Préparation au Concours Cycle Polytechnicien

Filière universitaire : candidats internationaux

(O.Granier, ITC, du 24 au 29 octobre 2011)

TD corrigés sur les ondes

1) Effet Doppler :

Selon la théorie du « Big Bang », l'Univers résulterait d'une grande explosion. Juste après cette explosion, l'Univers aurait été extrêmement dense et sa température très élevée. Conséquence de cette explosion, toutes les particules constituant l'Univers se fuient les unes des autres, conduisant à un abaissement de la densité et à une décroissance progressive de la température. Ce phénomène se poursuit de nos jours et porte le nom d'expansion universelle.

En 1925, Edwin Hubble découvrit l'existence d'autres galaxies que la nôtre dans l'Univers. Hubble constata que le spectre d'émission de l'hydrogène des galaxies était plus ou moins décalé vers le rouge comparativement à celui observé sur Terre. En 1929, il proposa d'interpréter ce décalage comme une manifestation de l'effet Doppler, ce qui introduisait l'hypothèse que les galaxies se déplacent. En mesurant la distance D de ces galaxies à la Terre il put établir une loi empirique reliant la vitesse de fuite v de celles-ci à leur éloignement. Cette loi porte le nom de loi de Hubble :

$$v = HD \qquad \text{(où H est une constante baptisée constante de Hubble)}$$

Le but de cet exercice est de présenter de manière classique l'effet Doppler puis d'utiliser la loi de Hubble pour déterminer la distance à la Terre d'une galaxie.

On considère une source (S) émettant des éclairs lumineux infiniment brefs vers un récepteur ponctuel (R). Les éclairs sont émis selon un régime périodique de période T_e. On raisonne dans le référentiel (Rxyz) lié à (R). Les éclairs se propagent vers (R) à la vitesse $\vec{c}$ constante. (S) se déplace à la vitesse $\vec{v}_S$ constante. On se place dans le cas où $v_S << c$. A la date t = 0, (S) occupe la position S_0 de coordonnées $(x_0,0,0)$ et émet un éclair.

1. On suppose que (S) se déplace dans la direction (Rx). On note alors $\vec{v}_S = v_S \vec{u}_x$ où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe (Rx) et v_S la valeur algébrique de $\vec{v}_S$.

a) Montrer que (R) reçoit les éclairs successifs à des intervalles de temps séparés de la durée T_r. Déterminer T_r en fonction de T_e, v_S et c.

b) En déduire la fréquence f_r de réception en fonction de la fréquence d'émission f_e, de v_S et de c. Commenter les résultats précédents à partir d'un exemple concret courant mettant en évidence cet effet Doppler.

2. On suppose que $\vec{v}_S$ fait un angle θ avec l'axe (Rx). Déterminer la durée T_r séparant la réception des éclairs successifs ; montrer que l'on retrouve le résultat précédent à condition de faire une hypothèse d'éloignement à préciser et de faire intervenir la vitesse radiale v_r.

3. Application à l'astrophysique : on analyse la lumière provenant de la galaxie Virgo A avec un spectroscope. On détecte alors dans le spectre la séquence de l'hydrogène, mais on mesure la longueur d'onde dans le vide de la raie H_β à la valeur $\lambda_r = 487{,}9\ nm$, au lieu de $\lambda_e = 486{,}1\ nm$ pour une lampe à vapeur d'hydrogène immobile dans le référentiel du laboratoire. La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$. Calculer la vitesse radiale v_r de la galaxie Virgo A. Pourquoi parle-t-on de décalage vers le rouge ?

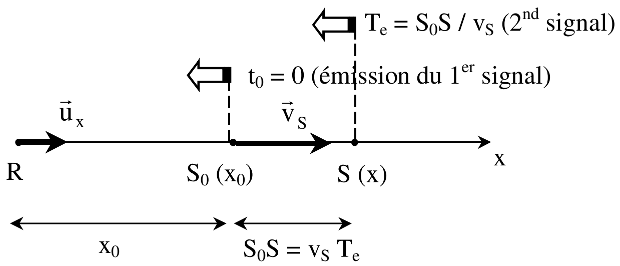
4. Hubble a proposé une loi donnant la vitesse radiale v_r d'éloignement de deux galaxies en fonction de la distance D qui les sépare : $v_r = HD$, où H est la «constante» de Hubble, dont la valeur évolue lors de l'expansion de l'Univers et qui est estimée actuellement à $H = 2{,}4.10^{-18}\ s^{-1}$.

a) Calculer en années de lumière (al) la distance actuelle D_0 nous séparant de la galaxie Virgo A.

b) En supposant que H conserve sa valeur actuelle, déterminer au bout de combien d'années cette distance aura doublé.

Solution :

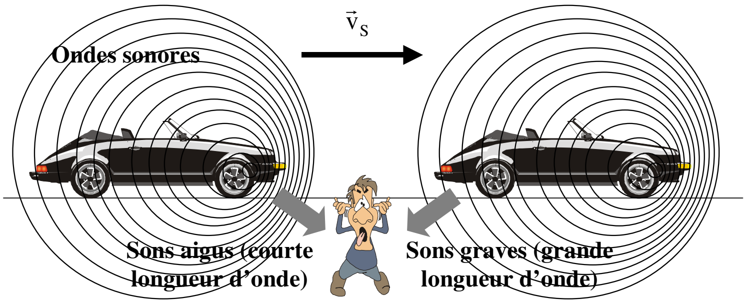
1-a) A l'instant $t = 0$, la source est en S_0 et émet un 1^er^ signal lumineux. A l'instant T_e, la source est en S et émet un 2^nd^ signal (avec $\overrightarrow{S_0S} = T_e\vec{v}_S$, en supposant la vitesse de la source constante pendant la durée d'émission du signal).



L'observateur (au point R) reçoit le 1^er^ signal à l'instant $t_1 = x_0 / c$ et le 2^nd^ à l'instant $t_2 = T_e + x / c$ et mesure par conséquent une période $T_r = t_2 - t_1 = T_e + (x - x_0)/c$, soit $T_r = T_e + v_S T_e / c$, ou encore :

$$T_r = (1 + v_S / c)T_e$$

b) On en déduit directement $f_r = f_e /(1 + v_S / c)$. Une manifestation courante de l'effet Doppler est donnée par le bruit d'un moteur de voiture. Quand la voiture se dirige vers l'observateur (immobile dans le référentiel terrestre), la période du son émis par le moteur est plus faible que lorsque la voiture est à l'arrêt et le bruit du moteur semblera alors plus aigu (la fréquence étant plus élevée qu'à l'arrêt). Par contre, quand la voiture s'éloignera de l'observateur après l'avoir croisé, le bruit du moteur paraîtra plus grave qu'à l'arrêt. La figure suivante illustre ces conclusions :



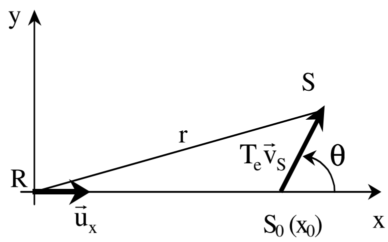
2. Le raisonnement est semblable à celui utilisé à la question (1-a). L'observateur (au point R) reçoit le 1er signal à l'instant $t_1 = x_0 / c$ et le 2nd à l'instant $t_2 = T_e + r/c$ et mesure ainsi une période $T_r = t_2 - t_1 = T_e + (r - x_0)/c$. En exprimant que :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS_0} + \overrightarrow{S_0S} = x_0\vec{u}_x + T_e\vec{v}_S$$

On peut évaluer :

$$r^2 = x_0^2 + (T_e v_S)^2 + 2x_0 T_e v_S \cos\theta \quad \text{soit} \quad r = x_0\left(1 + 2\frac{T_e v_S}{x_0}\cos\theta + \frac{(T_e v_S)^2}{x_0^2}\right)^{1/2}$$

Si l'on suppose que $T_e v_S \ll x_0$ (le déplacement de la source est très faible devant x_0, qui mesure l'éloignement de la source à l'observateur), on peut écrire, au premier ordre en $(T_e v_S / x_0)$:



$$r \approx x_0\left(1 + \frac{T_e v_S}{x_0}\cos\theta\right) = x_0 + T_e v_S \cos\theta$$

La période mesurée par l'observateur est alors :

$$T_r = T_e + \frac{1}{c}(T_e v_S \cos\theta) = (1 + \frac{v_S}{c}\cos\theta)T_e$$

On obtient une expression identique à celle trouvée à la question (1-a) à condition de faire intervenir la vitesse radiale $v_r = v_S \cos\theta$ le long de l'axe (RS_0).

3. Comme $\lambda_e = cT_e$ et $\lambda_r = cT_r$, il vient $\lambda_r = (1 + v_r / c)\lambda_e$: $\lambda_r > \lambda_e$, le spectre en longueur d'onde se décale vers les grandes longueurs d'onde (« décalage vers le rouge »). La vitesse radiale est donnée par $v_r = [(\lambda_r - \lambda_e)/\lambda_e]c$, soit numériquement, $v_r \approx 1{,}1.10^6\,\text{m.s}^{-1}$, soit $v_r \approx 1100\,\text{km.s}^{-1}$.

Remarque : on vérifie bien que le déplacement radial de la source lumineuse pendant une période T_e, soit $v_r T_e = \lambda_e v_r / c \approx \lambda_e / 270$, est bien négligeable vis-à-vis des distances intergalactiques considérées ici !

4-a) La loi de Hubble donne directement $D_0 = v_r / H = 4{,}6.10^{20}\,\text{km} = 4{,}8.10^7\,\text{al}$, soit environ 50 millions d'années de lumière (valeur à comparer avec le diamètre de la galaxie Virgo A, estimé à 40 milliers d'années de lumière).

b) Si l'on écrit que $v_r = dD/dt$, alors la loi de Hubble permet d'aboutir à l'équation différentielle suivante vérifiée par la distance D entre la galaxie et la Terre : $dD/dt = HD$. En supposant que la « constante » de Hubble garde sa valeur actuelle entre l'instant $t = 0$ et l'instant t_f pour lequel la distance $D = 2D_0$, alors :

$$\frac{dD}{D} = Hdt \quad \text{donne} \quad \ln 2 = Ht_f \quad \text{soit} \quad t_f = \frac{\ln 2}{H}$$

Numériquement, $t_f = 2{,}9.10^{17}\,s = 9{,}2.10^{9}$ années, soit 9,2 milliards d'années ! Cette durée, comparable à l'âge de l'Univers, n'est certainement pas compatible avec l'hypothèse d'une constante de Hubble effectivement constante dans le temps !

2) Champ rayonné par une plaque de courants :

Dans le plan $z = 0$, des courants surfaciques $\vec{j}_s = j_s^0 \exp(i(\omega t - \alpha x))\vec{u}_y$ (avec $\alpha < \omega / c$) engendrent un champ EM dans tout l'espace. Partout ailleurs, l'espace est vide.

a) Trouver la densité surfacique de charges σ portée par le plan $z = 0$ à l'aide d'une équation de conservation de la charge surfacique.

b) Expliquer pourquoi on peut chercher le champ électrique sous la forme : $\vec{E} = f(z)\exp(i(\omega t - \alpha x))\vec{u}_y$

c) Trouver l'équation vérifiée par la fonction f et la résoudre. On pose $\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}$.

d) Quelle est la forme du champ électrique pour $z > 0$ et $z < 0$ (on écrira le champ sous la forme de la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques) ? Vu le problème, éliminer une des deux ondes dans chaque demi-espace.

e) Conclure en utilisant les relations de passage pour les champs.

f) Quelle est la relation entre le module du vecteur d'onde et la pulsation ?

Solution :

a) Par analogie avec l'équation de conservation de la charge volumique, on obtient : $div\vec{j}_s + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$

Or, $\vec{j}_s = j_s^0 \exp(i(\omega t - \alpha x))\vec{u}_y$, donc $div\vec{j}_s = 0$, donc $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, soit σ = cste = 0 (on élimine les solutions constantes).

b) On cherche des solutions de la forme $\vec{E} = f(z)\exp(i(\omega t - \alpha x))\vec{u}_y$: le terme de phase est le même que celui des courants. La fonction f(z) permet de prendre en compte la distance au plan. Il y a de plus invariance par translation des sources le long de (Oy), ce qui explique que cette variable n'intervienne pas dans l'expression des champs.

Les plans y = cste sont des plans d'antisymétrie des sources. Le champ électrique est donc perpendiculaire à ces plans et est donc selon (Oy).

c) En dehors du plan, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert : $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

On obtient donc : $f''(z)e^{i(\omega t-\alpha x)}+\frac{\omega^2}{c^2}f(z)e^{i(\omega t-\alpha x)}=0$

d'où : $f''(z)e^{i(\omega t-\alpha x)}-\alpha^2 f(z)e^{i(\omega t-\alpha x)}+\frac{\omega^2}{c^2}f(z)e^{i(\omega t-\alpha x)}=0$

Soit : $f''(z)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\alpha^2\right)f(z)=0$

Comme $\beta^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\alpha^2>0$, les solutions de cette équation différentielle sont : $f(z)=Ae^{i\beta z}+Be^{-i\chi z}$

d) Le champ électrique devient : $\vec{E}=\left(Ae^{i(\omega t-\alpha x+\beta z)}+Be^{i(\omega t-\alpha x-\beta z)}\right)\vec{u}_y$

On remarque que le champ électrique s'écrit comme la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques, de vecteur d'onde :

$$\vec{k}_1\begin{vmatrix}\alpha\\0\\-\beta\end{vmatrix}\qquad et \qquad \vec{k}_2\begin{vmatrix}\alpha\\0\\\beta\end{vmatrix}$$

Le 1er vecteur d'onde correspond à une onde qui se propage vers les x > 0 et vers les z < 0 : cette onde est donc solution pour z < 0 :

Pour z < 0 : $\vec{E}=Ae^{i(\omega t-\alpha x+\beta z)}\vec{u}_y$

Le 2nd vecteur d'onde correspond à une onde qui se propage vers les x > 0 et vers les z > 0 : cette onde est donc solution pour z > 0 :

Pour z > 0 : $\vec{E}=Be^{i(\omega t-\alpha x-\beta z)}\vec{u}_y$

e) Le champ électrique est tangentiel, par conséquent, en z = 0, on déduit A = B.

La condition de passage pour le champ magnétique est : $\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{1\to 2}$

On calcule les champs magnétiques à l'aide de la relation de structure :

Pour z > 0 :

$$\vec{B}=\frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}\alpha\\0\\\beta\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\Ae^{i(\omega t-\alpha x-\beta z)}\\0\end{vmatrix}=\frac{A}{\omega}\begin{vmatrix}-\beta\\0\\\alpha\end{vmatrix}e^{i(\omega t-\alpha x-\beta z)}$$

Pour z < 0 :

$$\vec{B}=\frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}\alpha\\0\\-\beta\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\Ae^{i(\omega t-\alpha x+\beta z)}\\0\end{vmatrix}=\frac{A}{\omega}\begin{vmatrix}\beta\\0\\\alpha\end{vmatrix}e^{i(\omega t-\alpha x+\beta z)}$$

La condition de passage donne :

$$-\frac{2A\beta}{\omega} = \mu_0 j_s^0 \qquad soit \qquad A = -\frac{\omega \mu_0 j_s^0}{2\beta}$$

La constante A est ainsi connue.

f) La relation demandée est : $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\omega}{c}$ (relation caractéristique d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide).

3) Onde dans le vide :

On a l'onde électromagnétique dans le vide : $\vec{E} = E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\,\vec{u}_y$

1- L'onde correspondante est-elle plane ? Progressive ? Harmonique ? Justifier. A quoi cela vous fait-il songer ?

2- Calculer le champ magnétique.

3- Y a-t-il dispersion ?

Solution :

1) C'est une onde qu'on peut rencontrer dans un guide d'ondes. Elle n'est pas plane, mais progressive et harmonique.

2) On calcule le champ magnétique à partir de l'équation de MF. On trouve :

$$B_x = \frac{E_0 \alpha}{\omega} \sin \alpha z \cos(\omega t - kx)$$
$$B_z = \frac{k E_0}{\omega} \cos \alpha z \sin(\omega t - kx)$$

3) On détermine la relation de dispersion ; pour cela, on peut utiliser l'équation de MA ou l'équation de propagation du champ électrique dans le vide (équation de d'Alembert). On trouve :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$$

Il y a dispersion avec une vitesse de phase qui vaut : $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2}}}$.

4) Superposition d'ondes planes. Interférences :

On étudie la structure de l'onde résultant de la superposition dans le vide de deux ondes électromagnétiques planes de même pulsation ω, de même amplitude E_m, polarisées rectilignement suivant Oy. Elles se propagent selon deux directions, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, contenues dans le plan Oxz et telles que $(\vec{u}_z, \vec{u}_1) = \theta$ et $(\vec{u}_z, \vec{u}_2) = -\theta$.

1- Établir l'expression du champ électrique résultant $\vec{E}$. Quelle est sa vitesse de phase v_φ ? L'onde est-elle plane ?

2- Déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.

3- Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting et étudier l'éclairement d'une surface perpendiculaire à $\langle \vec{R} \rangle$.

Solution :

L'onde 1 a pour vecteur d'onde $\vec{k}_1 = k_0\vec{u}_1 = k_0(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z)$ (avec $k_0 = \omega / c$) et son champ électrique est donc :

$$\vec{E}_1 = E_m \exp[j(\omega t - k_0(x\sin\theta + z\cos\theta)]\vec{u}_y$$

De même pour l'onde 2, $\vec{k}_2 = k_0\vec{u}_2 = k_0(-\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z)$ et :

$$\vec{E}_2 = E_m \exp[j(\omega t - k_0(-x\sin\theta + z\cos\theta)]\vec{u}_y$$

Le champ électrique résultant est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_m \cos(k_0 x\sin\theta)\exp[j(\omega t - k_0 z\cos\theta]\vec{u}_y$$

Ce champ est polarisé rectilignement selon Oy et se propage dans le sens des z croissants. Son amplitude varie selon Ox ; il n'est donc plus uniforme dans un plan d'onde. Sa vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_0\cos\theta} = \frac{c}{\cos\theta} > c$$

2) 1ère méthode : on détermine les deux champs magnétiques associés à chacun des champs magnétiques par la relation de structure $\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{c}$ et on les ajoute. On obtient :

$$\vec{B} = \frac{2E_m}{c}[-\cos\theta\cos(k_0 x\sin\theta)\vec{u}_x + j\sin\theta\sin(k_0 x\cos\theta)\vec{u}_z]\exp^{j(\omega t - k_0 z\cos\theta)}$$

2ème méthode : on utilise le champ résultant et l'équation de MF :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

3) La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right) = \frac{2E_m^2}{\mu_0 c}\cos\theta\cos^2(k_0 x\sin\theta)\vec{u}_z$$

L'énergie est donc globalement transportée dans la direction de propagation. Effectivement, les résultats précédents montrent que l'onde résultante est stationnaire selon Ox et progressive selon Oz.

Dans un plan z = cste, l'éclairement n'est pas uniforme. Si la fréquence de l'onde EM se situe dans le spectre visible, on observe une série de franges rectilignes parallèles à (Oy), alternativement brillantes et noires, dont la période (l'interfrange) est :

$$i = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

5) Onde dans le vide :

On a l'onde électromagnétique dans le vide : $\vec{E} = E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\,\vec{u}_y$

1- L'onde correspondante est-elle plane ? Progressive ? Harmonique ? Justifier. A quoi cela vous fait-il songer ?

2- Calculer le champ magnétique.

3- Y a-t-il dispersion ?

Solution :

1) C'est une onde qu'on peut rencontrer dans un guide d'ondes. Elle n'est pas plane, mais progressive et harmonique.

2) On calcule le champ magnétique à partir de l'équation de MF. On trouve :

$$B_x = \frac{E_0\alpha}{\omega}\sin\alpha z\cos(\omega t - kx)$$
$$B_z = \frac{kE_0}{\omega}\cos\alpha z\sin(\omega t - kx)$$

3) On détermine la relation de dispersion ; pour cela, on peut utiliser l'équation de MA ou l'équation de propagation du champ électrique dans le vide (équation de d'Alembert). On trouve :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$$

Il y a dispersion avec une vitesse de phase qui vaut : $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\alpha^2 c^2}{\omega^2}}}$.

6) Propagation d'une onde dans le plasma interstellaire :

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m, de charge électrique - e, de densité particulaire n, et d'ions de charge électrique q et densité particulaire N. La densité de charge totale est nulle. Le mouvement des ions est négligé et celui des électrons, non relativistes, est décrit par le vecteur $\vec{v}$.

Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de Maxwell (à l'exclusion de champs statiques) sous la forme d'ondes planes monochromatiques de vecteur d'onde $\vec{k}$, dont le champ électrique est noté :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}$$

1- Montrer que le champ magnétique de l'onde est aussi décrit par une onde plane de même pulsation et vecteur d'onde.

Quelle est la structure du trièdre ($\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$) de l'onde ?

2- Déterminer l'amplitude $\vec{j}_{v0}$ du vecteur densité volumique de courant $\underline{\vec{j}_v}$ de l'onde $\underline{\vec{j}}_v(\vec{r},t) = \vec{j}_{v0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}$ en fonction de celle du champ électrique de l'onde.

3- En étudiant le mouvement des électrons, exprimer la constante α telle que $\underline{\vec{j}}_v = -i\frac{\alpha}{\omega}\vec{E}$.

4- En déduire la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ liant la pulsation de l'onde et la norme de son vecteur d'onde.

5- En posant $\alpha = \varepsilon_0 c^2 K^2$, calculer les vitesses de phase et de groupe de l'onde en fonction de k et K. Quelle est la relation liant ces vitesses ?

6- Deux trains d'ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par un objet stellaire situé à distance L. En supposant $K^2\lambda_2^2$ et $K^2\lambda_1^2 \ll 1$, montrer que ces signaux sont reçus avec un décalage $\delta t = t_2 - t_1$ à déterminer en fonction de L, K, c et des longueurs d'onde λ_1 et λ_2.

Solution :

1) On calcule le champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell – Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad soit \qquad -i\vec{k}\wedge\vec{E} = -i\omega\vec{B} \qquad \text{soit : } \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}.$$

Le champ magnétique de l'onde est bien décrit par une onde plane de même pulsation et vecteur d'onde.

Comme $div\vec{B} = div\vec{E} = 0$, le champ EM est transverse et la structure du trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ de l'onde est directe (comme dans le vide).

2) L'équation de Maxwell – Ampère donne : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Soit : $-i\vec{k}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{i\omega}{c^2}\vec{E} \qquad soit \qquad \mu_0\vec{j} = -i\vec{k}\wedge(\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}) - \frac{i\omega}{c^2}\vec{E}$

D'où : $\mu_0\vec{j} = i\frac{k^2}{\omega}\vec{E} - i\frac{\omega}{c^2}\vec{E} \qquad ; \qquad \vec{j} = \frac{i\omega}{\mu_0 c^2}\left(-1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\vec{E} = i\varepsilon_0\omega\left(-1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\vec{E}$

3) Ces champs agissent sur les électrons du plasma et les mettent en mouvement. L'équation du mouvement d'un électron est : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\,\vec{E} - e\,\vec{v}\wedge\vec{B}$

En admettant que (comme pour une onde dans le vide) $\frac{B}{E}\approx\frac{1}{c}$, on voit que, tant que les ions ne sont pas relativistes :

$$\left\|e\,\vec{v}\wedge\vec{B}\right\| << eE$$

On pourra ainsi négliger la force magnétique vis-à-vis de la force électrique pour étudier le mouvement des électrons :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\,\vec{E}$$

Le vecteur densité de courant est, en négligeant la contribution des protons (beaucoup plus lourds que les électrons) :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \qquad soit \qquad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

En notation complexe : $i\omega\vec{j} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$ $\quad soit \quad$ $\vec{j} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}$ (On a ainsi $\alpha = \frac{ne^2}{m}$.)

4) En identifiant les deux expressions de $\vec{j}$: $\vec{j} = i\varepsilon_0\omega\left(-1+\frac{k^2}{\omega^2}\right)\vec{E} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}$

On obtient la relation de dispersion : $\varepsilon_0\omega\left(-1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right) = -\frac{ne^2}{m\omega}$ $\quad soit \quad$ $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$

où $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ est la pulsation plasma.

5) On note que $K^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$; la relation de dispersion devient alors simplement : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K^2$

On suppose qu'il y a propagation, par conséquent $k > 0$, *soit* $\frac{\omega}{c} > K$. La vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - K^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{c^2K^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de groupe s'obtient en différentiant la relation de dispersion :

$$2kdk = 2\frac{\omega}{c^2}d\omega \qquad soit \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1-\frac{c^2K^2}{\omega^2}}$$

6) Les trains d'ondes se déplacent à la vitesse de groupe ; l'intervalle de temps entre la réception des trains est donc :

$$\delta t = L\left(\frac{1}{v_{g_2}} - \frac{1}{v_{g_1}}\right) = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2K^2}{\omega_2^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2K^2}{\omega_1^2}}}\right) \qquad \text{avec } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} :$$

$$\delta t = L\left(\frac{1}{v_{g_2}} - \frac{1}{v_{g_1}}\right) = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda_2^2K^2}{4\pi^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda_1^2K^2}{4\pi^2}}}\right)$$

On peut faire un DVL :

$$\delta t = \frac{L}{c}\left(\left(1-\frac{\lambda_2^2K^2}{8\pi^2}\right) - \left(1-\frac{\lambda_1^2K^2}{8\pi^2}\right)\right) = \frac{LK^2}{8\pi^2c}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

7) Oscillation et pulsation de plasma :

Le but de cet exercice est d'introduire simplement la grandeur ω_P, pulsation plasma.

On considère un plasma gazeux, globalement neutre, comprenant placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge -e susceptibles de se déplacer. On néglige par ailleurs l'agitation thermique et le poids. Soit n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène. On envisage suivant l'axe Oz, un petit déplacement d'ensemble $\xi(z,t)$ des électrons situés en z quand le plasma est au repos.

1- En raisonnant sur une tranche (comprise entre z et z + dz quand le plasma est au repos) donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement; on supposera $\partial\xi/\partial z$ petit devant 1.

En déduire alors la densité de charge totale ρ du plasma.

2- Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}$ et que sous l'action de ce champ les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n\,e^2}{\varepsilon_0\,m}}$$

Solution :

1) Le volume occupé par une tranche devient :

$$dV = nS\big((dz + \xi(z+dz,t) - \xi(z,t)\big) = nSdz\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$

La nouvelle densité de charges devient : $n = \dfrac{nSdz}{dV} = n/\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) \approx n\left(1-\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)$

La densité de charge totale est donc : $\rho = -ne\left(1-\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) + ne = ne\dfrac{\partial\xi}{\partial z}$

2) L'équation de MG montre qu'il apparaît un champ électrique donné par :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad soit \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{ne}{\varepsilon_0}\frac{\partial\xi}{\partial z} \quad donc \quad E(z,t) = \frac{ne}{\varepsilon_0}\xi(z,t)$$

Un électron est alors soumis à la force : $m\ddot{z} = -eE \quad soit \quad \ddot{z} = -\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}\xi$

Les électrons effectuent bien des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

8) Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique :

Le demi-espace z < 0 étant conducteur parfait, on envisage une onde électromagnétique dans le demi-espace z > 0 vide de la forme :

$\vec{E} = E_0 \sin(\alpha z)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$; $\vec{B} = \frac{\alpha E_0}{\omega}\cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x + \frac{kE_0}{\omega}\sin(\alpha z)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$ 1- On suppose $\omega > c\ \alpha$. Exprimer la relation de dispersion liant k et ω, puis la vitesse de phase $v\varphi = \omega/k$. Commenter.

2. Exprimer la moyenne spatio-temporelle du vecteur de Poynting et la moyenne spatio-temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

3. En déduire la vitesse moyenne de propagation de l'énergie v_e et commenter.

4 - Déterminer la densité de charge ainsi que les courants à la surface du conducteur.

Solution :

a) A la surface, le champ électrique est nulle : par conséquent, $\sigma = 0$. Le champ magnétique vaut, toujours à la surface : $\vec{B} = \frac{\alpha E_0}{\omega}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x$.

La relation de passage, $\vec{B} = \frac{\alpha E_0}{\omega}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$, conduit à $\vec{j}_s = \frac{\alpha E_0}{\mu_0 \omega}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_y$

1) Le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert, d'où on déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$$

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k} > 1$ et la vitesse de groupe, $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, que l'on obtient en différentiant la relation de dispersion : $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$, *soit* $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} < 1$. Finalement :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2}}} \qquad et \qquad v_g = c\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2}}$$

2) Après calculs :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{kE_0^2}{4\mu_0 \omega}\vec{u}_x \qquad et \qquad \langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8} + \frac{(\alpha^2 + k^2)E_0^2}{8\mu_0 \omega^2} = \frac{\varepsilon_0}{4}E_0^2$$

3) Un bilan énergétique donne : $\langle u_{em} \rangle v_E dt = \langle \Pi \rangle dt \qquad soit \qquad v_E = \frac{\langle \Pi \rangle}{\langle u_{em} \rangle} = v_g$

4) A la surface, le champ électrique est nulle : par conséquent, $\sigma = 0$.

Le champ magnétique vaut, toujours à la surface : $\vec{B} = \frac{\alpha E_0}{\omega}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x$.

La relation de passage, $\vec{B} = \frac{\alpha E_0}{\omega}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$, conduit à $\vec{j}_s = \frac{\alpha E_0}{\mu_0 \omega}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_y$

9) Pression de radiation.

A. Étude corpusculaire :

Une onde plane progressive O_1 se propageant dans le vide est réfléchie normalement par un miroir parfaitement conducteur. Exprimer en fonction de la densité d'énergie w_1 de l'onde incidente la presslon $\overline{\omega} = \frac{dF}{dS}$ que subit le miroir. On supposera que les photons subissent des chocs élastiques; on rappelle que la quantité de mouvement d'un photon d'énergie W est $p = \frac{W}{c}$

B. Étude électromagnétique :

1- L'onde incidente O_1 est caractérisée par le champ électrique:

$$\vec{E_1} = E_0 \cos(\omega t + k x) \vec{u_y}$$

Déterminer le champ $\vec{B_1}$ de cette onde ainsi que la moyenne temporelle $<w_1>$ de sa densité d'énergie. Calculer les champs de l'onde réfléchie O_2.

2- Calculer la densité $\vec{i}$ des courants superficiels qui parcourent le miroir. Montrer qu'un élément d'aire dS du miroir subit une force:

$$\vec{dF} = \frac{1}{2} \vec{i} \wedge \vec{B} \, dS$$

3- Calculer la moyenne temporelle $< \overline{\omega} >$ de $\overline{\omega} = \frac{dF}{dS}$ et vérifier que l'on a bien $< \overline{\omega} > = 2 <w_1>$.

10) Réflexion sur un plan métallique :

Une onde plane progressive monochromatique (de pulsation ω) se réfléchit en incidence normale sur un plan métallique parfaitement conducteur. (On admettra que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls au sein du métal.

1. Quels sont les champs réfléchis et les champs totaux ?

2. Que se passe-t-il dans le plan métallique ?

3. L'onde est polarisée circulairement, calculer le vecteur de Poynting associé aux champs totaux.

11) Effet de peau :

On considère un métal de conductivité σ pour lequel on cherche une solution des équations de Maxwell correspondant à des champs sinusoïdaux de pulsation ω. On sait que, dans un métal, le courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. De façon plus précise, on cherche pour le champ électrique une expression de la forme : $\vec{E} = E_0 f(x) \exp i(kx - \omega t) \vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ désigne le vecteur unitaire de l'axe Oz parallèle à la surface du métal et f(x) une fonction de la profondeur x à l'intérieur du métal que l'on va déterminer.

a) A partir de l'expression du champ **E**, déterminer le champ magnétique **B**. Vérifier que div**E**=0 et div**B**=0.

b) En négligeant le courant de déplacement, déterminer une équation différentielle vérifiée par f(x) et montrer que : f(x) = Aexp(- x / δ). Donner les expressions de δ puis de k.

Pour le cuivre : $\sigma=5{,}8.10^{7}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$. Calculer δ pour différentes fréquences (10^2 Hz, 10^3 Hz, 10^4 Hz et 10^5 Hz).

Solution :

On peut, à partir de l'expression du champ **E**, déterminer le champ magnétique **B**. En effet, l'équation de Maxwell-Faraday permet de déterminer B :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 f(x) e^{i(kx-\omega t)} \end{pmatrix} = i\omega\vec{B} \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(E_0 f(x) e^{i(kx-\omega t)}\right)\vec{u}_y = i\omega\vec{B}$$

D'où l'expression du champ B :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} E_0\left(-kf(x) + if'(x)\right) e^{i(kx-\omega t)}\ \vec{u}_y$$

On vérifie aisément que ces deux champs vérifient les équations de Maxwell-Flux et de Maxwell-Gauss :

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad et \qquad div\ \vec{E} = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère, en négligeant le courant de déplacement, s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

On en déduit l'équation :

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \sigma E$$

Soit :

$$\frac{1}{\omega} E_0(-kf'(x) + if''(x) - ik^2 f(x) - kf'(x))e^{i(kx-\omega t)} = \mu_0 \sigma E_0 f(x) e^{i(kx-\omega t)}$$

$$-2kf'(x) + i(f''(x) - k^2 f(x)) = \mu_0 \sigma\omega f(x)$$

On en déduit deux équations différentielles :

$$-2kf'(x) = \mu_0\sigma\omega\ f(x) \qquad et \qquad f''(x) - k^2 f(x) = 0$$

qui s'intègrent en :

$$f(x) = Ae^{-\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k}x} \qquad et \qquad f(x) = Ae^{-kx}$$

(Pour la deuxième solution, on a éliminé la solution en exponentielle croissante).

Par identification, on déduit :

$$k = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2k} \qquad soit \qquad \delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

δ est la longueur de pénétration dans le métal. Pour le cuivre ($\sigma = 5{,}8.10^{7}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$), on calcule δ pour différentes fréquences :

Fréquence	Longueur de pénétration
50 Hz	3 mm
50 MHz	3 □m
50 THz	3 nm

Lorsque la pulsation augmente, la profondeur de pénétration diminue comme l'inverse de la racine carrée de la pulsation. Pour un métal parfait, la conductivité est infinie et la profondeur de pénétration devient nulle : une onde EM ne peut pénétrer dans un métal parfait (elle s'y réfléchit).

Les résultats obtenus restent valables pour une géométrie cylindrique ; ainsi, un câble cylindrique homogène de section droite circulaire ne peut être parcouru par des courants que dans un zone cylindrique superficielle d'épaisseur quelques δ. Il ne sert à rien pour transporter un courant électrique sinusoïdal d'utiliser un câble en cuivre de rayon nettement supérieur à δ.

12) Deux cordes vibrantes reliées :

Deux cordes vibrantes sont reliées bout à bout en x = 0.

1. Retrouver l'équation de propagation d'une onde transversale sur une corde. Quels sont les paramètres à introduire ?

2. Quelles sont les conditions aux limites en x = 0 ?

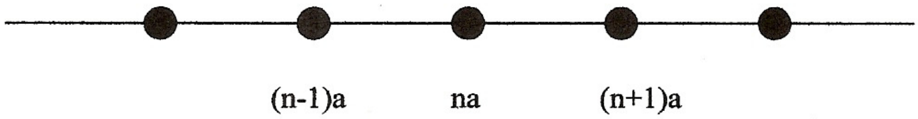
3. On suppose qu'il existe une onde incidente et une onde réfléchie sur la première corde, et seulement une onde transmise sur la deuxième. Trouver les coefficients de réflexion et de transmission en x = 0.

4- On considère une corde faite d'un seul morceau de masse linéique uniforme µ. En O, d'abscisse x = 0, on a attaché une perle (enfilée sur la corde) de masse m. Une onde incidente arrive du côté x < 0. Expression de l'onde réfléchie ? Cas où m -> ∞.

13) Propagation du son dans un solide :

1°) Citer un exemple prouvant que le son se propage dans les solides.

Soit un cristal à une dimension formé d'une suite d'atomes de masse m et distants de a.



On appelle u_n le déplacement longitudinal de l'atome d'indice n par rapport à sa position d'équilibre. On admettra que chaque atome n'est soumis qu'à l'interaction de ses 2 proches voisins.

Pour des déplacements faibles (ce qui est le cas ici) on admettra que les interactions se ramènent à des forces de rappel élastique de constante β où ce qui est équivalent qu'entre deux atomes il existe un ressort de masse nulle et de constante de raideur β.

2°) Ecrire l'équation du mouvement de l'atome de rang n, liant u_n aux déplacements u_{n-1} et u_{n+1} de ses voisins.

On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales pouvant se propager dans cette chaîne. En notation complexe elles sont caractérisées par : $\underline{u}_n = Ae^{j(\omega t - kna)}$.

3°) Déterminer la relation de dispersion $\omega(k)$.
Tracer cette relation dans l'intervalle $[-\pi / a, \pi / a]$.
Justifier le choix de cet intervalle.

4°) Donner la pulsation maximale ω_{max} des ondes pouvant se propager le long de la chaîne.
Comment vibrent deux atomes voisins ?

Pour la suite de l'exercice on se place dans le cas des **pulsations faibles** ($\omega << \omega_{max}$).

5°) Quelle est l'expression de la vitesse de propagation du son ?
Comparer λ et a et indiquer comment vibrent deux atomes voisins.

6°) On applique une force F sur une barre de section S de ce cristal parallèlement aux chaînes ; l'allongement relatif de la barre est $\gamma = \frac{\Delta l}{l}$.

Montrer que $F = \frac{S}{a^2} f$ où f est la force qui s'exerce sur une chaîne d'atomes.

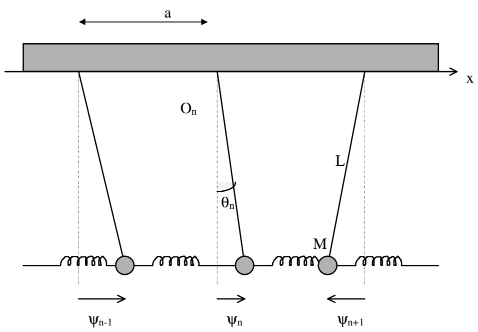
7°) Exprimer la vitesse du son en fonction de F, a, S, γ et m la masse d'un atome du cristal.

8°) Le résultat obtenu pour le cristal dans les conditions d'étude est $v = 4500\,m.s^{-1}$.
Comparer ce résultat avec la vitesse du son dans un gaz ou dans un liquide.

14) Equation de propagation de Klein-Gordon :

On étudie la propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse M et de longueur L, couplés par des ressorts de constante K, représentés sur la figure ci-dessous :

On notera $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ et $\Omega_0 = \sqrt{g/L}$.



a) Quelle est l'équation de propagation liant les petits déplacements $\psi_n \approx L\theta_n$, ψ_{n-1} et ψ_{n+1} des extrémités des pendules ?

b) Quelle est la relation de dispersion des ondes progressives monochromatiques caractérisant cette propagation ?

c) Représenter la relation de dispersion en précisant la bande permise pour les pulsations d'oscillations libres de la chaîne de pendules couplés.

d) Préciser la forme prise par ces résultats dans l'approximation des milieux continus.

Solution :

a) Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule (n) donne : $ML^2\ddot{\theta}_n = -MgL\theta_n + KL(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$

D'où l'équation de propagation : $\ddot{\theta}_n = -\Omega_0^2\theta_n + \omega_0^2(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$

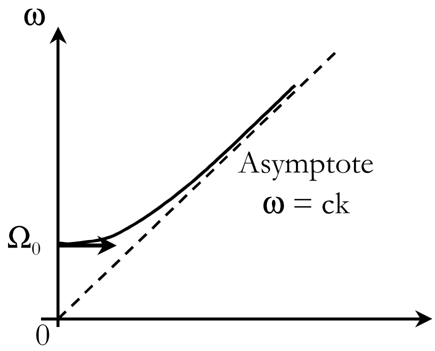
b) On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes : $\underline{\theta}_n = Ae^{i(\omega t-kx)}$. Ainsi :

$$-\omega^2 A^{i(\omega t-nka)} = -\Omega_0^2 A^{i(\omega t-nka)} + \omega_0^2(A^{i(\omega t-(n-1)ka)} - 2A^{i(\omega t-nka)} + A^{i(\omega t-(n+1)ka)})$$

Soit : $-\omega^2 = -\Omega_0^2 + \omega_0^2(^{ika} - 2 + A^{-ika}) = -\Omega_0^2 + \omega_0^2(2\cos ka - 2)$

Finalement : $\omega^2 = \Omega_0^2 + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$

c) L'intervalle de pulsations possible est (zone de Brillouin) : $\left[\Omega_0, \sqrt{\Omega_0^2 + 4\omega_0^2}\right]$. On peut tracer ω en fonction de k :



d) Dans l'approximation des milieux continus : $\theta_n(t) = \theta(na,t)$

$$\theta_{n+1}(t) = \theta((n+1)a,t) = \theta(na,t) + \frac{\partial\theta(na,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta(na,t)}{\partial x^2}a^2$$

$$\theta_{n-1}(t) = \theta((n-1)a,t) = \theta(na,t) - \frac{\partial\theta(na,t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta(na,t)}{\partial x^2}a^2$$

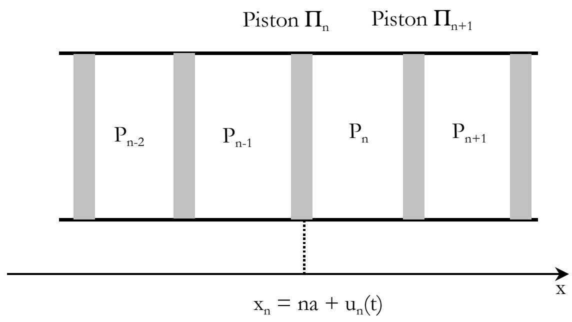
En reportant dans l'équation $\ddot{\theta}_n = -\Omega_0^2\theta_n + \omega_0^2(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$, il vient : $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\Omega_0^2\theta + \omega_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}a^2$

Soit, avec $c^2 = \omega_0^2 a^2 = \left(\frac{Ka}{M}\right)^2$: $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \Omega_0^2\theta = 0$ (équation de Klein-Gordon)

La relation de dispersion prend alors la forme : $-\omega^2\theta - c^2(-k^2\theta) + \Omega_0^2\theta = 0$ *soit* $k^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{c^2}$

15) Un modèle de propagation du son dans l'air :

Un tuyau calorifugé de section S est partagé en une infinité de compartiments (C_n) par des pistons calorifugés Π_n et Π_{n+1} de section S et de masse m.



Dans chaque compartiment se trouve une mole d'air, assimilé à un GP évoluant de manière isentropique selon la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$. A l'équilibre ; l'abscisse du piston (n) vaut $x_{n,éq} = na$ et la pression a la même valeur P_0 dans chaque compartiment. Hors équilibre, l'abscisse du piston (n) vaut $x_n = na + u_n(t)$, avec $|u_n(t)| << a$ et la pression dans le compartiment (n) vaut P_n.

a) Etablir l'expression de la pression P_n en fonction de P_0, γ, a, u_n et u_{n+1} et la linéariser. En déduire l'équation différentielle linéaire déterminant le mouvement du piston Π_n.

b) On fait l'approximation des milieux continus en définissant une fonction u(x,t) variant peu à l'échelle de a, telle que $u(na,t) = u_n(t)$. Etablir l'équation aux dérivées partielles dont est solution u(x,t). Définir une célérité c et commenter son expression.

c) Evaluer la célérité c du son dans l'air en supposant que les pistons de masse m du modèle sont en réalité constitués par le volume d'air V = Sa compris entre deux pistons dans le modèle.

On donne : $\gamma = 1{,}4$; $P_0 = 1\, bar$; $\mu_0 = 1{,}3\, kg.m^{-3}$ (masse volumique de l'air dans les CNTP).

Solution :

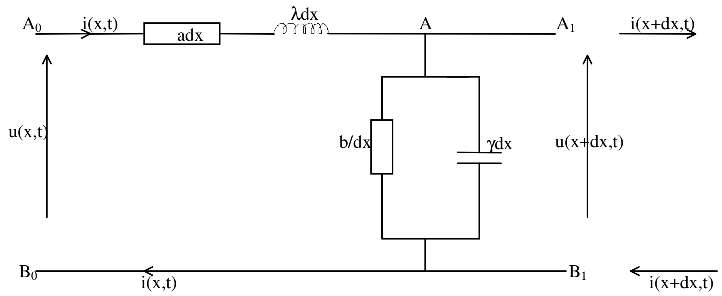
a) $P_n = P_0(1+(u_{n+1}-u_n)/a)^{-\gamma} \approx P_0(1-\gamma(u_{n+1}-u_n)/a)$

b) $\ddot{u}_n = (\gamma S P_0 / ma)(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0 S a}{m}}$; c augmente si le milieu est plus rigide (P_0 augmente) et moins inerte (m diminue), ce qui est naturel pour des ondes mécaniques.

c) AN : $c = 328\, m.s^{-1}$ (en bon accord avec la valeur attendue).

16) L'équation des télégraphistes :

On se propose de représenter un câble coaxial réel par le schéma :



a) Relier $\partial u / \partial x$, i et $\partial i / \partial t$; relier de même $\partial i / \partial x$, u et $\partial u / \partial t$.

b) Etablir finalement deux équations aux dérivées partielles vérifiées l'une par i(x,t) et l'autre par u(x,t) (équation des télégraphistes).

c) On cherche de solutions de la forme $i(x,t)=I_m e^{-\alpha x} e^{j(kx-\omega t)}$.

* En déduire deux relations liant α, k et ω à (a,b,λ,γ).

* Exprimer α en fonction de ω/k, $a\gamma$ et λ/b. Obtenir ainsi une équation bicarrée donnant k en fonction de ω.