4,185\text{ J}$ ) et de température initiale  $\theta_0 = 15\text{ }^\circ\text{C}$ , dans lequel on immerge un serpent, de capacité thermique négligeable, parcouru par un liquide de capacité thermique massique constante  $c = 0,4\text{ cal}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$ , avec un débit régulier  $k = 1\text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ . Ce liquide entre à la température  $\theta_1 = 80\text{ }^\circ\text{C}$  constante et sort à la température  $\theta$  du calorimètre. On négligera les fuites thermiques.

1. Etablir la relation donnant  $\theta$  en fonction du temps  $t$  .

2. Quelle serait la température du calorimètre initialement à  $\theta_0$ , si l'on versait directement  $100\text{ g}$  du liquide dont la température initiale était  $\theta_1$ , le serpent étant alors vide ?

3. Le serpent est maintenant parcouru par de l'hydrogène qui entre à la température  $\theta_1 = 80\text{ }^\circ\text{C}$  et sort à la température  $\theta$  du calorimètre, dans les mêmes conditions initiales que précédemment ; au bout du temps  $t = 100\text{ s}$ , on note  $\theta = 52\text{ }^\circ\text{C}$ . Déterminer la capacité thermique spécifique de l'hydrogène, le débit est  $k = 1\text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$  .

### Premier principe.

#### Exercice 10.

L'état initial d'une mole de gaz parfait est caractérisé par  $P_0 = 2\cdot 10^5\text{ Pa}$ ,  $V_0 = 14\text{ L}$ . On fait subir successivement à ce gaz les transformations réversibles suivantes :

- une détente isobare qui double son volume ;
- une compression isotherme qui le ramène à son volume initial ;
- un refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial.

1. A quelle température s'effectue la compression isotherme ? En déduire la pression maximale atteinte.

2. Représenter le cycle de transformations dans le diagramme  $(P, V)$  .

3. Calculer les travaux et transferts thermiques échangés par le système au cours du cycle, soient  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$  et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$  (supposé constant dans le domaine de températures étudié).

4. Vérifier  $\Delta U = 0$  pour le cycle.

#### Exercice 11 : détente quasistatique polytropique d'un gaz parfait.

On considère la détente polytropique d'indice  $q$  constant (transformation pour laquelle le volume  $V$  et la pression  $P$  vérifient  $P V^q = \text{cte}$ , avec  $q$  constante positive, on pourra à ce sujet se reporter à l'exercice 7 de la série 23) d'un gaz parfait le menant d'un état

$(P_1, V_1, T_1)$  à un état  $(P_2, V_2, T_2)$  avec  $V_2 > V_1$ . On pose  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  (supposé constant).

Pour quelles valeurs du coefficient  $q$ , la détente du gaz s'accompagne-t-elle :

1. d'absorption de chaleur et d'échauffement du gaz ?
2. d'absorption de chaleur et de refroidissement du gaz ?

#### Exercice 12 : transformation adiabatique.

Un gaz parfait passe d'un état  $(P_1, V_1, T_1)$  à un état  $(P_2, V_2, T_2)$  suivant une transformation adiabatique.

On pose  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  (supposé constant).

1. Montrer que, s'il existe une suite continue d'états d'équilibre thermodynamiques internes au cours de la transformation, la pression  $P$  et le volume  $V$  du gaz sont reliés par :  $P V^\gamma = \text{cte}$ .

2. Le gaz est comprimé et passe de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2 = 2 P_1$ . Calculer le travail échangé par le gaz et le milieu extérieur en fonction de  $P_1$ ,  $V_1$  et  $\gamma$ .

Données :  $P_1 = 1\text{ bar}$ ,  $V_1 = 1\text{ dm}^3$  et  $\gamma = 1,4$ .

**Exercice 13 : étude du cycle de Lenoir.**

Un des premiers moteurs à combustion interne fonctionne de la manière suivante :

- l'air et le carburant sont admis dans le cylindre ; à la fin de la phase d'admission, l'air se trouve dans l'état A (  $P_1, V_1, T_1$  ) ;
- la combustion du carburant (phase d'explosion) provoque une augmentation brutale de la pression à volume constant et fournit un transfert thermique  $Q_1$  ; à la fin de la phase, les gaz résiduels sont dans l'état B (  $P_2, V_1, T_2$  ) ;
- ils se détendent ensuite de manière adiabatique jusqu'à l'état C (  $P_1, V_2, T_3$  ), les paramètres étant en permanence connus (état d'équilibre thermodynamique interne) ;
- enfin, les gaz s'échappent du cylindre à la pression constante  $P_1$  et un nouveau cycle recommence.

En négligeant la quantité de matière de carburant liquide, on assimilera l'air et les gaz brûlés à un gaz parfait dont le coefficient  $\gamma$  (rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant) vaut  $\gamma = 1,4$ .

1. Représenter, dans le diagramme de Clapeyron, le cycle de transformations A B C A des gaz (air ou gaz brûlés) dans le cylindre.
2. Calculer le travail  $W$  échangé par une mole de gaz au cours du cycle en fonction de  $\gamma$  et des températures  $T_1, T_2$  et  $T_3$ .
3. Le rendement  $r$  de ce moteur est par définition :

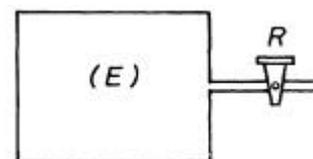
$$r = \frac{\text{Travail fourni par le moteur}}{\text{Transfert thermique reçu par le gaz pendant la combustion du carburant}}$$

Calculer ce rendement, d'abord en fonction de  $\gamma, T_1, T_2$  et  $T_3$ , puis en fonction de  $\gamma$  et du rapport des volumes  $a = \frac{V_2}{V_1}$ .

Calculer  $r$  pour  $a = 4$ .

**Exercice 14.**

L'enceinte (E), adiabatique et de volume constant  $V$ , est initialement vide. On ouvre le robinet R, et le gaz de l'atmosphère extérieure, de pression constante  $P$ , vient remplir l'enceinte (E) jusqu'à ce que la pression  $y$  soit égale à  $P$ . Calculer l'énergie interne  $U$  du gaz de l'enceinte dans l'état final en fonction de son énergie interne  $U_0$  et du volume  $V_0$  qu'il avait initialement dans l'atmosphère.



**Exercice 15 : détente de Joule-Gay Lussac.**

Un gaz vérifiant l'équation de Van der Waals possède l'énergie interne :

$$U = n C_{v,m} T - \frac{n^2 a}{V} + U_0$$

$n$  représente la quantité de matière,  $a$  est une constante caractéristique du gaz,  $C_{v,m}$  est la capacité thermique molaire à volume constant, supposée indépendante de  $T$  dans le domaine de température considéré et  $U_0$  est une constante additive (l'énergie interne, comme l'énergie potentielle d'interaction entre particules, est définie à une constante additive près).

Initialement, ce gaz se trouve dans les conditions suivantes :  $P_1 = 10^5$  Pa (très proche de la pression atmosphérique) et  $T_1 = 293$  K.

Au cours de la détente Joule-Gay Lussac, le volume du gaz double. Calculer la variation de température  $\Delta T$  correspondante.

On donne :  $C_{v,m} = 5R/2$  ;  $a = 0,14 \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2}$ .

**Récapitulatif.**

$C_V$  et  $C_p$  peuvent être mesurés par calorimétrie et décrivent partiellement les propriétés de l'énergie interne et de l'enthalpie d'un fluide.

Le tableau ci-dessous résume les propriétés de  $U, H, C_V, C_p$  et  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  pour différents modèles opérationnels de fluide :

	GPM	GP	Phase condensée
$U$	$U = \frac{3}{2} nRT$	$dU = C_V(T) dT$	$dU \approx C_V(T) dT$
$C_V$	$C_V = \frac{3}{2} nR$	$C_V(T) > \frac{3}{2} nR$	$C_p \approx C \approx C_V$
$H$	$H = \frac{5}{2} nRT$	$dH = C_p(T) dT$	$dH \approx C_p(T) dT$
$C_p$	$C_p = \frac{5}{2} nR$	$C_p(T) > \frac{5}{2} nR$	$C_p \approx C \approx C_V$
$C_p - C_V$	$C_p - C_V = nR$	$C_p - C_V = nR$	$C_p - C_V \approx 0$
$\gamma$	$\gamma = 5/3$	$\gamma(T)$	$\gamma \approx 1$

## Réponses.

### Exercice 1.

$$1) W = R T_0 \ln 2 \quad 2) W = -R T_0 \ln \frac{V_f - b}{V_i - b} + a \left( \frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f} \right).$$

### Exercice 2.

$$2.a) W = 0 \quad 2.b) W = \alpha P_0 V_0 (T_0 - T_1) \quad 2.c) W = \frac{\chi T V_0}{2} (P_1^2 - P_0^2).$$

### Exercice 3.

$$1) W = \frac{\chi T V}{2} (P_2^2 - P_1^2) = 5,13 \cdot 10^1 \text{ J} \quad 2) W_{qs} = P_1 V \ln \frac{P_2}{P_1} = 4,67 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

### Exercice 4.

$$W_1 = 2 R T_A \ln 3 = 5,48 \cdot 10^3 \text{ J} ; W_2 = \frac{8}{3} R T_A = 6,65 \cdot 10^3 \text{ J} ; W_3 = 4 R T_A = 9,98 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

### Exercice 5.

$$2.a) W_a = (k-1) P_0 V_0 \left[ \left( \frac{k+1}{2} \right) \chi T P_0 - \alpha T_0 \right] \quad 2.b) W_b = \frac{k^2 - 1}{2} P_0 V_0 (\chi T P_0 - \alpha T_0).$$

### Exercice 6.

$$1) Q_v = (M_C + M_O) \left[ A_0 (T_f - T_i) - A_1 \ln \frac{T_f}{T_i} - A_2 \left( \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_i} \right) \right] = 3,72 \cdot 10^3 \text{ J} \quad 2) \bar{c}_v = \frac{Q_v}{(M_C + M_O) (T_f - T_i)} = 1,33 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}.$$

### Exercice 7.

$$L_{r,t} = L_{r,m} + (c_l - c_s) (t - t_m) = 2,5 + 0,05 t \quad \text{pour } t \text{ en } ^\circ\text{C} \text{ et } L \text{ en } \text{cal.g}^{-1}.$$

### Exercice 8.

$$1) \theta = \theta_e + (\theta_0 - \theta_e) \exp\left(-\frac{a}{c} t\right) \quad 2) t_2 = t_1 \frac{\ln \frac{\theta_0 - \theta_e}{\theta_2 - \theta_e}}{\ln \frac{\theta_0 - \theta_e}{\theta_1 - \theta_e}} = 13,5 \text{ min}.$$

### Exercice 9.

$$1) \theta = \theta_1 + (\theta_0 - \theta_1) \exp\left(-\frac{k c}{\Gamma} t\right) \quad 2) \theta_2 = \frac{\Gamma \theta_0 + m c \theta_1}{\Gamma + m c} = 20,9^\circ \quad 3) c = \frac{\Gamma}{k t} \ln \frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta - \theta_1} = 3,37 \text{ cal.}^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} = 1,41 \cdot 10^4 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

### Exercice 10.

1) Compression isotherme à  $2 T_0$ , pression maximale atteinte  $2 P_0$ .

$$3) W_1 = -P_0 V_0 = -2,8 \cdot 10^3 \text{ J} ; Q_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 V_0 = 9,8 \cdot 10^3 \text{ J} ; W_2 = 2 P_0 V_0 \ln 2 = 3,9 \cdot 10^3 \text{ J} ; Q_2 = -2 P_0 V_0 \ln 2 = -3,9 \cdot 10^3 \text{ J} ;$$

$$W_3 = 0 \text{ et } Q_3 = -\frac{1}{\gamma-1} P_0 V_0 = -7,0 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

$$4) \Delta U_{\text{cycle}} = 0.$$

### Exercice 11.

$$Q = n R (T_2 - T_1) \frac{q - \gamma}{(\gamma - 1)(q - 1)} : 1) \text{ si } q > \gamma \text{ ou } q < 1 \text{ et } 2) \text{ si } 1 < q < \gamma.$$

### Exercice 12.

$$2) W = \frac{1}{\gamma-1} P_1 V_1 (2^{(\gamma-1)/\gamma} - 1) = 54,8 \text{ J}.$$

*Exercice 13.*

$$2) W = \frac{R}{\gamma-1} [T_3 - T_2 + (\gamma-1)(T_3 - T_1)] \cdot 3) r = 1 - \gamma \frac{T_3/T_1 - 1}{T_2/T_1 - 1} = r = 1 - \gamma \frac{a-1}{a^\gamma - 1} = 0,296 \approx 30 \% .$$

*Exercice 14.*

$$U = U_0 + P V_0 .$$

*Exercice 15.*

$$\Delta T = - \frac{a}{2 C_{v,m}} \frac{P_1}{R T_1} = - 0,14 \text{ K} .$$