

Préparation au Concours Cycle Polytechnicien
Filière universitaire : candidats internationaux
(O.Granier, ITC, du 24 au 29 octobre 2011)

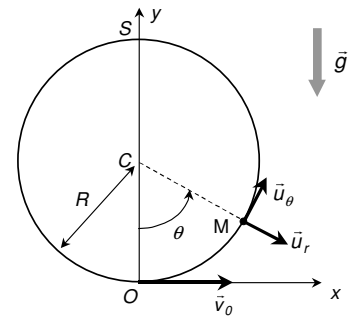
TD corrigés sur la Mécanique

Lois de Newton – Energie – Moment cinétique

1) Point matériel sur un cerceau :

Un point matériel de masse m , initialement au repos en A, peut se déplacer sans frottement dans la rainure d'un cerceau vertical et immobile, de rayon R . On lui communique une vitesse \vec{v}_0 horizontale.

Etudier les différents mouvements possibles du point matériel, en fonction des paramètres du problème (R , \vec{v}_0 , ...).



Solution :

1. Si la vitesse initiale est importante, la voiture effectuera des tours complets à l'intérieur du cerceau. Dans le cas contraire, elle quittera celui-ci avant d'arriver en son sommet S ou possédera un mouvement d'oscillations (dans la partie basse du cerceau) autour de sa position initiale O. Ces trois types de mouvements sont résumés sur les figures suivantes : dans le 1^{er} cas (figure (a)), ni la réaction \vec{N} (exercée par le cerceau sur la voiture, normale au cerceau en l'absence de frottements) ni la vitesse (ou la vitesse angulaire $\dot{\theta}$) ne s'annulent ; dans le 2^{ème} cas (figure (b)), la réaction s'annule avant la vitesse angulaire et dans le dernier cas (figure (c)), c'est le contraire.

2. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la voiture (assimilée à un point matériel), dans le référentiel galiléen terrestre, s'écrit $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$. Le vecteur position de la voiture est $\vec{r} = R\vec{u}_r$, sa vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et son accélération égale à $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. En projection sur le vecteur \vec{u}_r ($\vec{N} = -N\vec{u}_r$, $N \geq 0$), on obtient :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \quad \text{soit} \quad N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

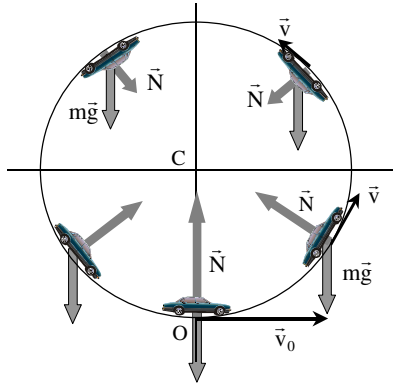


Figure (a)

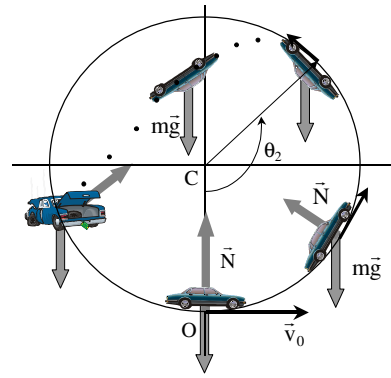


Figure (b)

Pour déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ , on applique le théorème de l'énergie cinétique à la voiture entre la position initiale O et sa position M à l'instant t :

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = -mgR(1 - \cos \theta)$$

Soit, avec $v = R\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)$$

Cette dernière expression permet alors d'obtenir $N(\theta)$, sous la forme :

$$N = \frac{mv_0^2}{R} + (3 \cos \theta - 2)mg$$

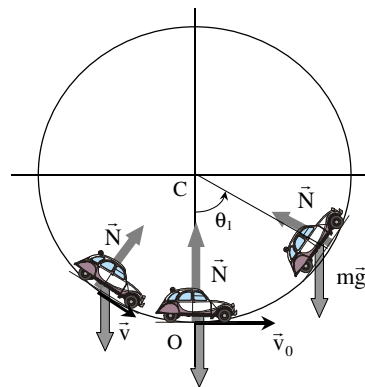


Figure (c)

3. La voiture s'arrête le long du cerceau lorsque sa vitesse angulaire s'annule, c'est-à-dire pour un angle noté θ_1 tel que $\cos \theta_1 = 1 - v_0^2/2Rg$. Elle quitte le cerceau pour $N=0$, correspondant à un angle θ_2 tel que $\cos \theta_2 = (2 - v_0^2/Rg)/3 = (2/3) \cos \theta_1$. L'angle θ_1 est défini si $|\cos \theta_1| \leq 1$, soit $v_0^2 \leq 4Rg$. De même, l'angle θ_2 existe si $v_0^2 \leq 5Rg$. Les mouvements possibles de la voiture dépendent donc bien de la valeur de la vitesse initiale v_0 :

- $v_0 < \sqrt{2Rg}$: $\cos \theta_1 > \cos \theta_2 > 0$, donc $\theta_1 < \theta_2$ et la voiture oscille autour de O.
- $\sqrt{2Rg} < v_0 < 2\sqrt{Rg}$: $\cos \theta_1 < \cos \theta_2 < 0$, soit $\theta_1 > \theta_2$, la voiture quitte le cerceau.
- $2\sqrt{Rg} < v_0 < \sqrt{5Rg}$: seule N s'annule (θ_1 n'est pas défini), la masse quitte le cerceau avant le sommet S.
- $v_0 > \sqrt{5Rg}$: la voiture effectue des loopings.

Application numérique : si l'on choisit un rayon du cercle égal à $R = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$, alors, avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, la vitesse minimale $v_{0,\ell}$ que doit avoir la voiture pour réussir son looping sera $v_{0,\ell} = \sqrt{5Rg} = 2,7 \text{ m.s}^{-1}$. Cette vitesse peut être couramment atteinte par les voitures miniatures que l'on trouve chez les marchands de jouets !

2) Force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse :

Un point matériel de masse m est lancé sur une droite avec une vitesse initiale $v_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$. La seule force qui s'exerce sur lui est une force de frottement représentée par l'expression $f = Kmv^2$ et de sens opposé à la vitesse ($K > 0$). Le point met $T = 50 \text{ s}$ pour parcourir la distance $d = 50 \text{ m}$.

- Calculer numériquement K en précisant son unité.
- Combien de temps faut-il pour parcourir la distance $2d$?

3) Force de frottement solide :

Un bœuf tire un traîneau sur un sol horizontal en appliquant systématiquement une force de traction \vec{F} inclinée de 60° par rapport à l'horizontale. La force de traction \vec{F} sera variable dans les différentes parties de l'exercice et l'on cherche à comprendre le mouvement du traîneau en fonction de la valeur du module de \vec{F} . La masse du traîneau est $m = 100 \text{ kg}$.

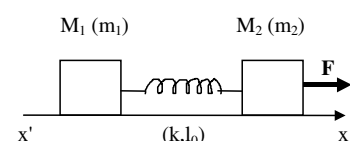
- pour mettre en mouvement le traîneau, le bœuf doit tirer avec une force minimale $F_m = 40 \text{ N}$. Expliquer l'origine de cette force minimale. En déduire les caractéristiques de la réaction sol-traîneau.
- A l'instant $t = 0$, il tire le traîneau avec une force $F_1 = 100 \text{ N}$ pendant $t_1 = 10 \text{ s}$, puis il applique une force $F_2 = 40 \text{ N}$ pendant $t_2 = 20 \text{ s}$ pour ne le tirer qu'avec une force $F_3 = 20 \text{ N}$ par la suite.
 - Ecrire l'équation différentielle du mouvement du traîneau dans les trois cas précédents.
 - Résoudre ces équations et déterminer l'expression de la distance parcourue par le traîneau en fonction du temps.
 - Le traîneau s'arrête-t-il ? Dans l'affirmative, trouver la position d'arrêt ?

4) Oscillations d'un pendule dans un champ électrique :

Déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple électrostatique, de masse m , de longueur ℓ , portant la charge $q > 0$, et placé dans un champ électrostatique \vec{E} orthogonal à \vec{g} . Le référentiel d'étude est galiléen. Déterminer ensuite la période des petites oscillations du pendule. (Equation différentielle : $\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta + (qE/m) \cos \theta$)

5) Oscillateurs soumis à une force constante :

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Elles peuvent se déplacer sans frottement sur un axe horizontal ($x'x$). Pour $t < 0$, le ressort est non tendu et



les masses m_1 et m_2 sont au repos en M_{10} et M_{20} .

A partir de $t = 0$, on exerce sur m_2 une force horizontale constante $\vec{F} = F \vec{u}_x$. On note $x_1(t) = M_{10}M_1$ et $x_2(t) = M_{20}M_2$. Déterminer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

6) Limites de la trajectoire et énergie :

Une particule fixe, de charge électrique q , est placée à l'origine O d'un axe (Ox) : tout le problème se déroule sur cet axe. On néglige le poids des particules.

a) On lance à une distance a de O une seconde particule, de charge $-q$ et de masse m , dans une direction tendant à l'éloigner de O . Quelle vitesse initiale v_0 doit-on lui communiquer pour qu'elle échappe à l'attraction de la particule fixe en O ?

b) La particule mobile a maintenant la charge $+q$ et sa vitesse initiale est v_0 et est dirigée vers O . Montrer que cette particule ne peut atteindre O ; calculer la distance minimale d'approche b en fonction de v_0 .

7) Vibration de la molécule HCl :

La formation d'une molécule à partir de deux atomes est due au fait que l'énergie potentielle d'interaction $U(r)$ des ces deux atomes (r désigne la distance inter-atome) présente un minimum. Dans le cas de la molécule HCl, ce potentiel peut être représenté par : (modèle phénoménologique)

$$U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$$

a et b étant deux paramètres. L'atome de chlore, beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène, est considéré immobile. On se ramène ainsi à un problème à un corps : l'étude du mouvement de l'atome d'hydrogène dans le champ de force créé par le chlore.

a) Faire l'étude mathématique de $U(r)$.

b) L'atome d'hydrogène est susceptible de vibrer autour de sa position d'équilibre r_e . En effectuant un développement en série de Taylor de la force d'interaction entre les deux atomes au voisinage de r_e :

$$f(r) = f(r_e) + \left(\frac{df}{dr}\right)_{r=r_e} (r - r_e) = \left(\frac{df}{dr}\right)_{r=r_e} (r - r_e) = -\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_e} (r - r_e)$$

Montrer que le mouvement de l'atome d'hydrogène est du type oscillateur harmonique ("ressort"). Exprimer la fréquence de vibration ν de la molécule HCl prédite par ce modèle.

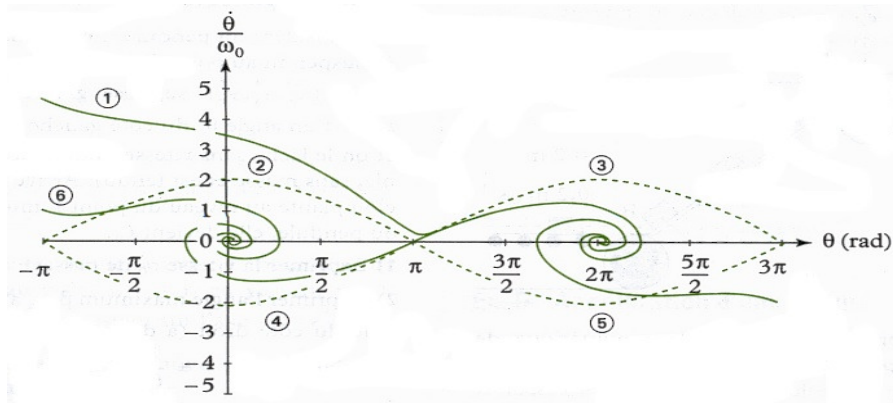
8) Période des oscillations d'un pendule simple et portrait de phase :

On considère un pendule simple de longueur ℓ que l'on écarte sans vitesse initiale de l'angle θ_0 par rapport à la verticale descendante.

a) On néglige les frottements dans cette question. Etablir l'équation différentielle du mouvement issue de l'application du principe de conservation de l'énergie mécanique. En déduire la période T_0 des petites oscillations.

b) Le pendule est soumis désormais à des frottements fluides et son équation différentielle devient : $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

Son portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous, avec $\omega_0 = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $h = 0,5 \text{ s}^{-1}$.



- * A quoi voit-on qu'il y a des frottements ?
- * Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.
- * Commenter l'allure des différentes courbes.

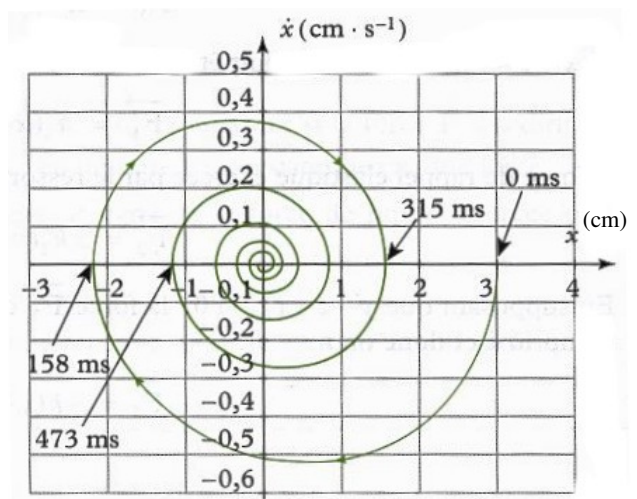
9) Lecture de portrait de phase :

On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500 \text{ g}$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide ($-\lambda\vec{v}$, \vec{v} étant la vitesse de la masse m et on note x l'écart à la position d'équilibre). L'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.

a) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

b) Déterminer, par lecture graphique :

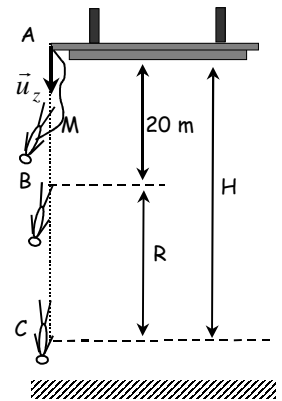
- * La valeur initiale de la position x_0 .
- * La valeur finale de la position x_f .
- * La pseudo période T_a .
- * Le décrément logarithmique δ .



c) En déduire la pulsation propre ω_0 , le facteur de qualité Q de l'oscillateur, la raideur k du ressort et le coefficient de frottement fluide λ . ($\omega_0 = 20,05 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $k = 201 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $Q = 5$, $\lambda = 2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$).

10) Saut à l'élastique :

Un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel M (de masse $m = 70 \text{ kg}$), tombe depuis un pont (au point A) avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre. A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisé par un ressort, de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 20 \text{ m}$ et de raideur $k = 120 \text{ N.m}^{-1}$. On suppose le référentiel terrestre galiléen et on néglige les frottements.



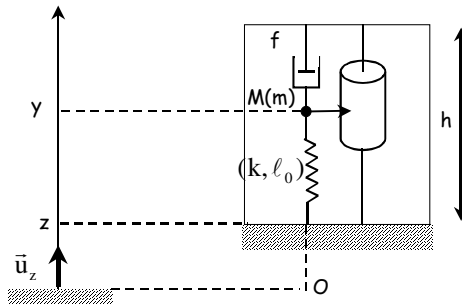
- Déterminer la vitesse du sauteur en B.
- Déterminer la hauteur totale de chute.
- Déterminer l'accélération maximale pendant le saut.

11) Un sismographe :

Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , d'un amortisseur de coefficient de frottement f et d'une masse ponctuelle m .

Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide ; un stylo reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m . Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal : $z(t) = Z_m \cos(\omega t) + z_{\text{eq}}$ (avec $z_{\text{eq}} = 0$). Le référentiel $R_g(O, Z)$ est supposé galiléen.

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la grandeur x , écart entre la longueur ℓ du ressort à un instant t et sa longueur ℓ_{eq} à l'équilibre (obtenu lorsque $z = z_{\text{eq}} = 0$). On fera apparaître le facteur de qualité Q du système ainsi que sa pulsation propre ω_0 .

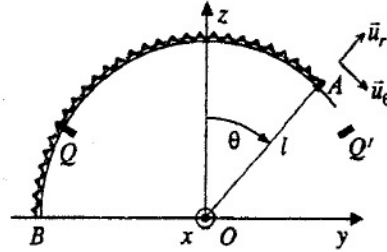


- Déterminer, en régime forcé, l'amplitude X_m de l'oscillation de la masse ainsi que la phase à l'origine.
- Comment choisir Q pour que la bande de pulsation reproduite soit la plus grande possible et que l'écart entre X_m et Z_m soit au maximum de 5% ?

12) Oscillations anharmoniques :

Un point matériel A de masse m peut se déplacer sans frottement sur un rail en forme de cercle de centre O et de rayon ℓ . Il est relié à un ressort épousant le rail, de longueur à vide

$\ell_0 = \frac{\pi \ell}{2}$ et de raideur k , dont l'autre extrémité B est fixée sur l'axe (Oy). Sous les actions de la pesanteur et du ressort, A oscille sur le rail et son mouvement est repréé par l'angle $\theta = (Oz, \overline{OA})$, Oz étant la verticale ascendante. Le référentiel R(Oxyz) est galiléen.



a) Obtenir l'équation suivante :

$$\dot{\theta}^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{g}{\ell} \right) \theta^2 = \dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{\ell} f(\theta) \quad (\text{Avec } f(0) = 0)$$

Quelle est la signification de la constante $\dot{\theta}_0^2$?

b) Représenter graphiquement $f(\theta)$ dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Dans quel sous-intervalle reste-t-elle inférieure à 0,01 ?

c) Comment obtenir un mouvement de rotation de la tige le plus uniforme possible, hormis les phases de changement de signe ? Quel problème cela pose-t-il si on veut observer des oscillations ?

d) On introduit deux butées Q et Q' qui ne gênent pas le mouvement du ressort mais contraignent l'angle θ à rester entre $-\theta_{\max}$ et $+\theta_{\max}$, le choc sur chaque butée produit simplement un changement de signe instantané de $\dot{\theta}$. On veut que la vitesse angulaire de la tige soit uniforme à environ 1% près, égale à $\dot{\theta}_0 = \pi \text{ rad.s}^{-1}$, avec $m = 1 \text{ kg}$, $\ell = 1 \text{ m}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Calculer numériquement k . On choisit $\theta_{\max} = 0,5 \text{ rad}$. Calculer la période des oscillations.

Solution :

La fonction $f(\theta)$ est :

$$f(\theta) = -1 + \cos \theta + \theta^2 / 2$$

on peut la supposer nulle entre $-0,5 \text{ rad}$ et $+0,5 \text{ rad}$.

Je suppose $\Omega_0^2 = \frac{k}{m} - \frac{g}{\ell} > 0$ pour que le système oscille.

La solution de l'éq diff du mouvement est : $\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t$

La vitesse angulaire est : $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \cos \Omega_0 t$

Pour qu'elle reste constante il faut que le cos reste proche de 1 ; Ω_0 doit être proche de 0 ; mais la période va être grande d'où la nécessité de butées ??

On suppose donc que $\Omega_0 t$ est petit, alors : $\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \approx \dot{\theta}_0 t$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 (1 - \frac{1}{2} (\Omega_0 t)^2)$

Le temps mis par la masse pour aller de 0 à θ_{\max} est :

$$t_{\max} = \theta_{\max} / \dot{\theta}_0$$

et la vitesse angulaire sera alors : $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 (1 - \frac{1}{2} (\Omega_0 \frac{\theta_{\max}}{\dot{\theta}_0})^2)$

On veut que : $\frac{1}{2} (\Omega_0 \frac{\theta_{\max}}{\dot{\theta}_0})^2 = 10^{-2}$

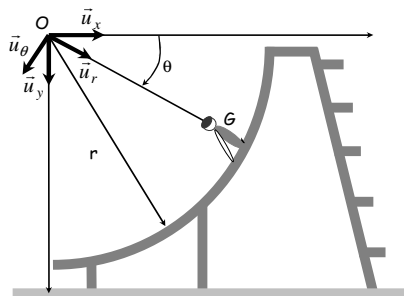
$$\text{D'où : } \Omega_0^2 = 210^{-2} \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_{\max}} \right)^2 = \frac{k}{m} - \frac{g}{\ell}$$

$$\text{et : } k = m \left[\frac{g}{\ell} + 210^{-2} \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_{\max}} \right)^2 \right] = 10,6 \text{ N.m}^{-1}$$

On peut évaluer : $t_{\max} = 0,159 \text{ s}$; $\Omega_0 = 0,89 \text{ rad.s}^{-1}$; $\Omega_0 t_{\max} = 0,141 \text{ rad}$; $\cos \Omega_0 t_{\max} = 0,99$; $\sin \Omega_0 t_{\max} = 0,141$

13) Le toboggan :

Un enfant assimilé à un point matériel G de masse $m = 40 \text{ kg}$ glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5 \text{ m}$ depuis la position $\theta = \theta_0 = 15^\circ$ où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position $\theta = 90^\circ$ où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements.



- Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant en utilisant le théorème du moment cinétique.
- En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de θ . Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter cette valeur.

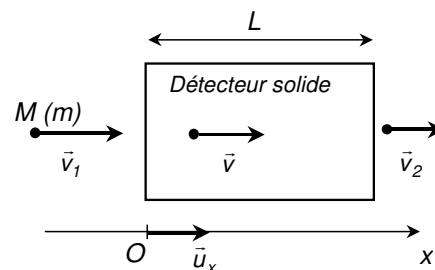
14) Détection en physique nucléaire :

Un des aspects de la Physique Nucléaire est d'étudier le comportement de noyaux lourds hautement énergétiques afin de déterminer le comportement collectif des nucléons (protons et neutrons) et d'appréhender la nature des forces entre ces particules. Pour réaliser expérimentalement des noyaux lourds, on bombarde des noyaux d'argent (Ag : $A_c = 108$ nucléons et $Z_c = 48$ protons) supposés fixes dans le référentiel galiléen du laboratoire, avec des noyaux de cuivre (Cu : $A_p = 63$ nucléons et $Z_p = 29$ protons) d'énergie

cinétique E_0 et de vitesse \vec{v}_0 évaluées dans le même référentiel. Un noyau d'argent fusionne alors avec un noyau de cuivre pour former un noyau composé d'iridium, comportant $A_p + A_c$ nucléons et $Z_p + Z_c$ protons. On note m_n la masse d'un nucléon.

1. Soit \vec{V}_{comp} le vecteur vitesse du noyau composé juste après la fusion. Déterminer \vec{V}_{comp} en fonction de \vec{v}_0 , A_p et A_c .
2. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,comp}$ du noyau composé juste après la fusion, en fonction de E_0 , A_p et A_c . Evaluer la perte d'énergie cinétique ΔE_c lors de la fusion en fonction des mêmes données. Où est passée l'énergie manquante ?
3. Après désexcitation du noyau composé formé (par émission de rayonnements électromagnétiques, émission de particules alpha, émission d'électrons,...), on obtient un noyau stable de baryum ($A = 138$; $Z = 56$), de masse $m = Am_n$, d'énergie cinétique E_{c1} et de vecteur vitesse \vec{v}_1 .

On souhaite mesurer la vitesse \vec{v}_1 de ce noyau. Pour cela, on utilise un détecteur solide de longueur L (en zirconium, par exemple) que l'on intercale le long de la trajectoire des noyaux de baryum (voir figure). On suppose que la trajectoire des noyaux de baryum reste rectiligne (le long de l'axe Ox , où l'origine O est située à l'entrée du détecteur solide) et que l'interaction entre un noyau de baryum et ceux du détecteur solide peut être modélisée par une force unique \vec{f}_v du type « frottement fluide » de la forme (le poids est négligé) : $\vec{f}_v = -k\vec{v}$, où $\vec{v} = v\vec{u}_x$ désigne le vecteur vitesse d'un noyau de baryum dans le détecteur et k est un coefficient caractéristique du détecteur solide.



On note $\vec{v}_2 = v_2\vec{u}_x$ le vecteur vitesse d'un noyau de baryum à la sortie du détecteur.

- a) Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ d'un noyau de baryum au sein du détecteur en fonction du temps t et des données v_1 , m et k .
- b) Déterminer l'expression de l'abscisse x du noyau de baryum dans le détecteur en fonction du temps t et des données v_1 , m et k . On suppose dans la suite que le détecteur a une épaisseur suffisamment faible pour que le noyau de baryum ne soit pas arrêté dans le détecteur.
- c) En déduire la vitesse v_2 d'un noyau de baryum à la sortie du détecteur en fonction de v_1 , k , m et L .
- d) Exprimer la variation d'énergie cinétique, notée ΔE_c , d'un noyau de baryum lors de la traversée du détecteur en fonction de m , v_1 , k et L . Montrer que la mesure de cette perte d'énergie (par mesure calorimétrique par exemple, c'est-à-dire par détermination du transfert thermique dégagé au sein même du détecteur solide) permet ainsi d'accéder à la vitesse v_1 des noyaux de baryum à l'entrée du détecteur.
- e) Un étalonnage préalable du détecteur est nécessaire afin de connaître la valeur de la constante k . Un noyau de baryum, fourni par une source radioactive, d'énergie $E_{c1} = 1 \text{ keV}$ qui rentre dans le détecteur subit une perte relative d'énergie cinétique de 1 %. Déterminer la valeur numérique de la constante k . Données : $L = 1 \text{ mm}$ et $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Solution :

1. La conservation de la quantité de mouvement du système isolé {noyau d'argent-noyau de cuivre} permet d'écrire :

$$A_p m_n \vec{v}_0 = (A_p + A_c) m_n \vec{V}_{\text{comp}} \quad \text{soit} \quad \vec{V}_{\text{comp}} = \frac{A_p}{A_p + A_c} \vec{v}_0$$

2. L'énergie cinétique du noyau composé est :

$$E_{c,\text{comp}} = \frac{1}{2} (A_c + A_p) m_n V_{\text{comp}}^2 = \frac{A_p}{A_c + A_p} E_0$$

La perte d'énergie cinétique manquante est alors :

$$\Delta E_c = \frac{A_p}{A_c + A_p} E_0 - E_0 = -\frac{A_c}{A_c + A_p} E_0$$

L'énergie manquante se retrouve sous forme d'énergie d'excitation du noyau composé. Cette énergie se calcule simplement alors même que la nature de l'interaction entre les deux noyaux qui fusionnent est inconnue ! On voit ici une propriété essentielle des lois de conservation qui peuvent en effet s'appliquer aussi bien à des objets microscopiques (atomes, molécules, ...) qu'à des objets macroscopiques (recul d'une arme à feu, chocs de boules de billard, ...), quelle que soit la nature des forces mises en jeu.

3-a) Le principe fondamental appliqué à un noyau de baryum donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

b) En écrivant que $\vec{v} = v\vec{u}_x = \dot{x}\vec{u}_x$ et en intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$x(t) = \frac{mv_1}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\right)$$

c) Soit T le temps mis par un noyau de baryum pour traverser le détecteur : $L = mv_1(1 - \exp(-kT/m))/k$. Par conséquent, $\exp(-kT/m) = 1 - kL/mv_1$ et ainsi :

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \exp\left(-\frac{k}{m} T\right) = \vec{v}_1 \left(1 - \frac{kL}{mv_1}\right)$$

d) La variation d'énergie cinétique entre la sortie et l'entrée du détecteur vaut :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m(v_1 + v_2)(v_2 - v_1) = -\frac{1}{2} kL \left(2v_1 - \frac{kL}{m}\right)$$

La mesure de cette perte d'énergie, qui se traduit au niveau macroscopique par un dégagement de chaleur dans le détecteur qui peut être déterminé, permet en effet de connaître la vitesse v_1 d'un noyau de baryum à l'entrée du détecteur :

$$v_1 = \frac{kL}{2m} \left(1 - \frac{2m\Delta E_c}{k^2 L^2}\right)$$

e) La perte relative d'énergie cinétique étant faible, on peut estimer que les vitesses v_1 et v_2 seront proches l'une de l'autre et que, par conséquent, $kL/mv_1 \ll 1$. par conséquent, l'énergie cinétique E_{c2} à la sortie peut s'écrire :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} mv_2^2 = E_{c1} (1 - kL / mv_1)^2 \approx E_{c1} (1 - 2kL / mv_1)$$

D'où l'expression de la perte relative d'énergie cinétique :

$$\frac{\Delta E_c}{E_{c1}} = \frac{E_{c2} - E_{c1}}{E_{c1}} \approx -\frac{2kL}{mv_1} \quad \text{et finalement} \quad k = -\frac{mv_1}{2L} \frac{\Delta E_c}{E_{c1}}$$

Numériquement : $m = 2,3 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$, $L = 10^{-3} \text{ m}$, $E_{c1} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$, $\Delta E_c / E_{c1} = -0,01$,
 $v_1 = \sqrt{2E_{c1} / m} = 3,7 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ et la constante k vaut alors $k = 4,3 \cdot 10^{-20} \text{ kg.s}^{-1}$ (et l'on vérifie bien l'hypothèse selon laquelle $kL / mv_1 = -0,5 \cdot (\Delta E_c / E_{c1}) = 0,005 \ll 1$).

Gravitation

15) Satellite géostationnaire :

Calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. Ce satellite ayant pour masse $m = 1 \text{ t}$, on se propose d'augmenter son altitude de 50 km. Quelle énergie faut-il dépenser ($5,6 \cdot 10^6 \text{ J}$).

16) Lancement d'un satellite terrestre :

On veut qu'un satellite S décrive une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre de la Terre T (de masse M_T).

a) Calculer la vitesse v_0 du satellite ainsi que son énergie mécanique.

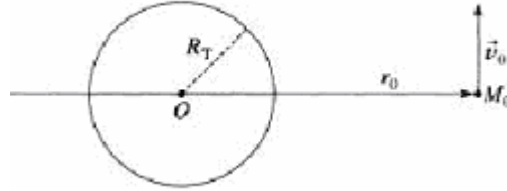
b) Une erreur a été commise lors de la satellisation. Le satellite a bien été lancé sur un rayon r_0 avec une vitesse v_0 mais la direction réelle de lancement fait un angle α avec la direction initialement prévue ($0 < \alpha < \pi / 2$). Déterminer la nature de la trajectoire réelle du satellite et construire son allure. Exprimer r_p et r_a les rayons aux périégée et à l'apogée, ainsi que les vitesses correspondantes v_p et v_a .

17) Comète de Halley :

La comète de Halley a une période de 76,03 années et sa distance minimale au Soleil est 0,59 ua. Calculer le demi-grand axe de sa trajectoire (en ua), son excentricité e et sa distance maximale au Soleil. ($a = 17,95 \text{ ua}$; $e = 0,967$; $r_A = 35,3 \text{ ua}$)

18) Condition de lancement d'un satellite :

Un satellite est injecté sur orbite en un point M_0 distant de r_0 du centre O de la Terre, avec une vitesse \vec{v}_0 orthogonale à \overrightarrow{OM}_0 .



a) Que vaut, en fonction de G , M_T (masse de la Terre) et r_0 , cette vitesse si la trajectoire obtenue est un cercle de rayon r_0 ? Dans la suite, on note v_c cette vitesse particulière de v_0 .

b) On pose $\lambda = \frac{r_0}{R_T}$ où R_T est le rayon terrestre. Démontrer que le satellite n'échappera pas à

l'attraction terrestre et ne rencontrera pas la Terre si $\frac{2}{1+\lambda} < \left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2 < 2$.

Solution :

a) Le PFD donne, dans le cas d'une trajectoire circulaire :

$$m \frac{v_c^2}{r_0} = G \frac{mM_T}{r_0^2} \quad \text{soit} \quad v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

b) Le satellite échappe à l'attraction terrestre si son énergie mécanique s'annule (sa trajectoire est alors une parabole). La vitesse v_0 est alors telle que :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{mM_T}{r_0} = 0 \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{2 \frac{GM_T}{r_0}} = \sqrt{2} v_c$$

Si le satellite touche la Terre, c'est que la trajectoire est une ellipse dont le grand axe vaut : $2a = r_0 + R_T$

L'énergie sur une trajectoire elliptique est : $E_m = -\frac{GmM_T}{2a} = -\frac{GmM_T}{r_0 + R_T}$

Cette énergie est égale à celle communiquée lors du lancement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{mM_T}{r_0} = -\frac{GmM_T}{r_0 + R_T}$$

On en déduit alors la vitesse v_0 correspondante : $v_0^2 = 2GM_T \frac{R_T}{r_0(r_0 + R_T)} = 2 \frac{GM_T}{r_0} \frac{1}{\lambda + 1}$

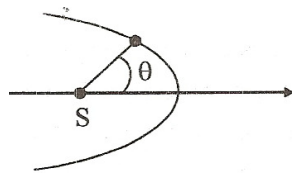
Finalement, le satellite n'échappera pas à l'attraction terrestre et ne rencontrera pas la Terre

$$\text{si : } \frac{2}{1+\lambda} < \left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2 < 2$$

19) La comète de Hyakutaké :

La comète de Hyakutaké a atteint son périhélie à une distance du Soleil de 0,23 ua le 1^{er} juin 1996. On suppose que sa trajectoire est parabolique.

La Terre a une orbite circulaire de rayon $a = 1 \text{ ua} = 150 \text{ millions de km}$, parcourue à la vitesse $u = 30 \text{ km.s}^{-1}$. On suppose que les trajectoires sont coplanaires.



- Calculer la vitesse de la comète à son périhélie.
- Calculer les angles θ_1 et θ_2 de rencontre de la comète avec l'orbite terrestre.
- Calculer les dates d'arrivée et de sortie de la comète dans l'orbite terrestre.

Solution :

a) La trajectoire de la comète étant parabolique, son énergie mécanique est nulle :

$$E_m = \frac{1}{2} M_c v^2 - G \frac{M_c M_s}{r} = 0.$$

Ecrite au périhélie, cette relation donne : $v_p = \sqrt{\frac{2GM_s}{r_p}}$. La vitesse de la Terre sur sa

trajectoire circulaire est donnée par : $M_T \frac{u^2}{r_T} = G \frac{M_T M_s}{r_T^2}$ soit $u = \sqrt{\frac{GM_s}{r_T}}$; finalement :

$$v_p = \sqrt{\frac{2r_T}{r_p}} u$$

b) Il suffit d'écrire que : $r_c = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{2r_p}{1 + \cos \theta} = r_T$

c) La constante des aires donne :

$$C_0 = r_c^2 \dot{\theta} = r_p v_p \quad \text{soit} \quad \frac{p^2}{(1 + \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = r_p v_p$$

$$\frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{v_p}{4r_p} dt$$

La Comète reste à l'intérieur de l'orbite terrestre durant une durée τ donnée par :

$$\tau = \frac{4r_p}{v_p} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

20) Modification du centre attractif :

Un point matériel P de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre attractif O (de masse M), supposé fixe dans le référentiel d'étude. La seule force prise en compte est l'attraction gravitationnelle. De manière quasi-instantanée, la masse du point O devient αM (avec $\alpha > 0$). Quelle est alors la nouvelle trajectoire de P ? Discuter selon les valeurs possibles de α .

21) Orbite de transfert :

On étudie le mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel. La Terre est assimilée à une répartition homogène sphérique de masse. L'étude est menée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen lié au centre O de la Terre. On ne tient compte que du champ gravitationnel terrestre.

Données : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg (masse de la Terre), $R_T = 6\,400$ km (rayon de la Terre), $T_0 = 86\,164$ s (durée du jour sidéral) et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI (constante de gravitation).

1. Satellite circulaire : on désire placer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r et de centre O.

a) Le satellite ayant atteint, au cours de la phase de lancement, un point M distant de r du centre O de la Terre, quelles caractéristiques doit-on donner à son vecteur vitesse pour le placer en ce point en orbite circulaire ?

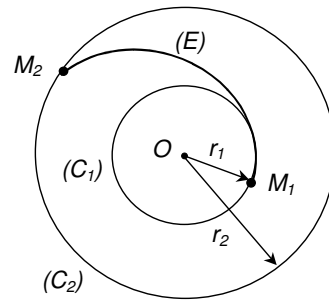
b) Etablir l'expression de la période T du satellite en fonction du rayon de l'orbite r.

c) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de r.

d) Soit λ la latitude de la base de lancement et Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Quelle énergie faut-il communiquer au satellite pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire ? Quel est l'intérêt d'une base équatoriale ?

e) Application numérique : calculer la vitesse du satellite ainsi que la période de son mouvement pour $r = 6\,600$ km.

2. Etude d'une orbite de transfert : on désire faire passer le satellite précédent de l'orbite circulaire (C_1) de rayon r_1 à l'orbite circulaire (C_2) de rayon $r_2 > r_1$. Pour y parvenir, on lui fait emprunter une orbite de transfert elliptique (E), tangente en son périégée M_1 à l'orbite (C_1) et en son apogée à l'orbite (C_2). Les passages en M_1 de l'orbite (C_1) à l'orbite (E) et en M_2 de l'orbite (E) à l'orbite (C_2) sont effectués en fournissant au satellite, à l'aide de propulseurs, deux impulsions permettant d'augmenter respectivement son énergie de ΔE_1 et ΔE_2 .



a) Démontrer que la relation donnant E_m , établie avec r pour des trajectoires circulaires, reste formellement valable pour des trajectoires elliptiques à condition de remplacer r par le demi-grand axe a de l'ellipse trajectoire.

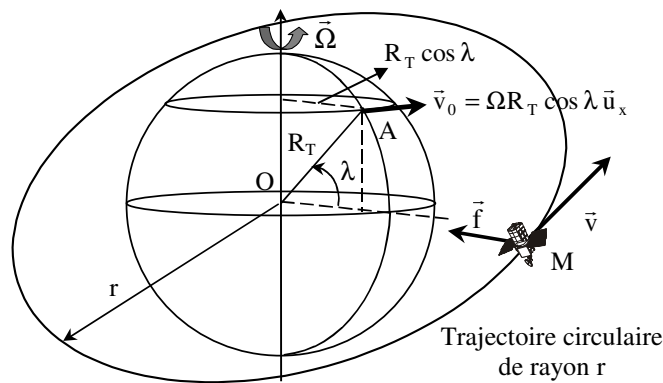
b) Quelles sont les énergies mécaniques respectives du satellite sur les orbites (C_1), (C_2) et (E) en fonction de G , M_T , m , r_1 et r_2 ?

c) Exprimer ΔE_1 et ΔE_2 en fonction des mêmes paramètres. Calculer ΔE_1 et ΔE_2 avec $m = 100$ kg, $r_1 = 6\,600$ km et $r_2 = 42\,200$ km.

d) En admettant que la relation entre la période T et le demi-grand axe a est formellement identique à celle trouvée à la question (1-b), à condition de remplacer r par a , calculer la durée τ du transfert de l'orbite (C_1) à l'orbite (C_2).

Solution :

1-a) Le point M est soumis à la seule force gravitationnelle $\vec{f} = -(GmM_T / r^2) \vec{u}_r$, où \vec{u}_r est le vecteur unitaire dirigé de O vers M et son accélération, purement normale, vaut $\vec{a} = -(v^2 / r) \vec{u}_r$. Le théorème du centre d'inertie appliqué au satellite, dans le référentiel géocentrique, $m\vec{a} = \vec{f}$, donne finalement $v = \sqrt{GM_T / r}$ (et en direction, la vitesse doit être perpendiculaire au rayon vecteur \vec{OM}).



b) Comme $T = 2\pi r / v$, il vient $T = \sqrt{4\pi^2 r^3 / GM_T}$, soit $T^2 / r^3 = 4\pi^2 / GM_T$ (3^{ème} loi de Kepler).

c) L'énergie cinétique du satellite vaut $E_c = mv^2 / 2 = GmM_T / 2r$; son énergie potentielle $E_p = -GmM_T / r$ et son énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = -GmM_T / 2r$.

d) Immobile par rapport à la Terre, le satellite est animé, avant le lancement, de la vitesse $\vec{v}_0 = \Omega R_T \cos \lambda \vec{u}_x$ dans le référentiel géocentrique (où \vec{u}_x désigne le vecteur unitaire tangent

au parallèle de la base de lancement A et dirigé vers l'Est, voir figure précédente). L'énergie mécanique du satellite avant le lancement est donc :

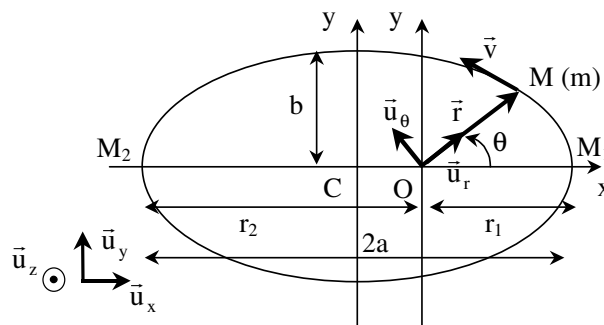
$$E_{m_0} = (m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda / 2) - GmM_T / R_T$$

Et l'énergie ΔE à communiquer au satellite pour le placer sur son orbite circulaire vaut par conséquent :

$$\Delta E = E_m - E_{m_0} = GmM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) - \frac{1}{2} m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda$$

L'énergie ΔE à fournir sera minimale à l'équateur puisque la latitude λ est alors nulle (et $\cos \lambda$ maximal, égal à 1) : on voit ainsi l'intérêt de construire des bases de lancement proches de l'équateur.

e) Numériquement, avec $r = 6600 \text{ km}$, $v = 7,8 \text{ km.s}^{-1}$ et $T = 5325 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min } 45 \text{ s}$.



2-a) La figure précédente précise les notations ; l'équation polaire de l'ellipse trajectoire, dont un des foyers est la Terre, est $r = p / (1 + e \cos \theta)$, où p est le paramètre et e l'excentricité de l'ellipse.

L'énergie mécanique du satellite vaut : $E_m = mv^2 / 2 - GmM_T / r$. En coordonnées polaires, $\vec{r} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Le moment cinétique par rapport à O, $\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \sigma_O \vec{u}_z$ est une constante du mouvement puisque le satellite est soumis à une force centrale. En remplaçant $\dot{\theta}$ par $\dot{\theta} = \sigma_O / mr^2$ dans l'expression de la vitesse, il vient que l'énergie mécanique peut s'exprimer uniquement en fonction de la distance r et de sa dérivée \dot{r} sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{\sigma_O^2}{m^2 r^4} \right) - GmM_T \frac{1}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} - GmM_T \frac{1}{r}$$

Tout se passe comme si le satellite possédait un mouvement purement radial en étant soumis au potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r) = \sigma_O^2 / 2mr^2 - GmM_T / r$. Au périégée M_1 et à l'apogée M_2 , la distance r est extrémale (soit $\dot{r} = 0$). Par conséquent, les distances r_1 et r_2 vérifient l'équation :

$$U_{\text{eff}}(r) = E_m \quad \text{soit} \quad E_m = \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} - GmM_T \frac{1}{r}$$

ou encore : $E_m r^2 + GmM_T r - \sigma_O^2 / 2m = 0$

Par conséquent, en notant Δ le discriminant de cette équation du 2nd degré, $r_1 = (-GmM_T + \sqrt{\Delta}) / 2E_m$ et $r_2 = (-GmM_T - \sqrt{\Delta}) / 2E_m > r_1$ (l'énergie mécanique est, dans le cas d'une trajectoire elliptique, négative). Ainsi :

$$r_1 + r_2 = 2a = -\frac{GmM_T}{E_m} \quad \text{soit finalement} \quad E_m = -\frac{GmM_T}{2a}$$

Cette expression est semblable à celle trouvée lors d'une trajectoire circulaire, à condition de remplacer le rayon r par le demi-grand axe a de l'ellipse trajectoire.

b) Les énergies mécaniques sur les deux trajectoires circulaires (C_1) et (C_2) sont respectivement $E_{m_1} = -GmM_T / 2r_1$ et $E_{m_2} = -GmM_T / 2r_2$. Comme $2a = r_1 + r_2$, l'énergie du satellite sur l'ellipse de transfert vaut $E_m = -GmM_T / (r_1 + r_2)$.

c) Les énergies ΔE_1 et ΔE_2 fournies par les propulseurs sont alors :

$$\Delta E_1 = E_m - E_{m_1} = GmM_T \left(\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right) = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{GmM_T}{2r_1}$$

$$\Delta E_2 = E_{m_2} - E_m = GmM_T \left(-\frac{1}{2r_2} + \frac{1}{r_1 + r_2} \right) = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{GmM_T}{2r_2}$$

Numériquement, $\Delta E_1 = 2,2 \cdot 10^9 \text{ J}$ et $\Delta E_2 = 3,5 \cdot 10^8 \text{ J}$.

d) La durée τ du transfert entre les deux trajectoires circulaires est égale à la demi-période T du satellite sur la trajectoire elliptique (E). Or, d'après la question (1-b) en remplaçant r par a , $T = \sqrt{4\pi^2 a^3 / GM_T}$, d'où, avec $a = (r_1 + r_2) / 2$:

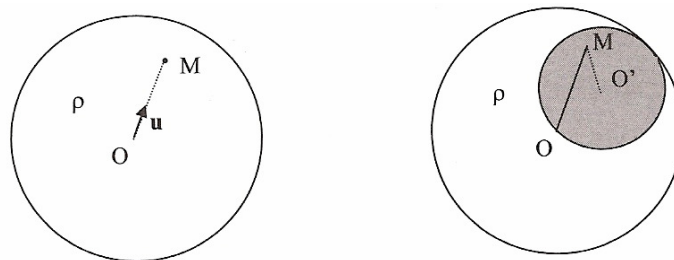
$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 (r_1 + r_2)^3}{2GM_T}} = 1,9 \cdot 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h } 15 \text{ min}$$

22) Mouvements d'une charge ponctuelle :

Une charge ponctuelle Q est placée en O . Une charge ponctuelle q est lancée en un point A avec une vitesse v_0 perpendiculaire à OA . On pose $OA = r_0$. Discuter, selon les valeurs de r_0 , v_0 , q et Q , les différentes trajectoires possibles de la charge q .

23) Gravitation et ressort de longueur nulle :

Montrer qu'une planète homogène de centre O , de rayon R , de masse volumique ρ , agit sur une particule M de masse m placée à une distance $r < R$ comme un ressort de longueur nulle.



Quelle est la trajectoire de M à l'intérieur d'une hypothétique cavité de la Terre, centrée en O' et de rayon $R / 2$.

Solution :

Le champ gravitationnel à l'intérieur de la planète est donné par le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon r :

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \quad \text{soit} \quad g(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r$$

La force agissant sur M est : $\vec{F} = -\frac{4}{3}G\pi\rho m\vec{r}$. C'est la force d'un ressort de longueur à vide nulle, accroché en O et de raideur $k = \frac{4}{3}G\pi\rho m$.

La Terre creuse est équivalente à la superposition d'une Terre pleine de masse volumique ρ et d'une sphère de centre O' , de rayon $R/2$ et de masse volumique $-\rho$. La particule est soumise à deux ressorts de longueur à vide nulle et de raideur k et $-k$, d'origine O et O' . La force agissante est :

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{O'M} = -k\overrightarrow{OO'}$$

La force est constante et la trajectoire est une parabole.

24) Freinage d'un satellite par l'atmosphère :

Un satellite terrestre artificiel (S) de vitesse \vec{V} (dans le référentiel géocentrique galiléen) sur une orbite basse (c'est-à-dire dont l'altitude z est très inférieure au rayon terrestre R_T) subit des frottements dus à l'atmosphère. Les molécules de l'atmosphère n'étant soumises qu'à l'agitation thermique, on pourra négliger leur vitesse thermique $v_{Th} \approx 500 \text{ m.s}^{-1}$ devant V . On note R_T et M_T le rayon et la masse de la Terre, assimilée à une sphère massive homogène.

1. On suppose que, après une collision entre le satellite de masse M et une molécule de masse m , la vitesse relative des deux objets est nulle (« choc mou »). Montrer alors que la variation de la quantité de mouvement de (S) est $\Delta\vec{P} \approx -m\vec{V}$.

2. Montrer que l'effet des collisions équivaut à une force \vec{F} s'exerçant sur le satellite. Ce dernier est sphérique, de rayon a . Déterminer \vec{F} en fonction de a , \vec{V} et la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère (en considérant le nombre de chocs se produisant à l'intérieur d'un cylindre élémentaire, on trouve une expression du type $F = k(z)V^2$). Est-il indispensable que le satellite soit sphérique ?

3. On suppose qu'à l'altitude $z \ll R_T$, $\mu(z) = \mu(0)\exp(-z/H)$, où $\mu(0)$ et H sont des constantes. On considère alors que, du fait de la force \vec{F} , (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre dont le rayon varie lentement avec le temps.

a) Donner, sous ces hypothèses, une loi approchée de variation de $z(t)$. Il sera avantageux d'introduire la quantité $\tau = MH / (2\pi a^2 \mu(0) R_T \sqrt{g_0 R_T})$, où g_0 désigne le champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On note z_i l'altitude de départ.

b) Applications numériques : calculer la durée de chute t_{ch} du satellite depuis l'altitude $z_i = 180 \text{ km}$ jusqu'à $z_f = 0$; on donne : $\mu(0) = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $H = 8500 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $R_T = 6370 \text{ km}$ et $M = 10^3 \text{ kg}$. Vérifier enfin que la vitesse du satellite est

effectivement grande devant la vitesse d'agitation thermique v_{Th} des molécules de l'atmosphère.

Solution :

1. La conservation, lors du choc mou, de la quantité de mouvement totale du système {Satellite-Molécule} dans le référentiel géocentrique s'écrit : $M\vec{V} + m\vec{v}_{Th} = (M + m)\vec{V}'$

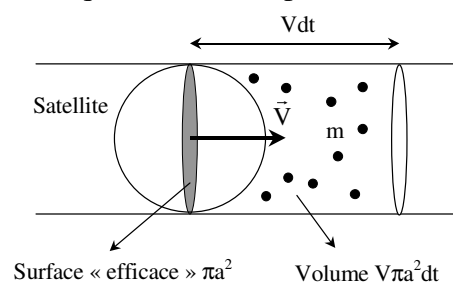
La variation de la quantité de mouvement du satellite est $\Delta\vec{P} = M(\vec{V}' - \vec{V})$. Or, en négligeant

$m v_{Th}$ devant MV , il vient $\vec{V}' \approx \frac{M}{M+m} \vec{V} \approx \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} \vec{V}$, soit, au 1^{er} ordre en m/M ,

$\vec{V}' \approx \left(1 - \frac{m}{M}\right) \vec{V}$. On en déduit alors que $\Delta\vec{P} \approx -m\vec{V}$.

2. On raisonne dans le référentiel géocentrique, dans lequel le satellite possède la vitesse \vec{V} .

Pendant l'intervalle de temps dt , le satellite balaye le volume $d\tau = (\pi a^2 V dt)$, dans lequel la masse d'atmosphère est $dm = \mu d\tau$. Le nombre de molécules rencontrées est alors $dN = dm/m$ et la variation de quantité de mouvement due aux chocs mous entre ces molécules et le satellite sera, d'après la question précédente :



$$d\vec{P} = dN(\Delta\vec{P}) = (\mu\pi a^2 V dt)(-\vec{V}) = -\pi a^2 \mu V^2 \frac{\vec{V}}{V} dt$$

La force résultante exercée sur le satellite est alors : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -(\pi a^2 \mu) V^2 \frac{\vec{V}}{V}$

Ainsi, les chocs mous entre les molécules de l'atmosphère et le satellite sont équivalents à une force unique de frottements de type quadratique, c'est-à-dire proportionnelle au carré de la vitesse et opposée à celle-ci. En particulier, le coefficient $k(z)$ introduit dans l'énoncé vaut $k(z) = -\pi a^2 \mu(z)$.

Si le satellite n'est pas sphérique, la surface πa^2 doit alors être remplacée par la surface transverse balayée, encore appelée « section efficace » de chocs.

3-a) On suppose que le satellite (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre de rayon r légèrement variable avec le temps. Par conséquent, la relation entre le rayon r et la vitesse V du satellite ainsi que l'expression de l'énergie mécanique sont :

$$V^2 = \frac{GM_T}{r} = g_0 \frac{R_T^2}{r} \quad \text{et} \quad E_m = -\frac{1}{2} \frac{GMM_T}{r} = -\frac{1}{2} \frac{Mg_0 R_T^2}{r} \quad (\text{avec } r = R_T + z)$$

où $g_0 = GM_T / R_T^2$ est le champ de pesanteur terrestre au sol.

La puissance de la force de frottements due aux chocs avec l'atmosphère vaut : $P = \vec{F} \cdot \vec{V} = -\pi a^2 \mu(z) V^3$

et est reliée à la variation de l'énergie mécanique du satellite par $dE_m / dt = P$. Comme

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_m}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{Mg_0 R_T^2}{r^2} \frac{dz}{dt}, \text{ il vient :}$$

$$\frac{1}{2} \frac{Mg_0 R_T^2}{r^2} \frac{dz}{dt} = -\pi a^2 \mu(z) V^3 \quad \text{d'où} \quad \frac{Mg_0 R_T^2}{r^2} \frac{dz}{dt} = -2\pi a^2 \mu(z) \left(g_0 \frac{R_T^2}{r} \right)^{3/2}$$

soit, avec $\mu(z) = \mu(0) \exp(-z/H)$: $\frac{1}{\sqrt{r}} \exp(z/H) dz = -\frac{2\pi a^2 \mu(0)}{M} R_T \sqrt{g_0} dt$

En posant $\tau = MH / (2\pi a^2 \mu(0) R_T \sqrt{g_0 R_T})$, la relation précédente devient :

$$\sqrt{\frac{R_T}{r}} \exp(z/H) dz = -\frac{2\pi a^2 \mu(0)}{M} R_T \sqrt{g_0 R_T} dt = -\frac{H}{\tau} dt$$

Comme $z \ll R_T$, $\sqrt{\frac{R_T}{r}} = \sqrt{\frac{R_T}{R_T + z}} = \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-1/2} \approx 1$ et, par conséquent : $\exp(z/H) dz = -\frac{H}{\tau} dt$

En notant z_i l'altitude initiale à l'instant $t = 0$, l'altitude z atteinte à l'instant t est alors donnée par :

$$\int_{z_i}^z \exp(z'/H) dz' = -\frac{H}{\tau} t$$

Soit : $\exp(z/H) - \exp(z_i/H) = -\frac{1}{\tau} t$ ou $\exp(z/H) = \exp(z_i/H) - \frac{1}{\tau} t$

b) Applications numériques : la durée de la chute vaut $t_{ch} = (e^{z_i/H} - 1)\tau \approx \tau e^{z_i/H}$; avec $\tau = 5\mu s$, on obtient $t_{ch} \approx 7870 s \approx 2h11min$. La vitesse V du satellite reste sensiblement constante lors de la chute (en effet $r \approx R_T$) et vaut :

$$V = \sqrt{g_0 R_T^2 / r} = \sqrt{g_0 R_T} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

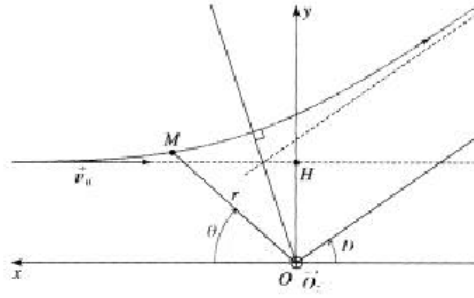
On vérifie bien que cette vitesse est très supérieure à la vitesse d'agitation thermique $v_{Th} \approx 500 \text{ m.s}^{-1}$ ($v_{Th} / V \approx 6.10^{-2}$).

25) L'atome de Bohr :

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés ($E_n = -E_0 / n^2$, avec n nombre quantique principal et $E_0 = 13,6 \text{ eV}$). On suppose que l'électron tourne autour du proton sur une trajectoire circulaire de rayon r_n . Le proton est immobile dans le référentiel du laboratoire. Montrer que le moment cinétique de l'électron par rapport au centre O du noyau est également quantifié ($\sigma_n = n\sigma_0$).

26) Diffusion Rutherford :

Une particule α , point matériel M de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse \vec{v}_0 , s'approche avec le paramètre d'impact $OH = b$ d'un noyau cible, point matériel O de masse $M \gg m$ et de numéro atomique Z . Le point M décrit une branche d'hyperbole de foyer O.



Calculer la distance de plus courte approche r_{\min} du noyau. Quel est l'angle de déviation ?

Solution :

1. Le référentiel barycentrique du système (noyau-particule α) est le référentiel d'origine G (centre d'inertie du système) qui se déplace à la vitesse du centre d'inertie $\vec{v}(G)$ (évaluée par rapport au référentiel du Laboratoire, supposé galiléen). Comme $M \gg m$, on peut considérer que le noyau est immobile dans le référentiel du Laboratoire et confondre ainsi ces deux référentiels et assimiler G au point O.

2. La conservation de l'énergie mécanique de la particule α , qui se déplace alors uniquement sur l'axe (Ox), permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a_0} \quad \text{soit} \quad a_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{E_0}$$

où E_0 représente l'énergie cinétique initiale de la particule α , égale à la valeur constante de son énergie mécanique.

3. Le mouvement de la particule alpha, soumise à une force centrale, est plan. La trajectoire est ici une branche d'hyperbole de foyer O (la force entre la particule alpha et le noyau est répulsive). Les deux intégrales premières du mouvement :

- Conservation du moment cinétique évalué par rapport à O (position du noyau) :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = -mbv_0\vec{u}_z = \sigma_O\vec{u}_z$$

- Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

permettent d'écrire l'énergie mécanique sous la forme :

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

Tout se passe comme si la particule α , soumise au potentiel efficace :

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

avait un mouvement purement radial. La distance a à laquelle la particule α passe au plus près du noyau est obtenue quand $\dot{r} = 0$ (l'énergie cinétique radiale $m\dot{r}^2/2$ est alors nulle), c'est-à-dire pour :

$$U_{\text{eff}}(a) = \frac{\sigma_0^2}{2ma^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a} = E_0$$

La distance a vérifie l'équation du second degré $E_0 a^2 - (qQ/4\pi\epsilon_0)a - \sigma_0^2/2m = 0$, qui peut s'écrire simplement, en utilisant les relations $E_0 = mv_0^2/2$, $\sigma_0 = -mbv_0$ et $a_0 = qQ/4\pi\epsilon_0 E_0$, sous la forme $a^2 - a_0 a - b^2 = 0$. La seule solution physiquement acceptable de cette équation est :

$$a = \frac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + b^2}$$

On remarque que l'on retrouve bien $a = a_0$ dans le cas d'un choc frontal ($b = 0$).

4-a) Le vecteur de Laplace sera une constante du mouvement si sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{\sigma}_0 + \vec{v} \wedge \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} + B \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{0}$$

Or : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$, $\vec{\sigma}_0 = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ (constante du mouvement), $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Par conséquent :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z + B \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \dot{\theta} (-\vec{u}_\theta) + B \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad \text{soit} \quad B = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$$

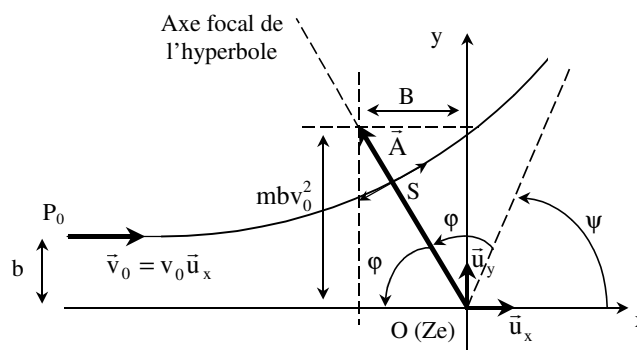
b) Puisque le vecteur de Laplace est une constante du mouvement, il peut être évalué en tout point de la trajectoire et notamment au sommet S de l'hyperbole (voir figure ci-dessous). Le vecteur vitesse, tangent à l'hyperbole, est alors parallèle au vecteur \vec{u}_θ . Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{\sigma}_0$ est donc porté par le vecteur \vec{u}_r , ainsi que le vecteur de Laplace. Finalement, la direction du vecteur de Laplace, donnée par la droite OS , est confondue avec l'axe focal de la trajectoire hyperbolique.

c) On évalue le vecteur de Laplace avant diffusion :

$$\vec{A} = v_0 \vec{u}_x \wedge (-mbv_0 \vec{u}_z) - B \vec{u}_x = mbv_0^2 \vec{u}_y - B \vec{u}_x$$

Par conséquent (voir figure), $\tan \varphi = mbv_0^2 / B$ soit, comme $2\varphi + \psi = \pi$:

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{B}{mbv_0^2} = \frac{B}{2bE_0} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2bE_0} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2bE_0}$$



d) Numériquement, on trouve $b = 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 21 \text{ fm}$ (fm désigne le fermi, qui vaut 10^{-15} m et qui est l'unité de longueur adaptée à la taille des noyaux atomiques). Le rayon r du noyau d'or peut être évalué avec la relation $r = r_0 A^{1/3}$ (où $r_0 = 1,3 \text{ fm}$), soit $r = 7,5 \text{ fm}$. Par conséquent, une valeur de b de l'ordre de 21 fm correspond à une interaction relativement périphérique.

Référentiels non galiléens

27) Etude d'un pendule simple :

Un pendule simple de longueur L et de masse m est accroché au plafond d'un wagon uniformément accéléré (accélération $\vec{\gamma}$).

- Déterminer l'inclinaison du pendule à l'équilibre.
- Déterminer la tension du fil à l'équilibre.
- Trouver la période des petites oscillations du pendule.

28) Tige tournant à vitesse angulaire constante :

Un point matériel M peut glisser sans frottement sur une tige (Or) , de masse négligeable, faisant un angle aigu constant α avec un axe vertical ascendant (Oz) . On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

A l'instant initial, M est en M_0 tel que $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ et sa vitesse par rapport à la tige (Or) est nulle. La tige (Or) , entraînée par un moteur, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de (Oz) .

Déterminer le mouvement du point M sur l'axe (Or) . Discuter suivant les valeurs de r_0 , ω et α

Solution :

La tige est dans le plan $(Ox'z)$. Dans le référentiel (R') lié à la tige :

$$m\ddot{r}\vec{u}_r = -mg\vec{u}_z + \vec{R} + m\omega^2\overrightarrow{HM} - 2m\vec{\omega} \wedge (\dot{r}\vec{u}_r)$$

On projette sur l'axe de la tige : $m\ddot{r} = -mg \cos \alpha + (m\omega^2 \sin^2 \alpha) r$

$$\ddot{r} - (\omega \sin \alpha)^2 r = -g \cos \alpha$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$r = Ae^{(\omega \sin \alpha)t} + Be^{-(\omega \sin \alpha)t} + \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2}$$

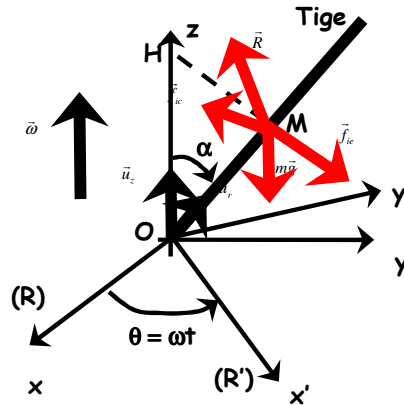
Compte tenu des CI : $r = \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} \right) \text{ch}(\omega \sin \alpha t) + \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2}$

3 cas sont à considérer :

$$r_0 > \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} : M \text{ grimpe le long de la tige.}$$

$$r_0 < \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} : M \text{ tombe en 0.}$$

$$r_0 = \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} : \text{position d'équilibre instable de } M.$$



Résolution par la conservation de l'énergie mécanique

Définition de l'énergie potentielle centrifuge : la force d'inertie centrifuge s'écrit :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overline{HM} = m\omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

Elle dérive de l'énergie potentielle centrifuge (en coordonnées cylindriques)

$$: \vec{f}_{ie} = -\frac{dE_{p,ie}}{d\rho} \vec{u}_\rho = m\omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

Par conséquent (à une constante près) : $E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2$

La force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse (donc au déplacement) ne travaille pas. La masse m constitue donc, dans (R') , un système conservatif dont l'énergie mécanique, constante, s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + mgr \cos \alpha - \frac{1}{2} m\omega^2 (r \sin \alpha)^2$$

Par dérivation temporelle : $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{r}\ddot{r} + mgr \cos \alpha - m(\omega \sin \alpha)^2 r\dot{r} = 0$

Soit : $\dot{r} + g \cos \alpha - (\omega \sin \alpha)^2 r = 0$

$$\dot{r} - (\omega \sin \alpha)^2 r = -g \cos \alpha$$

On retrouve l'équation différentielle obtenue en utilisant le pseudo-PFD dans (R') .

29) Pourquoi la Lune n'est-elle pas capturée par le Soleil ?

Données : $d_S = 150.10^6$ km et $d_L = 384.10^3$ km (distances Terre-Soleil et Terre-Lune) ; $m_S = 2.10^{30}$ kg, $m_T = 6.10^{24}$ kg et $m_L = 7,4.10^{22}$ kg (masses du Soleil, de la Terre et de la Lune). Les trois astres Soleil, Terre et Lune sont supposés être à symétrie sphérique.

1. Comparer les intensités des forces gravitationnelles \vec{F}_{TL} et \vec{F}_{SL} exercées respectivement par la Terre (de centre T) et le Soleil (de centre S) sur la Lune (de centre L). Tracer, sur une figure claire, l'allure des trajectoires de la Lune dans le référentiel géocentrique puis dans le référentiel héliocentrique. Pourquoi la Lune n'est-elle pas capturée par le Soleil ?

2. On désire évaluer la distance Terre-Lune d_L maximale au-delà de laquelle la Lune échapperait, par effets de marée, à la satellisation terrestre. On supposera, dans cette question, le référentiel géocentrique comme étant non galiléen.

a) Montrer que l'accélération \vec{a}_L de la Lune, évaluée dans le référentiel géocentrique, peut s'écrire sous la forme (où G désigne la constante de la gravitation) :

$$\vec{a}_L = -G \frac{(m_T + m_L)}{TL^3} \vec{TL} + \vec{\varphi}$$

où le vecteur $\vec{\varphi}$ (qui est équivalent au champ des marées océaniques terrestres) sera exprimé notamment en fonction de m_s et des vecteurs \vec{SL} et \vec{ST} .

b) En faisant des approximations légitimes, exprimer en fonction de d_s , m_T , m_L et m_s la distance Terre-Lune (notée $d_{L,0}$) maximale au-delà de laquelle la Lune échapperait, par effets de marée, à la satellisation terrestre. Calculer numériquement cette distance critique $d_{L,0}$.

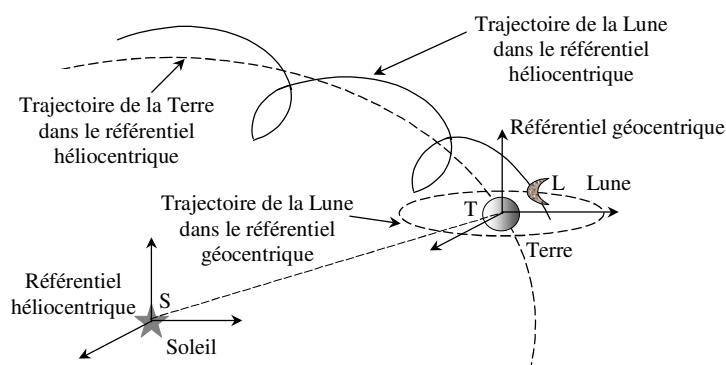
Solution :

1. Les intensités des forces gravitationnelles \vec{F}_{TL} et \vec{F}_{SL} exercées respectivement par le Soleil et la Terre sur la Lune sont (en assimilant la distance Lune-Soleil à la distance Terre-Soleil) :

$$F_{TL} = G \frac{m_L m_T}{d_L^2} \quad \text{et} \quad F_{SL} = G \frac{m_L m_s}{d_s^2} \quad \text{soit} \quad \frac{F_{SL}}{F_{TL}} = \frac{m_s}{m_T} \left(\frac{d_L}{d_s} \right)^2$$

Numériquement, $F_{SL} / F_{TL} \approx 2,2$: ainsi, la force gravitationnelle exercée par le Soleil est plus de deux fois plus importante que celle exercée par la Terre.

L'allure des trajectoires de la Lune dans les référentiels géocentrique et héliocentrique est donnée sur la figure ci-dessous :



Le mouvement principal de la Lune dans le référentiel héliocentrique est dû à l'influence prépondérante du Soleil ; la présence de la Terre ne faisant que perturber ce mouvement.

2-a) La Lune est soumise aux influences gravitationnelles de la Terre et du Soleil. Le théorème du centre d'inertie appliqué à la Lune, dans le référentiel géocentrique considéré ici comme étant non galiléen, donne, en notant \vec{a}_L le vecteur accélération de la Lune dans ce référentiel (m_L désignant la masse de la Lune) :

$$m_L \vec{a}_L = -G \frac{m_L m_T}{TL^3} \vec{TL} - G \frac{m_L m_S}{SL^3} \vec{SL} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

où la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} vaut, puisque le référentiel géocentrique est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique, $\vec{f}_{ie} = -m_L \vec{a}(T)$ où $\vec{a}(T)$ désigne l'accélération du centre T de la Terre dans le référentiel héliocentrique. Or, le théorème du centre d'inertie appliqué à la Terre dans ce même référentiel donne :

$$m_T \vec{a}(T) = -G \frac{m_T m_S}{ST^3} \vec{ST} - G \frac{m_T m_L}{TL^3} \vec{LT} \quad \text{soit} \quad \vec{a}(T) = -G \frac{m_S}{ST^3} \vec{ST} - G \frac{m_L}{TL^3} \vec{LT}$$

D'où :

$$\vec{f}_{ie} = G \frac{m_L m_S}{ST^3} \vec{ST} + G \frac{m_L^2}{TL^3} \vec{LT}$$

La force d'inertie de Coriolis \vec{f}_{ic} étant nulle puisque le mouvement d'entraînement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique est une translation, il vient finalement :

$$m_L \vec{a}_L = -G \frac{m_L (m_T + m_L)}{TL^3} \vec{TL} - G \frac{m_L m_S}{SL^3} \vec{SL} + G \frac{m_L m_S}{ST^3} \vec{ST}$$

D'où l'expression du vecteur accélération \vec{a}_L dans le référentiel géocentrique :

$$\vec{a}_L = -G \frac{(m_T + m_L)}{TL^3} \vec{TL} + \vec{\varphi} \quad \text{avec} \quad \vec{\varphi} = G m_S \left(-\frac{\vec{SL}}{SL^3} + \frac{\vec{ST}}{ST^3} \right)$$

Le vecteur $\vec{\varphi}$ apparaît comme un terme gravitationnel « différentiel », provenant de la prise en compte de l'influence du Soleil en deux points T et L proches l'un de l'autre. Ce terme est de nature comparable au champ des marées qui intervient lorsque l'on étudie, par exemple, le phénomène des marées océaniques ou lors de la fragmentation de corps célestes. Il est maximal lorsque les trois astres sont alignés.

b) En particulier, arrivée au point A (voir figure suivante), la Lune échappera à l'attraction terrestre si l'accélération calculée précédemment \vec{a}_L dans le référentiel géocentrique, en projection sur l'axe (SA) orienté de S vers A s'annule ou devient négative. Elle s'annule pour une distance $d_{L,0}$ vérifiant l'équation :

$$a_L = \frac{m_T + m_L}{d_{L,0}^2} + m_S \left(-\frac{1}{(d_S - d_{L,0})^2} + \frac{1}{d_S^2} \right) = 0$$

En supposant que $d_{L,0} / d_S \ll 1$, alors :

$$\frac{1}{(d_S - d_{L,0})^2} = \frac{1}{d_S^2} \left(1 - \frac{d_{L,0}}{d_S} \right)^{-2} \approx \frac{1}{d_S^2} \left(1 + 2 \frac{d_{L,0}}{d_S} \right)$$

Et, par conséquent :

$$\frac{m_T + m_L}{d_{L,0}^2} + \frac{m_S}{d_S^2} \left(-2 \frac{d_{L,0}}{d_S} \right) = 0$$

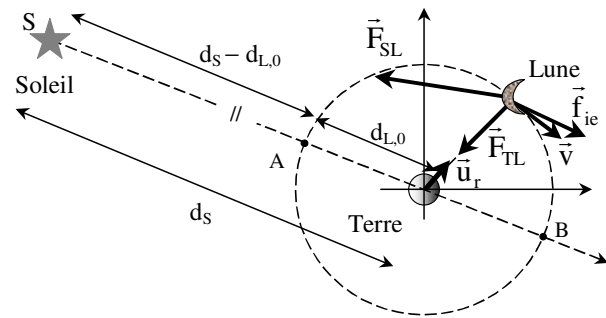
Soit, finalement :

$$d_{L,0} = \left(\frac{m_T + m_L}{2m_S} \right)^{1/3} d_S$$

Numériquement,

$$d_{L,0} = 1,15 \cdot 10^{-2} d_S = 1720 \cdot 10^3 \text{ km},$$

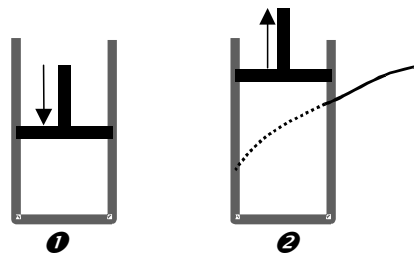
soit environ 4,5 fois la distance Terre-Lune actuelle (on vérifie bien *a posteriori* que $d_{L,0}/d_S \ll 1$). Ainsi, si $d_L > d_{L,0}$ (dans ce cas, $a_L < 0$), la Lune s'échappe de l'attraction terrestre. On peut notamment vérifier que le même calcul que précédemment, mais évalué lorsque la Lune est au point B (où les trois astres sont de nouveau alignés, mais dans l'ordre S-T-L, voir figure), conduit au 1^{er} ordre en $d_{L,0}/d_S$, au même résultat pour la distance critique $d_{L,0}$.



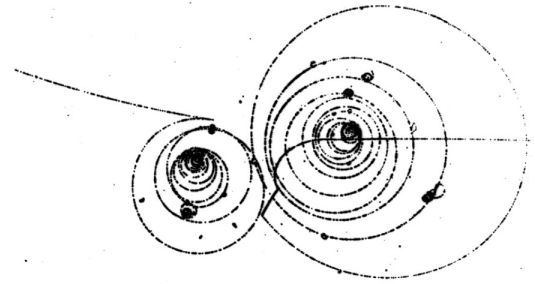
Mouvements de particules dans des champs électriques et magnétiques

30) Chambre à bulles :

Le principe d'une chambre à bulles (détecteur mis au point en 1953 par le physicien américain Glaser, prix Nobel de physique en 1960) est le suivant : un liquide (souvent de l'hydrogène) placé dans une chambre, est comprimé par un piston (phase (1), figure ci-dessous) ; sa température est supérieure à sa température d'ébullition sous la pression atmosphérique, mais inférieure à sa température d'ébullition sous la pression à laquelle il se trouve placé. Juste après le passage de la particule à détecter, on détend le piston (pendant 1 ms environ, phase (2)), et le liquide revient à la pression atmosphérique. L'ébullition débute autour des ions créés par la particule. Si on éclaire par un flash et que l'on photographie, la trajectoire est matérialisée par un chapelet de petites bulles.



La figure suivante montre un exemple de cliché (réalisé en 1973) représentant la désintégration d'un méson K^+ en vol. On remarque nettement deux trajectoires en forme de spirale qui traduisent l'apparition de particules chargées stables lors de la désintégration du méson.



Cet exercice se propose de modéliser de manière simple le mouvement horizontal d'un proton dans une chambre à bulles.

On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le proton de masse m et de charge e , considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale \vec{v}_0 en un point fixe O ; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} . Afin d'interpréter la trajectoire précédente en forme de spirale, on modélise la force que le liquide exerce sur le proton par une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$, où k est une constante positive et \vec{v} la vitesse du proton à l'instant t . On posera $\omega_c = eB / m$ et $\tau = m / k$.

1. Etablir l'équation différentielle vectorielle du mouvement du proton.
2. On désigne par $(Oxyz)$ un trièdre orthogonal direct lié au laboratoire et par $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base de vecteurs unitaires associée. On choisit $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. Montrer que (et déterminer les constantes a et b en fonction de ω_c et τ) :

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \quad (2)$$

3. On pose i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$; pour résoudre le système d'équations précédent, on définit le nombre complexe $\underline{V} = v_x + iv_y$. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est de la forme $\underline{V} = v_0 \exp(-(b + ia)t)$. En déduire v_x et v_y .
4. Déduire de \underline{V} l'expression de $\underline{X} = x(t) + iy(t)$ en fonction de a , b , v_0 et t .
5. Déterminer la limite, notée \underline{X}_∞ , de \underline{X} lorsque t tend vers l'infini. En déduire la position limite $M_\infty(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de ω_c , τ et v_0 . Donner l'allure de la trajectoire.

Données :

$$B = 10^{-2} T, m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, e = 1,6 \cdot 10^{-19} C, v_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}, \tau = 10^{-5} \text{ et } 10^{-6} \text{ s} .$$

Solution :

1. Le principe fondamental appliqué au proton permet d'obtenir l'équation différentielle vectorielle du mouvement : $m d\vec{v} / dt = e\vec{v} \wedge \vec{B} - k\vec{v}$.

2. Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ vaut :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = (v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_z = Bv_y \vec{u}_x - Bv_x \vec{u}_y$$

L'équation différentielle du mouvement donne, en projection sur les axes (Ox) et (Oy) (il n'y a pas de mouvement selon l'axe (Oz)) :

$$m \frac{dv_x}{dt} = eBv_y - kv_x \quad \text{et} \quad m \frac{dv_y}{dt} = -eBv_x - kv_y$$

Soit, avec $a = eB / m = \omega_c$ et $b = k / m = 1 / \tau$:

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \quad (2)$$

3. En effectuant la somme (1) + i(2) des équations précédentes, on obtient :

$$\frac{dv_x}{dt} + i \frac{dv_y}{dt} = av_y - iav_x - b(v_x + iv_y) = -ia(v_x + iv_y) - b(v_x + iv_y)$$

En posant $\underline{V} = v_x + iv_y$, l'équation différentielle vérifiée par \underline{V} est alors :

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = -ia\underline{V} - b\underline{V} \quad \text{soit} \quad \frac{d\underline{V}}{dt} + (ia + b)\underline{V} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme $\underline{V} = \underline{A} \exp(-(ia + b)t)$. Or, à $t = 0$, $\underline{V} = v_0$, par conséquent $\underline{A} = v_0$ et finalement $\underline{V} = v_0 \exp(-(ia + b)t)$. On déduit alors v_x et v_y en déterminant partie réelle et partie imaginaire de \underline{V} . Préalablement, on peut écrire \underline{V} sous la forme :

$$\underline{V} = v_0 e^{-bt} e^{-iat} = v_0 e^{-bt} (\cos(at) - i \sin(at))$$

Par conséquent :

$$v_x = \text{Re}(\underline{V}) = v_0 e^{-bt} \cos(at) \quad \text{et} \quad v_y = \text{Im}(\underline{V}) = -v_0 e^{-bt} \sin(at)$$

4. La fonction complexe \underline{X} s'obtient par intégration de \underline{V} par rapport au temps :

$$\underline{X} = -\frac{1}{ia + b} v_0 \exp(-(ia + b)t) + \text{cste}$$

Comme $\underline{X} = 0$ à $t = 0$, la constante d'intégration vaut $\frac{1}{ia + b} v_0$ et, finalement :

$$\underline{X} = \frac{v_0}{ia + b} (1 - \exp(-(ia + b)t))$$

5. Lorsque t tend vers l'infini, alors $\exp(-(ia + b)t) \rightarrow 0$ et $\underline{X} \rightarrow \underline{X}_\infty = \frac{v_0}{b + ia}$. En écrivant \underline{X}_∞

sous la forme $\underline{X}_\infty = \frac{v_0}{b + ia} = v_0 \frac{b - ia}{b^2 + a^2}$, on en déduit les coordonnées de la position limite

M_∞ :

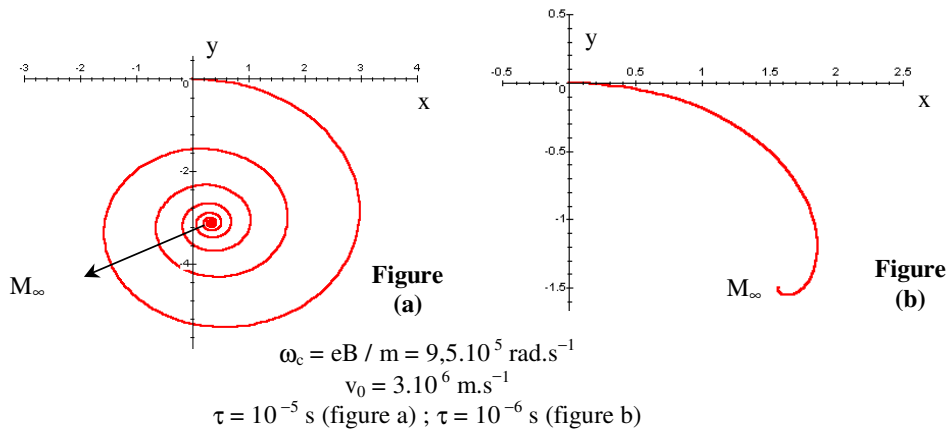
$$x_\infty = \frac{b}{b^2 + a^2} v_0 \quad \text{et} \quad y_\infty = -\frac{a}{b^2 + a^2} v_0$$

En fonction de ω_c , τ et v_0 , il vient finalement :

$$x_\infty = \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega_c^2} v_0 \quad \text{et} \quad y_\infty = -\frac{\tau^2 \omega_c}{1 + \tau^2 \omega_c^2} v_0$$

L'expression trouvée précédemment de \underline{X} permet de déterminer les coordonnées x et y du proton en fonction du temps, sachant que $x = \text{Re}(\underline{X})$ et $y = \text{Im}(\underline{X})$. Pour cela, on transforme \underline{X} sous la forme :

$$\underline{X} = \frac{v_0}{ia + b} (1 - \exp(-(ia + b)t)) = v_0 \frac{b - ia}{a^2 + b^2} (1 - e^{-bt} (\cos(at) - i \sin(at)))$$



Par conséquent, en remplaçant a et b par ω_c et $1 / \tau$, on obtient finalement :

$$x = \frac{v_0 \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \left[(1 - e^{-t/\tau} \cos \omega_c t) + \omega_c \tau e^{-t/\tau} \sin \omega_c t \right]$$

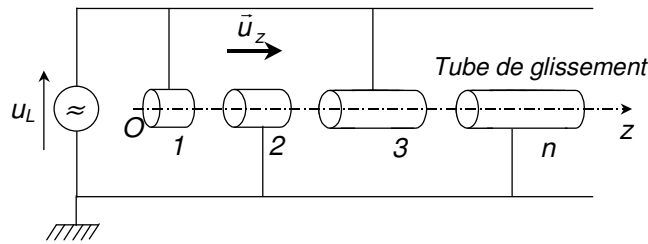
$$y = \frac{v_0 \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \left[-\omega_c \tau (1 - e^{-t/\tau} \cos \omega_c t) + e^{-t/\tau} \sin \omega_c t \right]$$

L'allure de la trajectoire, tracée à l'aide d'un logiciel de calculs formels (« Maple ») est donnée ci-dessus, pour les deux valeurs proposées pour le paramètre τ . Pour $\tau = 10^{-5} \text{ s}$ (figure (a)), la trajectoire obtenue à l'aide de ce modèle simple de force de frottement de type fluide est semblable à celle observée sur le cliché présenté au début de l'exercice. Si l'effet qualitatif est bien expliqué, l'interaction entre les particules au sein d'une chambre à bulles est certainement beaucoup plus complexe que ne le suppose cet exercice !

31) Accélérateurs linéaires de particules :

Tous les accélérateurs de particules ont les mêmes composants de base : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions. Dans les accélérateurs circulaires (cyclotrons et synchrotrons), les particules sont guidées par des champs magnétiques tout au long d'une trajectoire circulaire qui les fait passer de nombreuses fois à travers le même champ électrique accélérateur. Dans les accélérateurs linéaires, tels que celui étudié dans cet exercice, les particules effectuent un trajet en ligne droite passant à travers une succession de tubes où règnent des champs électriques qui augmentent leur énergie au fur et à mesure qu'elles avancent.

Des particules chargées (des protons par exemple, de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) passent dans une série de tubes métalliques qui présentent la symétrie de révolution et de même axe (appelés « tubes de glissement ») et connectés à une source de tension alternative (voir figure) $u_L = U_L \sin(2\pi\nu t)$. Cette tension crée un champ électrique accélérateur axial dans les intervalles entre les tubes. On considère que le champ est nul à l'intérieur de ces tubes métalliques. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ parallèle à l'axe de l'accélérateur.



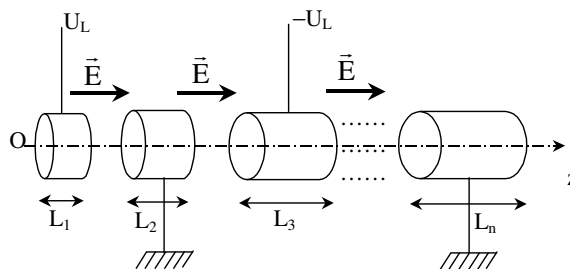
On considère les protons qui pénètrent en O suivant l'axe (Oz) des tubes à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire lorsque $u_L = 0$. On veut que ces protons soient accélérés par la tension maximale U_L toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes.

a. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ? Sachant que les protons sont pré-accélérés sous une tension continue U_0 , exprimer leur énergie cinétique $E_{c,n}$ à la sortie du n ème tube en fonction de U_0 et U_L . Faire l'application numérique avec $U_0 = 140$ kV, $U_L = 100$ kV et $n = 20$. Les protons sont-ils relativistes ?

b. Quel doit être le temps mis par ces protons pour traverser le 1^{er} tube, le 2^{ème} tube et le n ème tube, afin que soient réalisées les conditions d'accélération précédente ? Exprimer les longueurs L_1, L_2, L_n , respectivement des premier, deuxième et n ème tubes en fonction de U_0, U_L, v, e et m_p . Calculer ces trois longueurs pour $v = 25$ MHz, $n = 20, U_0 = 140$ kV et $U_L = 100$ kV.

Solution :

1. Un proton passe du 1^{er} tube au potentiel $+U_L$ au 2nd tube au potentiel nul, puis au 3^{ème} tube au potentiel $-U_L$ puis au 4^{ème} tube au potentiel nul, et ainsi de suite... (voir figure). Dans tous les cas, l'accroissement d'énergie cinétique ΔE_c d'un proton entre deux tubes consécutifs sera par conséquent $\Delta E_c = eU_L$. A la sortie du 1^{er} tube, l'énergie cinétique sera $E_{c,1} = eU_0$. A la sortie du 2nd tube, elle deviendra $E_{c,2} = e(U_0 + U_L)$ et à la sortie du n ème tube, elle sera $E_{c,n} = e(U_0 + (n - 1)U_L)$. Pour $n = 20$, on obtient $E_{c,20} = 3,26 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 2,04 \text{ MeV}$. La vitesse alors atteinte par un proton est $v_{20} = \sqrt{2E_{c,20} / m_p} = 2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$, soit $v_{20} / c \approx 0,07$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$) : on peut encore considérer que les protons accélérés ne sont pas relativistes (puisque $v_{20} / c < 0,1$).



Lorsque les longueurs des tubes de glissement sont bien choisies (c'est le but de la question suivante), le proton est accéléré à chaque sortie des tubes par un champ électrostatique \vec{E} toujours dirigé dans le même sens, qui est celui des potentiels décroissants.

2. Soit $T = 1/v$ la période de la tension accélératrice. Lors du trajet des protons dans le 1^{er} tube, la tension doit passer de la valeur nulle à la valeur $+U_L$; la durée du trajet, effectué à la

vitesse v_0 , est donc $T/4$ et la longueur du 1^{er} tube sera $L_1 = v_0 T/4 = v_0 / 4v$. La durée du trajet dans les tubes suivants est $T/2$ (en effet, la tension accélératrice passe soit de $+U_L$ à $-U_L$, soit de $-U_L$ à $+U_L$). La longueur du $n^{\text{ième}}$ tube en découle :

$$L_n = \frac{v_n T}{2} = \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{2e}{m_p} (U_0 + (n-1)U_L)}$$

Comme $v_0 = \sqrt{2eU_0 / m_p}$, la longueur du 1^{er} tube s'écrit $L_1 = L_0 / 2$ avec $L_0 = (\sqrt{2eU_0 / m_p}) / 2v$. La longueur L_n peut ensuite s'écrire en fonction de L_0 :

$$L_n = \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{2e}{m_p} (U_0 + (n-1)U_L)} = L_0 \sqrt{1 + (n-1) \frac{U_L}{U_0}}$$

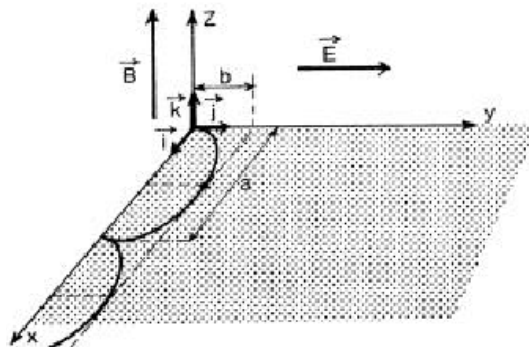
Numériquement, on trouve :

$$L_0 = 10,3 \text{ cm} ; L_1 = 5,2 \text{ cm} ; L_2 = 13,6 \text{ cm} ; L_{20} = 39,6 \text{ cm}$$

Le plus grand accélérateur linéaire à protons est celui de Los Alamos, aux Etats Unis ; il mesure 800 m de long et permet d'accélérer des protons jusqu'à une énergie de 8 MeV. Le plus grand accélérateur linéaire d'électrons et de positrons (l'antiparticule de l'électron, de même masse mais de charge électrique $+e$) est situé à Stanford (Etats Unis) ; long de 3 km, il accélère ces particules à des énergies de l'ordre de 50 GeV, les rendant ainsi relativistes.

32) Mouvement cycloïdal :

Dans le référentiel (R), une particule M de masse m et de charge q , se trouve en $t=0$ à l'origine O, animée d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps : $\vec{E} = E\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B\vec{u}_z$.



- Etudier le mouvement de M.
- Calculer la vitesse moyenne de la particule selon (Ox), appelée vitesse de dérive v_D .
- Interpréter la trajectoire dans (Oxyz) en écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R') en translation rectiligne et uniforme de vitesse \vec{v}_D par rapport à (R).

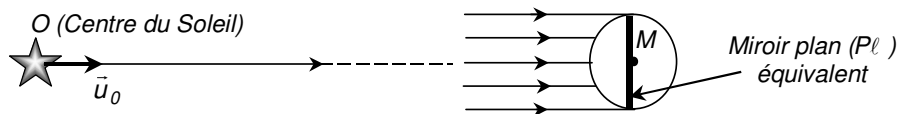
33) Orientation de la queue de comètes :

L'énergie E et la quantité de mouvement \vec{p} d'un photon sont données respectivement par $E = hc / \lambda$ et $\vec{p} = (E / c)\vec{u} = (h / \lambda)\vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé dans le sens de propagation, h la constante de Planck et c la vitesse de la lumière dans le vide ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s et $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹). On supposera le rayonnement solaire isotrope et monochromatique, de longueur d'onde moyenne $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$.

Données : $R_T = 6\,400$ km (rayon terrestre), $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg (masse du Soleil) et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI (constante de la gravitation universelle).

1. La Terre, située en moyenne à une distance $d = 150$ millions de km du Soleil, reçoit une puissance de rayonnement solaire par unité de surface égale à $\Pi_S = 0,15$ W.cm⁻². On suppose que l'émission solaire se fait de manière isotrope et l'on néglige l'absorption du rayonnement solaire par l'atmosphère. Indiquer comment varie la puissance reçue par unité de surface avec la distance r de la source au récepteur et calculer littéralement la puissance totale P émise par le Soleil sous forme de rayonnement électromagnétique.

2. On considère une particule matérielle sphérique, parfaitement réfléchissante, de centre M , de rayon a_0 et de masse volumique uniforme μ , se trouvant à la distance r du Soleil ($r \gg a_0$). La lumière issue du Soleil s'y réfléchit en suivant les lois de l'optique géométrique et l'on supposera que toute la lumière incidente est réfléchiée dans la direction arrière comme dans le cas d'un miroir plan sous incidence normale.



a) Déterminer la valeur moyenne \vec{F}_R de la force due au rayonnement solaire que subit la particule. On exprimera le résultat littéral en fonction de P , a_0 et r .

b) Exprimer la force de gravitation \vec{F}_G exercée par le Soleil sur la particule.

c) Pour quelle valeur a_0^* du rayon a_0 de la particule a-t-on $F_R = F_G$ (en norme) ? Faire l'application numérique pour $\mu = 1$ g.cm⁻³. L'observation astronomique de la queue de certaines comètes a mis en évidence leur répulsion par le Soleil. Justifier, à partir du résultat précédent, le qualificatif qui leur a été donné de « poussiéreuses ».

Solution :

1. Le rayonnement émis par le Soleil étant isotrope, la puissance P émise par le Soleil est également répartie sur une sphère centrée sur le Soleil et de rayon r . Par conséquent, la puissance reçue par unité de surface à la distance r est $P / 4\pi r^2$. Dans le cas particulier de la puissance surfacique reçue par la Terre, avec $R_T \ll d$:

$$\Pi_S = P / 4\pi d^2 \quad \text{d'où} \quad P = 4\pi d^2 \Pi_S = 4,2 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

2-a) Un photon, de quantité de mouvement initiale $\vec{p}_0 = (h / \lambda)\vec{u}_0$, repart, après réflexion sur la particule M , dans la direction opposée en cédant à celle-ci la quantité de mouvement $\vec{P}_R = 2\vec{p}_0 = (2h / \lambda)\vec{u}_0$. Pendant l'intervalle de temps dt , l'énergie lumineuse dE reçue par la particule, $dE = (P / 4\pi r^2) \pi a_0^2 dt$, correspond à un nombre de photons $dN = dE / hv = dE / (hc / \lambda)$.

La quantité de mouvement $d\vec{P}_R$ reçue par la particule pendant dt est alors : $d\vec{P}_R = (dN)\vec{P}_R = (Pa_0^2 / 2cr^2) dt \vec{u}_0$. La force moyenne exercée sur la particule est par conséquent :

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{P}_R}{dt} = \frac{Pa_0^2}{2cr^2} \vec{u}_0$$

b) La force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la particule vaut, en notant $m = 4\pi a_0^3 \mu / 3$ la masse de la particule :

$$\vec{F}_G = -G \frac{mM_S}{r^2} \vec{u}_0 = -\frac{4}{3} \pi \mu a_0^3 G \frac{M_S}{r^2} \vec{u}_0$$

c) On remarque que la force résultante qui s'exerce sur la particule, $\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_G$, varie comme $1/r^2$ et que son sens (attractif ou répulsif) dépend de la taille de la particule. En particulier, pour des particules de gros rayons, la force gravitationnelle dominera alors que la force de radiation sera prépondérante pour des particules plus petites. Ainsi, la force de radiation sera supérieure à la force gravitationnelle lorsque $a_0 \leq a_0^*$, ou le rayon limite a_0^* vérifie l'équation :

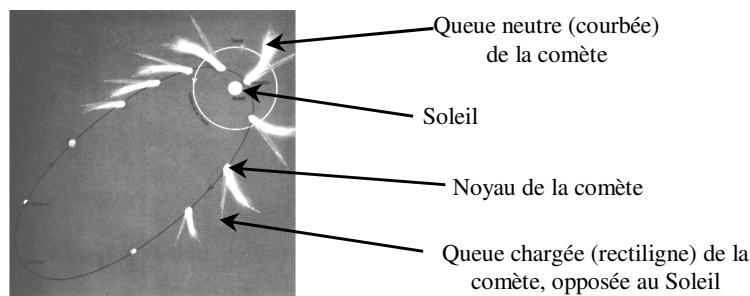
$$\|\vec{F}_R\| = \|\vec{F}_G\| \quad \text{soit} \quad \frac{Pa_0^2}{2cr^2} = \frac{4}{3} \pi \mu a_0^3 G \frac{M_S}{r^2}$$

D'où l'expression du rayon limite de la particule pour lequel la force de radiation prédomine sur la force gravitationnelle :

$$a_0^* = \frac{3}{8\pi} \frac{P}{\mu GM_S}$$

Numériquement, avec $\mu = 1 \text{ g.cm}^{-3}$, $a_0^* \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,3 \mu\text{m}$.

Les queues des comètes peuvent être de différentes natures. L'une, composée de particules chargées, sera sensible aux particules chargées du vent solaire. L'autre, composée de particules neutres (grains de poussières) sera sensible à l'attraction gravitationnelle et à la force de radiation due au Soleil. Lorsque ces particules sont de taille suffisamment faible (d'où le nom de comètes « poussiéreuses »), la force de radiation domine et la queue neutre de la comète sera alors dirigée dans la direction opposée au Soleil, en étant légèrement courbée¹ (voir figure ci-dessous).



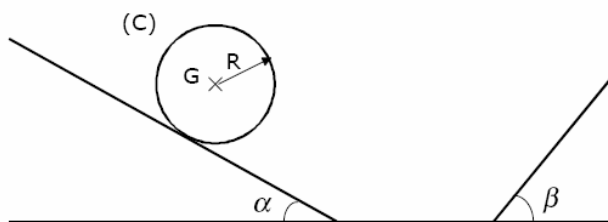
Par contre, pour des particules de grande taille (comme le noyau de la comète, par exemple), la force gravitationnelle sera prépondérante et les lois de Kepler régissant le mouvement des astres seront bien applicables !

¹ Pour des informations complémentaires sur les comètes, on pourra consulter l'ouvrage intitulé « Les comètes, témoins de la naissance du système solaire », par J. Crovisier et T. Encrenaz, aux Editions Belin (collection « La croisée des sciences »).

A l'approche du périhélie (point de la trajectoire le plus proche du Soleil), les deux queues peuvent atteindre plusieurs dizaines de millions de kilomètres de longueur, alors que les dimensions du noyau ne dépassent guère quelques kilomètres !

Mécanique des solides

34) Roulement d'un solide sur un plan incliné :



Un cylindre homogène de masse M , de rayon R , de centre d'inertie G , roule sans glissement sur un plan incliné.

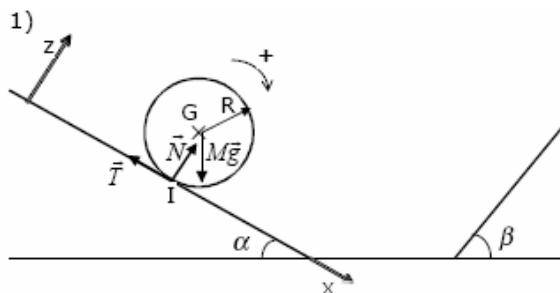
Son moment d'inertie par rapport à G est noté :

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

Le cylindre n'a pas de vitesse initiale, et G se trouve à une hauteur $h+R$ à $t=0$ (par rapport au plan horizontal).

- 1) Déterminer la vitesse de G lorsque le cylindre (C) arrive sur le plan horizontal.
- 2) Le roulement sans glissement continue sur le plan horizontal, puis sur un plan incliné d'un angle β , à priori différent de α ; lorsque le cylindre arrête de monter sur le plan incliné, le point G est-il plus haut, aussi haut ou moins haut qu'à son point de départ ?
- 3) On supprime maintenant tout frottement sur le plan incliné d'un angle β : même question qu'en 2).

Solution :



Le système est le cylindre; il y a, à priori, deux degrés de liberté (un de translation, l'autre de rotation).

Mais le mouvement de RSG fournira une relation supplémentaire: il n'y a donc **qu'un degré de liberté**, on choisira donc un théorème énergétique.

- Le bilan des forces est : \vec{T} , \vec{N} (forces de contact) et le poids $M\vec{g}$ (pour qu'il y ait **roulement**, il faut nécessairement une composante \vec{T} , sinon on a un pur glissement : il ne faut donc pas confondre absence de glissement avec absence de frottement).

Puisque la vitesse de glissement \vec{v}_g est nulle, les forces de contact ne travaillent pas dans un référentiel lié au plan incliné \Rightarrow nous pourrons donc utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

• Par ailleurs, écrivons la relation de distribution des vitesses dans un solide, entre les points I et G : $\vec{v}_G = \vec{v}_I = \vec{v}_{I_2 \in (C)} - \vec{v}_{I_1 \in \text{plan}} = \vec{v}_{I_2 \in (C)} - \vec{0} = \vec{v}(G) + \vec{IG} \wedge \vec{\omega}$, où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée du cylindre. On a donc : $\vec{0} = v(G)\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = [v(G) - R\omega]\vec{e}_x \Rightarrow \boxed{v(G) = R\omega}$

(on peut vérifier que lorsque $v(G) > 0$, le cylindre tourne dans le sens horaire = sens +)

• L'énergie cinétique est donnée par le théorème de König :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2(G) + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2(G) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}MR^2 \times \left(\frac{v(G)}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv^2(G)$$

L'énergie potentielle est de la forme $E_P = MgZ_G$, où Z_G est l'altitude du centre d'inertie, comptée à partir du plan horizontal. Il vient donc :

$$E_C + E_P = cste = 0 + Mg(h + R) = \frac{3}{4}Mv^2(G) + MgR \Rightarrow \boxed{v(G) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

2) Lorsque le cylindre arrêtera de monter le long du 2^{ème} plan incliné, $v(G)$ et ω seront nuls, ainsi que l'énergie cinétique : l'énergie potentielle aura donc la même valeur qu'au point de départ sur le 1^{er} plan incliné \Rightarrow le point G se trouvera à la même hauteur, soit $h+R$.

3) Cette fois, $\vec{T} = \vec{0}$ sur le 2^{ème} plan incliné ; le TMC barycentrique donne : $J \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \omega = cste$.

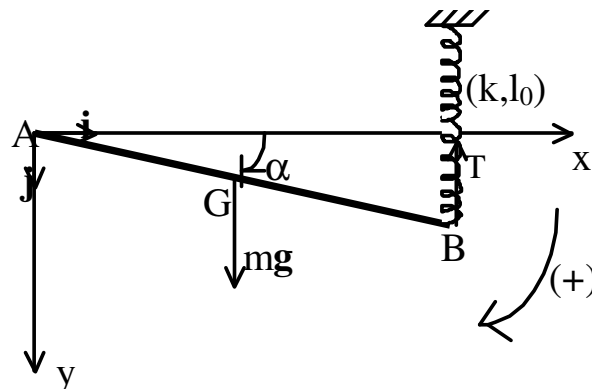
Lorsque le cylindre stoppe sa montée, l'énergie cinétique de translation est nulle, mais pas celle de rotation ; il y a donc moins d'énergie cinétique convertie en énergie potentielle \Rightarrow le point G se trouvera à une hauteur inférieure à $h+R$. On a, en notant Z_F la hauteur finale de G :

$$Mg(h + R) = MgR + \frac{1}{2}Mv^2(G) = \frac{1}{2}J\omega_F^2 + MgZ_F \quad (\omega_F = \text{vitesse de rotation à la fin de la montée}) \Rightarrow$$

$$\omega_F^2 = \left[\frac{v(G)}{R}\right]^2 = \frac{4gh}{3R^2} \Rightarrow Mg(h + R) = mgZ_F + \frac{1}{2} \times \frac{MR^2}{2} \times \frac{4gh}{3R^2} = mgZ_F + \frac{Mgh}{3} \Rightarrow \boxed{Z_F = \frac{2h}{3} + R < h + R}$$

35) Mouvement d'une barre autour d'un axe fixe :

Une barre AB, de longueur 2ℓ et de masse m , est mobile autour d'un axe Az horizontal. Le point B est fixé à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est fixe. Dans sa position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical.



La barre est écartée légèrement de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

Déterminer la période des petites oscillations de la barre. On considère que le point B se déplace verticalement.

Solution :

On utilise le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Az), dans le référentiel galiléen du laboratoire. Ce théorème donne : $\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} = mg\ell \cos \alpha - 2f\ell \cos \alpha$

L'angle α étant petit, $\cos \alpha \approx 1$. Lorsque la barre est à l'équilibre : $mg\ell - 2f_0\ell = 0$, où f_0 est la tension du ressort à l'équilibre, qui vaut par ailleurs : $f_0 = k(\ell_1 - \ell_0)$, où ℓ_1 est la longueur du ressort à l'équilibre.

Quand la barre fait l'angle α , la longueur du ressort a varié de $2\ell\alpha$ et f vaut : $f = k(\ell_1 + 2\ell\alpha - \ell_0) = f_0 + 2k\ell\alpha$

L'équation du mouvement devient alors : $\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} = mg\ell - 2f_0\ell - 4k\ell^2\alpha = -4k\ell^2\alpha$, soit :

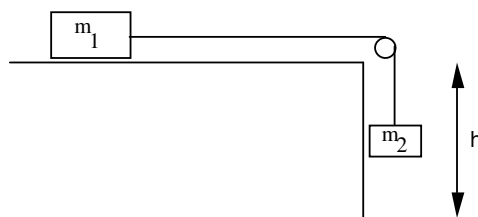
$$\ddot{\alpha} = -\frac{3k}{m}\alpha$$

La barre effectue donc des oscillations sinusoïdales de période : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

Autre méthode : utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

36) Détermination d'un coefficient de frottement :

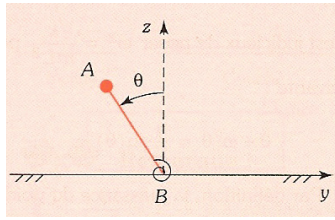
On considère le dispositif suivant : le fil reliant les deux masses est inextensible. Il n'y a pas de pertes dues à la poulie. A $t = 0$, le fil entre les deux masses est tendu. On lâche la masse m_2 d'une hauteur h . La masse m_1 s'arrête à une distance $h + d$ relativement à la situation à $t = 0$.



Déterminer le coefficient de frottement f entre la table et m_1 en fonction de m_1 , m_2 , h et d .

37) Pendule inversé :

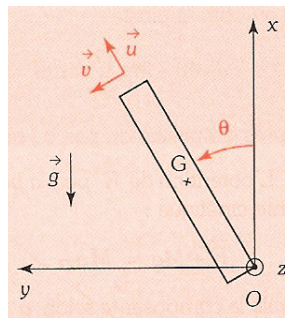
Un pendule est constitué d'un point matériel de masse m placé à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, dont l'autre extrémité B est fixée sur un support. L'ensemble, rigide, est mobile en rotation autour de l'axe $\Delta = (Bx)$, perpendiculaire à la tige. On note θ l'angle entre la tige et l'axe verticale (Bz) . On admet que l'action subie par la tige en V présente un moment des forces $\vec{M}_B = -k\theta\vec{u}_x$. On note $L = AB$.



- a) Déterminer l'énergie potentielle totale du pendule.
- b) En déduire les positions d'équilibre et discuter leur stabilité.

38) Chute d'une cheminée :

Une cheminée est modélisée par un cylindre homogène de masse M , de longueur D et de rayon très petit devant D . L'équilibre de la cheminée est rompu, elle amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (Oxy). On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale. Le moment d'inertie en G autour de (Gz) vaut $J_G = \frac{1}{12}MD^2$. La liaison pivot en O est parfaite.

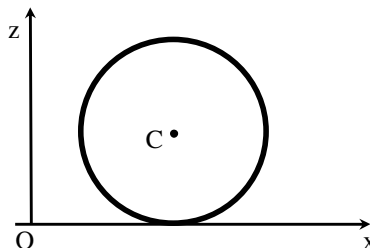


- a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .
- b) Exprimer, en fonction de θ , les coordonnées R_u et R_v de la réaction du sol en O . Pour quelle valeur de θ la cheminée décolle-t-elle du sol ?

39) Mouvement d'un cerceau :

Un cerceau de masse M et de rayon R est lancé avec les conditions initiales suivantes :

$$\vec{v}_C(0) = v_0 \vec{u}_x \quad (v_0 > 0) \quad \text{et} \quad \vec{\omega}(0) = -\omega_0 \vec{u}_y \quad (\omega_0 > 0)$$



Il reste en contact avec le plan horizontal ; ce contact est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f .

- a) Déterminer $\vec{v}(t)$ et $\vec{\omega}(t)$ pour la 1^{ère} phase du mouvement. A quel instant cette phase s'achève-t-elle ?
- b) À quelle condition le cerceau revient-il en arrière ?

Solution :

a) Le mouvement du cerceau est donné par la vitesse $\vec{v}_C = v(t)\vec{u}_x$ de son centre C et son vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega(t)\vec{u}_y$. La vitesse de glissement par rapport au sol est $\vec{v}_g = (v - R\omega)\vec{u}_x$. A $t = 0$, $\vec{v}_g = (v_0 + R\omega_0)\vec{u}_x$ est non nulle : la 1^{ère} phase est une phase avec glissement dans le sens des x positifs.

Les forces s'exerçant sur le cerceau sont : le poids et la réaction du support. Le théorème de la résultante cinétique donne :

$$M \frac{dv}{dt} = T \quad \text{et} \quad -Mg + N = 0$$

Le théorème du moment cinétique en C donne : $MR^2 \frac{d\omega}{dt} = -RT$

De plus, durant la 1^{ère} phase : $T = -fN$. Il vient :

$$\frac{dv}{dt} = -fg \quad \text{soit} \quad v(t) = v_0 - fgt \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{fg}{R} \quad \text{soit} \quad \omega(t) = -\omega_0 + \frac{fg}{R}t$$

La vitesse de glissement à l'instant t est alors : $v_g(t) = v(t) - R\omega(t) = v_0 + R\omega_0 - 2fgt$. Elle s'annule à l'instant :

$$t_0 = \frac{v_0 + R\omega_0}{2fg} \quad : \quad \text{la 1^{ère} phase s'achève à cet instant}$$

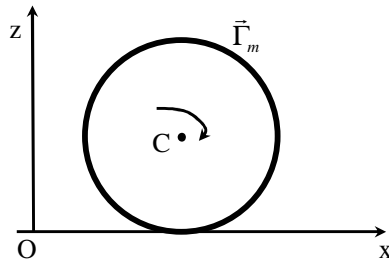
b) La 2^{ème} phase est une phase de roulement sans glissement. L'équation $T = -fN$ n'est plus valable durant cette phase et doit être remplacée par $v_g(t) = v(t) - R\omega(t) = 0$, les autres équations restant valables. On en déduit :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad v(t) = v(t_0) = \frac{v_0 - R\omega_0}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \omega(t) = \omega(t_0) = \frac{-\omega_0 + \frac{v_0}{R}}{2}$$

Le cerceau revient en arrière si $R\omega_0 > v_0$.

40) Démarrage d'une automobile :

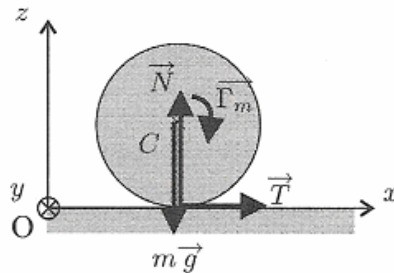
Le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f . La roue a une masse m , un rayon R et un moment d'inertie J par rapport à son axe. On lui applique un couple moteur $\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m \vec{u}_y$.



Quelle est la condition sur $\vec{\Gamma}_m$ pour qu'il y ait roulement sans glissement ?

Solution :

Pour que la roue ne glisse pas sur le sol, il faut que $T < fN$.



Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la roue et projeté sur les axes Ox et Oz donne :

$$m\ddot{x}_C = T \quad \text{et} \quad 0 = -mg + N$$

Le théorème du moment cinétique barycentrique appliqué à la roue et projeté donne :

$$J\dot{\omega} = -RT + \Gamma_m$$

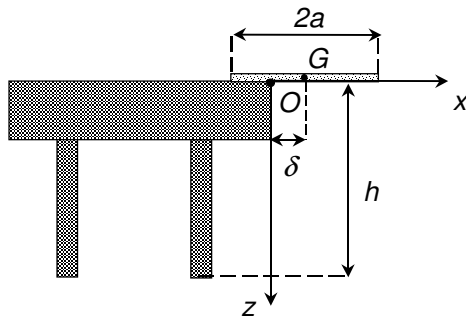
La condition de roulement sans glissement donne : $\dot{x}_C - R\omega = 0$. Après calculs, on obtient :

$$T = \frac{\Gamma_m}{R\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)}$$

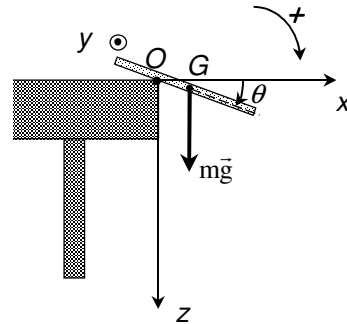
Et il faut donc que $\Gamma_m < fmgR\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)$.

41) Principe de Murphy (chute d'une tartine beurrée) :

Lorsqu'une tartine beurrée, distraitemment posée en équilibre instable au bord d'une table, tombe sur le sol, elle atterrit le plus souvent sur le côté beurré ! Cette constatation expérimentale a conduit les physiciens à énoncer le principe « de la tartine beurrée » qui stipule finalement que rien ne se passe sans ennuis, d'où encore le nom de principe de « l'enquiquinement maximal » donné à ce principe.



Tartine sur la table prête à tomber



Chute de la tartine

Afin de tenter d'expliquer ce principe, on modélise la tartine par un parallélépipède de longueur $2a$, de largeur b , d'épaisseur négligeable et de masse m uniformément répartie. La tartine est placée au bord d'une table de hauteur $h \gg a$. Le mouvement est décrit dans le repère $R(O, x, y, z)$ direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table, l'axe (Oy) est porté par le rebord de la table et l'axe (Oz) , vertical, est dirigé vers le bas. Les petits côtés de la tartine sont parallèles à (Oy) .

A l'instant initial, la tartine est horizontale et sa vitesse nulle. Les coordonnées de son centre d'inertie G sont $(\delta, 0, 0)$. La tartine amorce une rotation sans glissement autour de l'arête (Oy) du bord de la table. A l'instant t , la tartine est repérée par l'angle θ (voir figure, $\theta > 0$). La vitesse angulaire est notée ω . Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Gy) , parallèle à (Oy) et passant par G vaut $J_{Gy} = ma^2 / 3$.

1. En admettant que la tartine constitue un système conservatif, montrer que, lors de la rotation autour de l'arête de la table :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sin \theta \quad (\text{avec } \omega_0^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \text{ et } \eta = \frac{\delta}{a}, \text{ coefficient de surplomb})$$

2. La tartine quitte la table à un instant pris comme origine des temps, l'angle θ vaut alors $\pi / 2$ et la vitesse angulaire initiale ω_0 . Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ (on suppose que le mouvement de G reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table), en négligeant les frottements dus à l'air ?

3. Dans les circonstances courantes, le coefficient de surplomb η ne dépasse guère 0,02. On pourra donc supposer, dans la suite, que $\eta \ll 1$ (soit $\delta \ll a$). Exprimer alors la durée de chute τ de la tartine en fonction de h et g . Calculer τ pour $h = 75 \text{ cm}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Quelle est la chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol ?

4. Déterminer l'angle θ_1 dont a tourné la tartine lorsqu'elle heurte le sol. Faire l'application numérique avec $\eta = 0,02$ et $a = 5 \text{ cm}$. Conclusion.

5. Pour quelle hauteur de table H la tartine ne tombe-t-elle plus sur le côté beurré ? Quelle serait la taille du géant qui utiliserait cette table ?

6. Les hypothèses de conservation de l'énergie mécanique et de rotation complète sans glissement jusqu'à $\theta = \pi / 2$ de la tartine beurrée peuvent certainement être remises en question. La possibilité de voir atterrir la tartine du côté non beurré s'en trouve-t-elle augmentée ou diminuée ?

Solution :

1. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Oy) est, d'après le théorème de Huygens, $I_{Oy} = (ma^2/3) + m\delta^2$. L'énergie cinétique est alors :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{Oy} \omega^2 \quad \text{soit} \quad E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{ma^2}{3} + m\delta^2 \right) \omega^2$$

L'énergie potentielle de la tartine vaut :

$$E_p = -mgz_G \quad \text{soit} \quad E_p = -mg\delta \sin \theta$$

A l'instant initial, $E_c = E_p = 0$. La conservation de l'énergie mécanique de la tartine (considérée ici comme étant un système conservatif) lors de la rotation autour de l'arête de la table donne :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{ma^2}{3} + m\delta^2 \right) \omega^2 - mg\delta \sin \theta = \text{cste} = 0$$

D'où l'expression donnée dans l'énoncé :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sin \theta \quad (\text{avec } \omega_0^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \text{ et } \eta = \frac{\delta}{a})$$

2. Soit $\vec{\sigma}_G$ le moment cinétique barycentrique de la tartine beurrée. Le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel barycentrique donne, puisque la tartine n'est soumise qu'à son poids de moment nul par rapport à G :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{\sigma}_G = \vec{\text{cste}}$$

La règle du « tire-bouchon » permet d'écrire le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ sous la forme $\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{u}_y = \omega \vec{u}_y$ (où \vec{u}_y désigne le vecteur unitaire de l'axe (Oy)). Alors :

$$\vec{\sigma}_G = J_{Gy} \vec{\omega} = -\frac{ma^2}{3} \dot{\theta} \vec{u}_y$$

On en déduit finalement que $\dot{\theta} = \text{cste} = \omega_0$ (avec ω_0 choisie ici positive !) : la vitesse angulaire de la tartine est constante. La loi d'évolution de l'angle θ en fonction du temps lors de la chute de la tartine s'en déduit : $\theta = \omega_0 t + \pi/2$.

3. Le théorème du centre d'inertie appliqué à la tartine donne $m\vec{a}(G) = m\vec{g}$, soit $\vec{a}(G) = \vec{g}$; pour $\theta = \pi/2$, $z_G = \delta$ et $\vec{v}(G) = -\delta\omega_0 \vec{u}_x$. Par conséquent, en projection sur l'axe (Oz), $z_G = gt^2/2 + \delta$. En considérant $a \ll h$, la tartine touche le sol pour $z_G \approx h$, c'est-à-dire à l'instant τ tel que :

$$\tau = \sqrt{2 \frac{h - \delta}{g}} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

L'application numérique donne $\tau = 0,39$ s : la probabilité de rattraper la tartine avant qu'elle ne touche le sol semble bien faible !

4. Lorsque la tartine touche le sol, l'angle θ vaut $\theta_1 = \omega_0 \tau + \pi/2$. Numériquement, avec $\omega_0 = 4,85 \text{ rad.s}^{-1}$, $\theta_1 = 3,46 \text{ rad} = 200^\circ$: la tartine atterrit du côté beurré !

5. Pour que la tartine n'atterrisse plus du côté beurré, il faut que $\theta_1 \geq 3\pi/2$; par conséquent, le temps de chute minimal T doit vérifier $\omega_0 T + \pi/2 = 3\pi/2$, soit $T = \pi/\omega_0$. Avec $T = \sqrt{2H/g}$, la hauteur de table correspondante sera donnée par $H = \pi^2 g / 2\omega_0^2$.

Numériquement, $H \approx 2$ m : on peut estimer la taille du géant utilisant cette table à environ 4,5 m.

6. Si le glissement sur le bord de la table en présence de frottements apparaît pour un angle $\theta < \pi/2$, la vitesse angulaire de la tartine sera alors moins élevée que celle calculée à la question (4). De plus, le centre d'inertie G possédant alors une vitesse initiale le long de (Oz) , le temps de chute sera certainement moindre : la tartine atterrira toujours du côté beurré et la hauteur de la table du géant de la question précédente devra être encore plus grande !

Statique des fluides

42) Masse de l'atmosphère terrestre :

Partant de la relation de $P(z) = P_0 \exp(-z/h)$ (isotherme à 0 °C), estimer littéralement puis numériquement la masse M_a de l'atmosphère terrestre en sachant que son épaisseur est grande devant $h = 8,0$ km (à 0°C) et petite devant le rayon terrestre $R = 6\,400$ km.

Solution :

Le modèle de l'atmosphère terrestre isotherme conduit à $P(z) = P_0 e^{-z/h}$, avec $h = \frac{RT_0}{Mg}$. La masse

volumique vaut, d'après la loi des GP : $\rho = \frac{PM}{RT_0}$, d'où une relation équivalente pour la masse

volumique : $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/h}$.

Soit H l'épaisseur de l'atmosphère (avec $H \gg h$), alors la masse m_{atm} est donnée par :

$$m_{\text{tot}} = \int_0^H 4\pi(R_T + z)^2 \rho_0 e^{-z/h} dz$$

On suppose $R_T + z \approx R_T$ et $H \rightarrow \infty$: $m_{\text{tot}} = \int_0^\infty 4\pi R_T^2 \rho_0 e^{-z/h} dz = 4\pi R_T^2 \rho_0 \int_0^\infty e^{-z/h} dz = 4\pi R_T^2 \rho_0 h$

On obtient une masse équivalente à une atmosphère de masse volumique moyenne ρ_0 et d'épaisseur $h \ll R_T$.

43) Action de l'eau sur la porte d'une écluse :

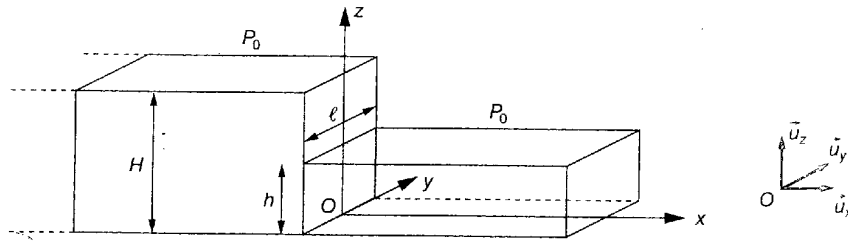
Considérons la porte d'une écluse, située dans le plan yOz , de largeur l et de hauteur H . Cette porte subit l'action de l'eau d'un canal, en équilibre, dont la surface libre se trouve :

- à une hauteur H dans le domaine $x < 0$,

- à une hauteur $h < H$ dans le domaine $x > 0$ (Fig.).

L'eau est un liquide incompressible, de masse volumique ρ .

Données numériques: $H = 4$ m; $h = 2$ m; $\ell = 3$ m; $g = 9,8$ m s⁻²; $\rho = 10^3$ kgm⁻³.



1- Exprimer littéralement puis calculer numériquement la résultante \vec{F} des forces pressantes exercées sur la porte de l'écluse.

2. Calculer le moment par rapport à O des forces de pression.

3. Montrer que ce torseur est équivalent à une force appliquée en un point C dont on déterminera la position.

Solution :

1) On ne tient pas compte de P_0 qui existe à gauche et à droite. Pour la force due à l'eau située à gauche :

$$\vec{F}_g = \int_0^H \rho g (H - z) \ell dz \vec{u}_x = \frac{1}{2} \rho g \ell H^2 \vec{u}_x$$

De même pour la force due à l'eau située à droite : $\vec{F}_d = -\int_0^h \rho g (h - z) \ell dz \vec{u}_x = -\frac{1}{2} \rho g \ell h^2 \vec{u}_x$

Globalement : $\vec{F}_{tot} = \frac{1}{2} \rho g \ell (H^2 - h^2) \vec{u}_x$

2) Le moment en O de la force de gauche est : $\vec{M}_g = \int_0^H z \vec{u}_z \wedge \rho g (H - z) \ell dz \vec{u}_x = \rho g \ell \frac{H^3}{6} \vec{u}_y$

Globalement : $\vec{M}_{tot} = \frac{\rho g \ell}{6} (H^3 - h^3) \vec{u}_y$

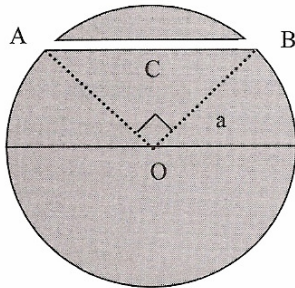
3) On cherche un point C tel que : $\vec{M}_{tot} = \frac{\rho g \ell}{6} (H^3 - h^3) \vec{u}_y = \vec{OC} \wedge \vec{F}_{tot} = \vec{OC} \wedge \frac{1}{2} \rho g \ell (H^2 - h^2) \vec{u}_x$

On pose $\vec{OC} = z_c \vec{u}_z$: $z_c = \frac{\frac{\rho g \ell}{6} (H^3 - h^3)}{\frac{1}{2} \rho g \ell (H^2 - h^2)} = \frac{1}{3} \frac{H^3 - h^3}{H^2 - h^2} = \frac{1}{3} \frac{H^2 + Hh + h^2}{H + h}$

44) Au pays des sélènes :

Dans une nouvelle de science fiction H.G.Wells raconte qu'une civilisation de type humaine existe sur la Lune et plus précisément à l'intérieur de la Lune. Les habitants (les sélènes) vivent dans des cavernes reliées à la surface par des tunnels. Soit O le centre de la Lune, AB un tunnel traversant la

Lune et vu de O sous l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$. La caverne des sélènes est située au centre C du tunnel. Il règne en C la même pression atmosphérique qu'à la surface de la Terre.



On donne le rayon de la Lune $a = 1750$ km et le champ de gravitation à la surface de la Lune $g_L = 1,6 \text{ m/s}^2$. L'air du tunnel est un gaz parfait en équilibre thermique à la température $T = 300 \text{ K}$. On considère que la présence du tunnel n'affecte pas le champ gravitationnel lunaire et on note ρ_L la masse volumique de la Lune.

Quelle est la pression atmosphérique à la surface de la Lune ?
Qu'en pensez-vous ?

Solution :

L'équilibre de la colonne d'air du tunnel se traduit par : $\text{grad} p = \rho \mathbf{g}$
Le champ gravitationnel à l'intérieur du tunnel vaut : $\mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi\rho_L G r \mathbf{u}_r$.

De l'équation des gaz parfaits $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$, on tire $\frac{dp}{p} = -\frac{4\pi G\rho_L M}{3RT} r dr$

$$\ln \frac{p_B}{p_C} = -\frac{4\pi G\rho_L M}{6RT} \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) = -\frac{\pi G\rho_L M a^2}{3RT}$$

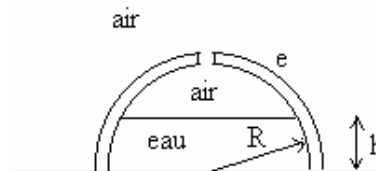
Le champ de gravitation à la surface est : $g_L = \frac{Gm_L}{a^2} = -\frac{4\pi G\rho_L a}{3}$

$$\ln \frac{p_B}{p_C} = -\frac{g_L M a}{4RT} \Rightarrow \frac{p_B}{p_C} = 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow p_B = 3 \cdot 10^{-4} \text{ atm}$$

La pression calculée est très faible mais du même ordre de grandeur que la pression réelle. Il y a un peu de science dans la fiction...

45) Cloche hémisphérique :

Une cloche hémisphérique (rayon R , épaisseur $e \ll R$, masse m) repose sur un plan horizontal. Elle contient de l'eau jusqu'à une hauteur h . Un orifice pratiqué au sommet permet de maintenir la pression atmosphérique à l'interface eau/air. L'épaisseur de paroi e est suffisamment faible pour considérer comme identiques les surfaces intérieure et extérieure de la cloche.



Montrer qu'il existe une hauteur critique h_c de h au delà de laquelle l'équilibre est rompu (la cloche se soulève).

Application numérique : cloche en verre de densité $d = 2,5$ telle que $e/R = 0,02$.

Solution :

$$p = \mu g(h - z) + p_a$$

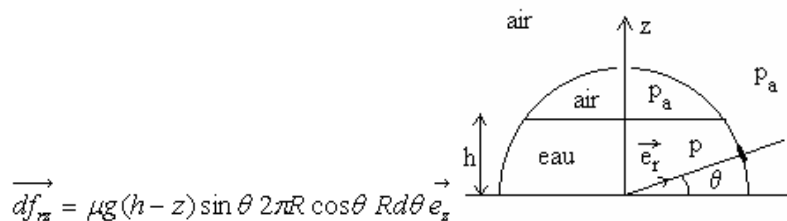
Sur un élément de surface d^2S de la cloche en contact avec l'eau, la résultant des forces de pression est :

$$\vec{d^2 f_r} = \mu g(h - z) d^2 S \vec{e}_r$$

Par raison de symétrie de révolution autour de l'axe z , la contribution de cette force à la force résultante est :

$$\vec{d^2 f_{rz}} = \mu g(h - z) \sin \theta \vec{e}_z$$

En associant tous les éléments de surface à même hauteur z :



$$\vec{df_{rz}} = \mu g(h - z) \sin \theta 2\pi R \cos \theta R d\theta \vec{e}_z$$

Pour intégrer à tous les éléments de surface de la cloche, il est commode d'utiliser $z = R \sin \theta$ et $h = R \sin \theta_0$.

On obtient $\vec{f_{rz}} = \mu g \frac{\pi h^3}{3} \vec{e}_z$

Si $mg < \mu g \frac{\pi h^3}{3}$, la cloche se soulève. $h_c = \left(\frac{3m}{\pi \mu} \right)^{1/3} = (6R^2 ed)^{1/3} = 0,67 R$

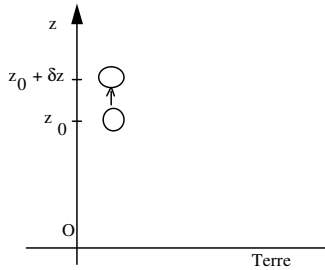
46) Modèle d'atmosphère et stabilité :

On considère que l'atmosphère est un gaz parfait soumis au champ de pesanteur uniforme et présentant une température variant avec l'altitude suivant une loi $T = T_0 - a z$ ($a > 0$).

I - Paramètres décrivant l'atmosphère.

- 1- Déterminer l'évolution de la pression en fonction de l'altitude.
- 2- Montrer qu'il existe une relation du type $PT^\alpha = \text{cte}$ entre la pression et la température en un point donné; α étant un paramètre lié à a et aux caractéristiques du gaz.

II - Stabilité de l'atmosphère.



Soit une "bulle" d'air en équilibre à l'altitude z_0 ; elle se déplace de δz sous l'action d'une perturbation ($\delta z < z_0$). On suppose que la transformation de la bulle est adiabatique quasi statique et que la bulle est en équilibre de pression avec l'air extérieur situé à son niveau.

A quelle condition peut-on considérer que la bulle est en équilibre stable à l'altitude z_0 ? On notera $\gamma = C_p / C_v$, rapport qui sera considéré comme constant.

Solution :

I-1-2) Voir cours : $P(z) = \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{Ra}} P_0$. On voit que :

$$PT^\alpha = cste \quad avec \quad \alpha = -\frac{Mg}{Ra}$$

II) A la cote $z_0 + dz$, la bulle est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède, de résultante :

$$\vec{F} = (\rho_{int} - \rho_{ext}) V \vec{g}$$

Or, (loi des GP), $\rho = \frac{PM}{RT}$:

$$\vec{F} = \frac{MPV}{R} \left(\frac{1}{T_{int}} - \frac{1}{T_{ext}} \right) \vec{g}$$

Si le déplacement $dz > 0$, cette force correspondra à une force de rappel (et donc équilibre stable) si $T_{int} < T_{ext}$. Or, à l'intérieur de la bulle, la transformation est adiabatique réversible et donc :

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = cste \quad soit \quad dT_{int} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{P} dP$$

A l'extérieur, on aura $PT^\alpha = cste$ soit $dT_{ext} = -\frac{1}{\alpha} \frac{T}{P} dP$.

L'équilibre est donc stable si $dT_{int} < dT_{ext}$, soit :

$$a < \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}$$