Préparation au Concours Cycle Polytechnicien
Filière universitaire : candidats internationaux
(O.Granier, ITC, du 24 au 29 octobre 2011)

TD corrigés de thermodynamique

1) Théorie cinétique du gaz parfait monoatomique :

a) Effusion (calcul approché) : un récipient de volume $V_0 = 1$ L, maintenu à température constante égale à 0°C, contient de l'hélium sous la pression $P_0 = 1$ mm Hg. A l'extérieur du récipient règne le vide. On note $n = N / V_0$ le nombre de particules par unité de volume. Le récipient est percé d'un petit trou d'aire $s = 1\ \mu m^2$.

Calculer le temps au bout duquel la pression a diminué de moitié. On confondra vitesse moyenne (en module) et vitesse quadratique moyenne. On supposera de plus que les particules ne peuvent aller que dans trois directions possibles.

b) Le récipient précédent ne communique plus avec le vide mais avec un récipient de même volume V_0, initialement vide et maintenu à la température constante de 0°C. Déterminer les densités particulaires n_1 et n_2 dans les deux récipients en fonction du temps. Les tracer en fonction du temps et déterminer leurs valeurs lorsque l'équilibre est atteint.

Solution :

a) Un bilan de matière effectué entre t et t + dt donne : $dN(t) = -\frac{1}{6}n^* uSdt = -\frac{1}{6}\frac{N(t)}{V_0}uSdt$

Soit : $\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{uS}{6V_0}dt = -\frac{1}{\tau}dt \qquad (\tau = \frac{6V_0}{uS})$

L'intégration donne : $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

Sachant que $P(t) = n^* kT_0 = \frac{N(t)}{V_0}kT_0$, il vient, avec $P_0 = \frac{N_0}{V_0}kT_0$: $P(t) = P_0 e^{-t/\tau}$

La pression a chuté de moitié à l'instant t_f telle que : $t_f = \tau \ln(2)$.

b) Un bilan de matière donne cette fois (les particules peuvent passer du récipient 1 au récipient 2 et vice – versa) :

$$dN_1 = -\frac{1}{6}\frac{N_1}{V_0}uSdt + \frac{1}{6}\frac{N_2}{V_0}uSdt \qquad et \qquad dN_2 = -dN_1$$

On a donc $N_1 + N_2 = N_0$, d'où : $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{1}{6}\frac{uS}{V_0}(2N_1 - N_0)$ *soit* $N_1(t) = \frac{N_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{3V_0}{uS}t}\right)$

On en déduit : $N_2(t) = \frac{N_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{3V_0}{uS}t}\right)$, au bout d'un temps infini, $N_1 = N_2 = \frac{N_0}{2}$.

2) Equation d'état d'un gaz de photons :

Dans une enceinte de volume V, on décrit la lumière par un gaz de photons, particules sans interaction possédant une énergie E, une quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u}$ (où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire donnant le sens de propagation de la lumière), avec c la vitesse de la lumière dans le vide ici.

On note n* la densité de photons et on suppose que les photons ne peuvent se diriger en gros que selon les trois axes Ox, Oy et Oz d'un repère cartésien choisi.

a) Exprimer l'énergie interne du gaz en fonction de n*, E et V.

b) On considère une surface dS perpendiculaire à l'axe (Ox). Où sont les photons susceptibles de frapper cette surface entre les instants t et t + dt ? En déduire le nombre d^2N de chocs avec la paroi.

c) On suppose le choc photon – paroi élastique : le photon arrivant avec la quantité de mouvement $p\vec{u}_x$ repart avec la quantité de mouvement $-p\vec{u}_x$. En déduire la quantité de mouvement transférée à dS pendant dt puis l'expression de la pression P en fonction de E et de n*, puis en fonction de U et de V. Comparer avec un gaz monoatomique.

Solution :

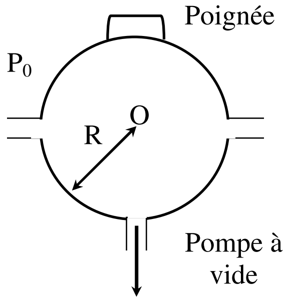
a) $U = n^*EV$

b) De manière classique : $\delta^2 N = \frac{1}{6}n^* dScdt$

c) $d^2\vec{P} = \delta^2 N(2p\vec{u}_x) = \frac{1}{3}n^* EdSdt\vec{u}_x$, d'où $p = \frac{1}{3}n^* E = \frac{U}{3V}$. Pour un GP monoatomique, on a $p = \frac{2U}{3V}$.

3) Hémisphères de Magdeburg :

Soit une sphère constituée de deux hémisphères dits « de Magdeburg », en contact suivant un cercle de rayon R. L'hémisphère inférieur, supposé fixe, est relié à une pompe à vide destinée à rendre la pression intérieure très faible (par rapport à la pression atmosphérique P_0).



a) Exprimer en fonction de P_0 et de R la force F qu'un opérateur doit exercer sur la poignée de l'hémisphère supérieur dans le but de séparer les deux hémisphères.

b) Calculer numériquement cette force avec $P_0 = 10^5$ Pa et R = 5 cm.

4) Atmosphère isotherme avec champ de pesanteur variable :

Le champ de pesanteur terrestre varie avec l'altitude selon la loi :

$$g(z) = \left(\frac{R}{R+z}\right)^2 g_0$$

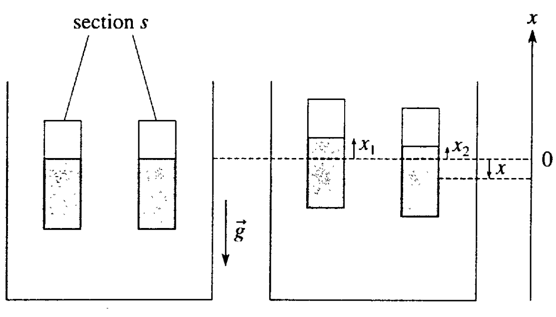
g_0 désignant le champ de pesanteur au sol et R est le rayon terrestre.

On considère un modèle d'atmosphère terrestre isotherme en équilibre, de température T_0. L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. On note P_0 et μ_0 la pression et la masse volumique de l'air au niveau du sol (z = 0).

Déterminer la pression P(z) à l'altitude z en fonction de P_0, μ_0, g_0, R et z.

5) Oscillations de deux flotteurs :

Deux flotteurs cylindriques, identiques (de section s et de masse m) peuvent osciller dans l'eau d'un récipient de section S. Soit ρ la masse volumique de l'eau. Les positions des flotteurs sont repérées par leurs déplacements verticaux x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.



a) Déterminer le système d'équations différentielles qui définit le mouvement des deux flotteurs (on admettra que la surface libre reste horizontale et que le théorème d'Archimède est applicable).

b) Résoudre ce système en supposant qu'à l'instant initial, les deux flotteurs sont dans leurs positions d'équilibre respectives, avec des vitesses initiales $2v_0$ pour le premier et v_0 pour le second.

Solution :

a) Lorsque les flotteurs bougent, le niveau de l'eau dans le récipient est modifié ; on note u le déplacement algébrique de ce niveau, mesuré sur un axe vertical ascendant.

La conservation du volume total de l'eau dans le récipient conduit à l'équation :

$$(x_1 + x_2)s = -u(S - 2s)$$

A l'équilibre, le volume immergé de chaque flotteur est $V_{im} = m/\rho$.

On applique le théorème du centre d'inertie à chaque flotteur. En projection sur la verticale :

$$m\ddot{x}_1 = -mg + \rho(V_{im} - (x_1 - u)s)g = -\rho(x_1 - u)sg$$
$$m\ddot{x}_2 = -mg + \rho(V_{im} - (x_2 - u)s)g = -\rho(x_2 - u)sg$$

En utilisant la relation donnant u, on obtient :

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_1 - \omega_1^2 x_2$$

Avec :

$$\omega_1^2 = \frac{\rho g}{m}\frac{s(S-s)}{S-2s} \quad et \quad \omega_2^2 = \frac{\rho g}{m}\frac{s^2}{S-2s}$$

b) Pour découpler ces deux équations différentielles, on peut les sommer puis les soustraire. On arrive alors à deux équations vérifiées par la somme Σ ou la différence D :

$$\ddot{\Sigma} + \Omega_1^2 \Sigma = 0 \quad et \quad \ddot{D} + \Omega_2^2 D = 0$$

$$\text{Avec } \Omega_1^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad et \quad \Omega_2^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2$$

En utilisant les CI, on obtient :

$$x_1 + x_2 = \frac{3v_0}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 t) \quad et \quad x_1 - x_2 = \frac{v_0}{\Omega_2}\sin(\Omega_2 t)$$

On en déduit ensuite facilement les expressions de x_1 et de x_2.

Autre méthode :

On cherche les modes propres associés au système différentiel suivant :

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_1 - \omega_1^2 x_2$$

On pose, en notation complexe : $\underline{x}_1 = \underline{A}_1 e^{j\omega t}$ et $\underline{x}_2 = \underline{A}_2 e^{j\omega t}$. En reportant dans le système :

$$-\omega^2 x_1 = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2$$
$$-\omega^2 x_2 = -\omega_2^2 x_1 - \omega_1^2 x_2$$

Soit, en réordonnant sous la forme d'un système de Cramer :

$$(\omega^2-\omega_1^2)x_1-\omega_2^2x_2=0$$
$$-\omega_2^2x_1+(\omega^2-\omega_1^2)x_2=0$$

Ce système ne peut admettre de solutions non triviales ($x_1 = x_2 = 0$) que si son déterminant est nul, soit :

$$(\omega^2-\omega_1^2)^2-\omega_2^4=0$$

Soit :

$$(\omega^2-(\omega_1^2+\omega_2^2))(\omega^2-(\omega_1^2-\omega_2^2))=0$$

On retrouve ainsi les deux pulsations propres du système :

$$\Omega_1^2=\omega_1^2+\omega_2^2 \qquad et \qquad \Omega_2^2=\omega_1^2-\omega_2^2$$

L'avantage de cette méthode est d'être générale et de permettre de déterminer les modes propres quel que soit le nombre d'équations couplées.

6) En vertu des grands principes :

Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Rectifier les affirmations inexactes quand c'est possible :

a) L'entropie d'un système fermé ne peut qu'augmenter. Elle est maximale à l'équilibre.

b) L'entropie d'un système augmente si l'ordre augmente.

c) L'entropie d'un corps pur augmente avec la température à volume constant ; elle est nulle à T = 0 K.

d) L'entropie d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

e) La détente de Joule – Gay Lussac est isentropique.

f) La détente de Joule – Kelvin est isentropique.

g) Une évolution isentropique est nécessairement réversible.

h) Lorsque l'on apporte de la chaleur à un corps pur, sa température augmente.

Solution :

a) Il faut que le système soit isolé.

b) L'entropie augmente si le désordre apparaît.

c) Oui : le désordre apparaît avec la température et l'entropie est nulle au zéro absolu (3ème principe de la thermo).

d) L'entropie d'un GP dépend de (T,V) ou de (T,P).

e) La DJGL se fait à U constante.

f) La DJT est isenthalpique.

g) Une isentropique signifie à S cste ; elle n'est pas nécessairement réversible.

h) Ce n'est pas automatique : penser aux changement d'états ou à des transformations où on apporte chaleur et travail.

7) Utilisation de la loi de Laplace :

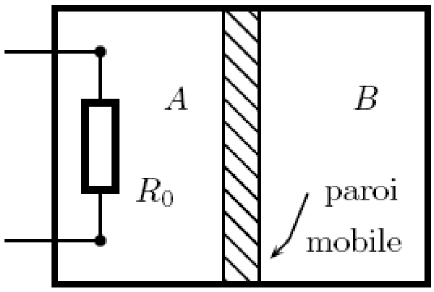
Un récipient à parois rigides et calorifugées contient deux gaz parfaits diatomiques séparés par une paroi intérieure adiabatique pouvant se déplacer sans frottements. Les volumes occupés par chaque gaz A et B peuvent donc varier. Initialement les gaz sont dans le même état : 1 bar, 300 K et 1 L. Un générateur électrique fait passer un courant de 1 A dans la résistance $R_0 = 10\ \Omega$ pendant une durée τ. A ce moment le volume de A est de 1,1 L.

a) Calculer la pression finale dans chacun des compartiments.

b) Calculer la température finale en B.

c) Calculer la température finale en A.

d) Calculer τ.



e) Calculer le travail reçu par le gaz du compartiment B.

f) Calculer la variation d'entropie du gaz dans le compartiment A.

Solution :

1) La transformation du gaz (B) est adiabatique réversible : $PV_B^\gamma = P_0 V_0^\gamma$, avec $V_B = 0{,}9\ L$.

2) La température est $T_B = \dfrac{PV_B}{n_B R} = \dfrac{P}{P_0}\dfrac{V_B}{V_0}T_0$

3) Dans le compartiment A : $T_A = \dfrac{PV_A}{n_A R} = \dfrac{P}{P_0}\dfrac{V_A}{V_0}T_0$

4) $Q = \Delta U_A + \Delta U_B = \dfrac{P_0 V_0}{RT_0}\dfrac{5}{2}R\left((T_A - T_0) + (T_B - T_0)\right) = R_0 i^2 \tau$

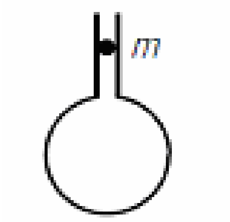
5) $W_B = \dfrac{P_0 V_0}{RT_0}\dfrac{5}{2}R(T_B - T_0)$

6) $\Delta S_A = \dfrac{P_0 V_0}{RT_0}\left[\dfrac{5}{2}R\ln\dfrac{T_A}{T_0} + R\ln\dfrac{V_A}{V_0}\right]$.

8) Oscillations d'une bille dans un col de bouteille :

Un gaz parfait est enfermé dans un ballon dont le col est un tube de section S dans lequel se trouve une bille de masse m.

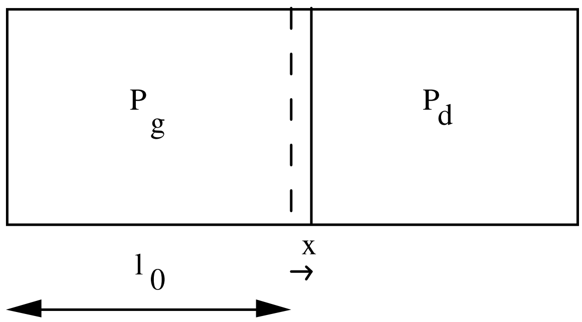
Etudier les oscillations de la bille dans le col.



On suppose que la bille joue le rôle d'un piston étanche et on note P_0, T_0 et V_0 les caractéristiques du gaz à l'équilibre.

9) Oscillations adiabatiques réversibles :

Un cylindre adiabatique, horizontal, séparé en deux compartiments par un piston adiabatique, de masse m, mobile sans frottement, contient à l'état initial une mole de gaz parfait (P_0, V_0, T_0) de chaque côté.



A l'instant t = 0, l'opérateur écarte le piston de sa position d'équilibre de x_0 faible devant la longueur l_0 ($V_0 = l_0\, s$).

1- Etudier les petites oscillations du système.

2- Justifier les hypothèses d'adiabaticité et de réversibilité.

Solution :

1) On suppose que les transformations sont isentropiques. Alors, pour le gaz de gauche :

$$P_g(V_0 + sx)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \textit{soit} \quad P_g \approx \left(1 - \frac{\gamma x}{\ell_0}\right) P_0$$

De même, pour le gaz de droite : $P_d \approx \left(1 + \dfrac{\gamma x}{\ell_0}\right) P_0$

Le théorème du centre d'inertie pour le piston donne :

$$m\ddot{x} = P_g s - P_d s \quad \textit{soit} \quad \ddot{x} = -\frac{2P_0\gamma s}{m\ell_0} x = -\omega_0^2 x$$

2) Pour l'hypothèse d'adiabaticité, on peut évaluer le temps long associé aux échanges de chaleur par diffusion thermique. Pour l'hypothèse de réversibilité, il faut négliger les frottements dus à la viscosité de l'air et au piston. Cette hypothèse est plus discutable car les frottements conduisent inévitablement à l'arrêt du piston.

10) Turboréacteur :

Tracer en coordonnées de Clapeyron le cycle d'un turboréacteur, composé d'une compression adiabatique AB, d'un chauffage isobare BC, d'une détente adiabatique CD et d'un refroidissement isobare DA. Exprimer le rendement en fonction du rapport de compression $a = P_B / P_A$ et de γ (le gaz est supposé parfait).

11) Calorimétrie : (avec débit)

Un serpentin est immergé dans un calorimètre ;on fait passer dans le serpentin un courant d'eau. A l'entrée, l'eau est à la température de 15°C, à la sortie elle est à la température du calorimètre qui, grâce à un chauffage électrique, est maintenue à 40°C.

a) Calculer la quantité d'énergie que doit fournir la résistance chauffante si le débit d'eau dans le serpentin est de 60 g.min^{-1}.

b) La résistance est de 10 Ω ; calculer l'intensité du courant.

c) On fait passer un autre liquide dans le serpentin et pour avoir les mêmes conditions (températures et intensité), on doit assurer un débit de 180 g.min^{-1}. Calculer la chaleur massique du liquide.

Solution :

a) On choisit comme système fermé le fluide dans le calorimètre et une masse Ddt à l'entrée à l'instant t. A l'instant t + dt, le système est constitué du fluide dans le calorimètre et d'une masse Ddt à la sortie, à la température du calorimètre.

Le 1er principe de la thermodynamique donne alors :

$$Ddtc_{m,eau}(T_{sortie} - T_{entrée}) = Pdt \quad ; \quad P = Dc_{m,eau}(T_{sortie} - T_{entrée})$$

b) Ecrire que $P = Ri^2$.

c) On a l'égalité : $Dc_{m,eau} = D_{sol}c_{m,sol} \quad soit \quad c_{m,sol} = \frac{1}{3}c_{m,eau}$.

12) Détente dans une tuyère :

Une masse d'air assimilé à un gaz parfait arrive à l'entrée d'une tuyère avec une température $T_0 = 293$ K et une vitesse d'ensemble v. La tuyère la conduit dans un très grand réservoir où elle se disperse et où sa température est $T_f = 500$ K. La tuyère et le réservoir sont parfaitement calorifugés. L'air sera assimilé à un gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 1{,}40$. La constante massique des gaz parfaits est $r = R / M_{air} = 287\ J.kg^{-1}.K^{-1}$.

Calculer la vitesse v de l'air à l'entrée de la tuyère.

13) Moteur à réaction :

Dans un moteur à réaction, un gaz (assimilé à l'air supposé parfait) parcourt un cycle que l'on considérera tout d'abord comme étant réversible.

Il pénètre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)).

Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2 et la température vaut alors T_2 (état (2)).

Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3, la pression restant égale à P_2 (la sortie de la chambre de combustion est représentée par l'état (3)).

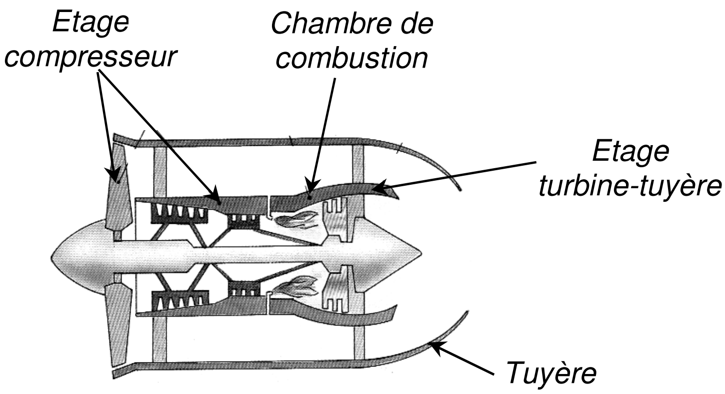
Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2).

Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)). Le gaz est rejeté avec la vitesse c (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1.

On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

Données numériques : $T_1 = 290\,K$, $P_1 = 1\,bar$, $P_2 / P_1 = 5$. La température du gaz à l'entrée de la turbine est $T_3 = 1300\,K$. L'air est considéré comme étant un gaz diatomique de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$. La constante R des gaz parfaits vaut $R = 8{,}31\,J.K^{-1}.mol^{-1}$.

Les applications numériques demandées sont relatives à l'unité de masse (ici, 1 kg) et les grandeurs extensives correspondantes seront notées par des lettres minuscules (s_m pour l'entropie, h_m pour l'enthalpie, e_{cm} pour l'énergie cinétique macroscopique,…).



a) Déterminer l'expression de T_2 en fonction des données. Quelle est l'énergie fournie à l'unité de masse de gaz qui traverse le compresseur ?

b) Quels sont les échanges d'énergie par unité de temps et par unité de masse dans la chambre de combustion ?

c) Déterminer T_4 et T_5. Quelle est la vitesse c du gaz à la sortie de la tuyère ?

d) Quel est le rendement ρ du moteur ?

Solution :

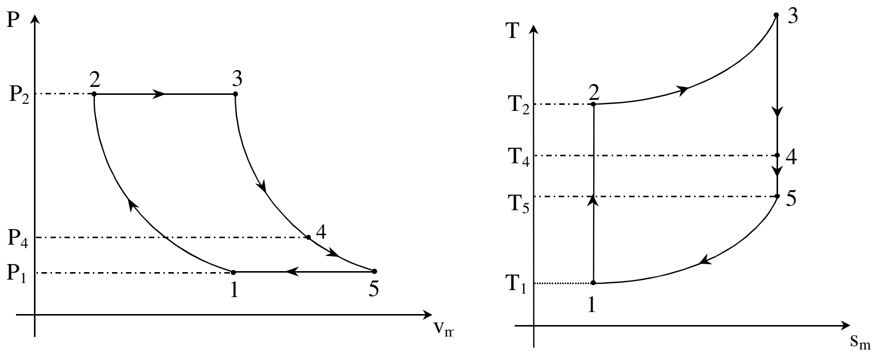
➢ 1-a) L'entropie massique s d'un gaz parfait peut s'écrire, en notant $c_{P,m}$ la capacité calorifique massique à pression constante du gaz et $r = R/M$:

$$s_m = s_m(T,P) = c_{P,m}\ln(T) - r\ln(P) + cste$$

Par conséquent, l'équation dans le diagramme isentropique (T,s_m) d'une isobare (de pression P_1) est :

$$T = T(s_m) = C_1\, e^{s_m / c_{P,m}}$$

où C_1 est une constante qui dépend de la pression P_1 (et qui augmente avec celle-ci). Les isobares correspondant aux deux pressions P_1 et $P_2 > P_1$ sont représentées sur la figure ci-dessus.



b) Les allures, en coordonnées de Clapeyron (P,v_m) et en coordonnées (T,s_m), du cycle suivi par l'air dans le moteur sont données ci-dessus.

➢ 2. La détente étant supposée réversible et adiabatique dans le compresseur, l'application de la loi de Laplace permet de déterminer la température finale T_2 :

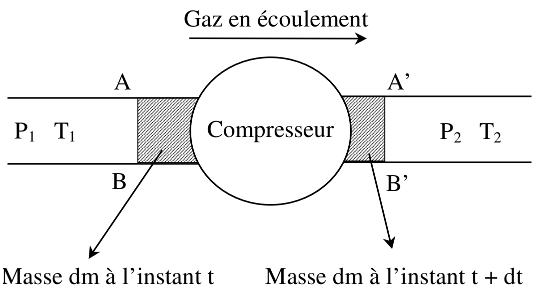
$$P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma} \quad \text{soit} \quad T_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_1$$

Pour l'air, gaz diatomique, $\gamma = 7/5$ et par conséquent, $T_2 = 459{,}3\,K$.

L'unité de masse d'air qui rentre dans le compresseur ne reçoit, de la part de celui-ci, qu'un travail mécanique noté w_m (avec $w_m > 0$). On considère à l'instant t le système fermé constitué du gaz compris dans le compresseur et de la masse dm de gaz (dans l'état P_1 et T_1) qui va rentrer, pendant l'intervalle de temps dt, dans le compresseur. A l'instant $t + dt$, ce système est constitué de la même quantité de gaz comprise dans le compresseur et de la même masse dm de gaz qui est sortie, étant désormais dans les conditions P_2 et T_2. Le 1er principe appliqué à ce système (en négligeant l'énergie cinétique macroscopique) s'écrit :

$$\left(U_{\text{gaz dans le compresseur}} + (dm)\,u_{m,2}\right) - \left(U_{\text{gaz dans le compresseur}} + (dm)\,u_{m,1}\right)$$
$$= P_1(dm\,v_{m,1}) - P_2(dm\,v_{m,2}) + (dm)\,w_m$$

Avec :



• $U_{\text{gaz dans le compresseur}}$, l'énergie interne du gaz constamment contenu dans le compresseur ; elle est constante en régime stationnaire.

• $u_{m,1}$ et $u_{m,2}$ désignent les énergies internes massiques et $v_{m,1}$ et $v_{m,2}$ les volumes massiques de l'air dans les états (1) et (2) respectivement.

• la quantité $P_1(dm\,v_{m,1}) - P_2(dm\,v_{m,2})$ représente le travail des forces de pressions extérieures au système, à l'entrée et à la sortie de la machine (encore appelé travail de transvasement).

• Enfin, le transfert thermique reçu par le système est nul puisque, d'une part, le compresseur est calorifugé et, d'autre part, il n'y a pas de transfert de chaleur par conduction entre la masse qui rentre ou qui sort de la machine et son environnement immédiat puisque les températures sont identiques (et égales à T_1 ou T_2).

En remarquant que $h_m = u_m + Pv_m$ représente l'enthalpie massique, on aboutit finalement au bilan énergétique suivant :

$$h_{m,2} - h_{m,1} = w_m$$

Sachant que l'enthalpie massique d'un gaz parfait est de la forme $h_m = c_{P,m}T$ (avec $c_{P,m} = 7r/2$, où $r = R/M$), on en déduit l'expression du travail massique reçu par l'air :

$$w_m = \frac{7}{2}r(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}r\left(\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)T_1$$

Numériquement, on trouve $w_m = 169{,}8\ \text{kJ.kg}^{-1}$.

➢ 3. Un bilan énergétique similaire à celui réalisé à la question précédente conduit à :

$$q_m = h_{m,3} - h_{m,2} = \frac{7}{2}r\left(T_3 - T_2\right)$$

où q_m représente le seul terme énergétique reçu, sous forme de transfert thermique massique, par l'air dans la chambre de combustion. Numériquement, on obtient $q_m = 843{,}2\ \text{kJ.kg}^{-1}$.

➢ 4. Le travail massique w'_m reçu par l'air dans la turbine, opposé à celui reçu lors du passage dans le compresseur, est par ailleurs donné par $w'_m = h_{m,4} - h_{m,3}$. Par conséquent :

$$w'_m = h_{m,4} - h_{m,3} = \frac{7}{2}r\left(T_4 - T_3\right) = -w_m = -\frac{7}{2}r\left(T_2 - T_1\right)$$

Soit :

$$T_4 = T_3 - T_2 + T_1 = 1\,131\,\text{K}$$

La température T_5 s'obtient à partir de la loi de Laplace :

$$P_2^{1-\gamma}T_3^{\gamma} = P_4^{1-\gamma}T_4^{\gamma} = P_1^{1-\gamma}T_5^{\gamma} \quad \text{soit} \quad T_5 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_3 = 821\,\text{K}$$

Le bilan énergétique dans la tuyère s'écrit maintenant, puisque l'énergie cinétique macroscopique en sortie $e_{cm,5}$ n'est plus négligeable (et avec des notations semblables à celles de la question (2)) :

$$\left(U_{\text{gaz dans la tuyère}} + (dm)\,u_{m,5} + (dm)\,e_{cm,5}\right) - \left(U_{\text{gaz dans la tuyère}} + (dm)\,u_{m,4}\right)$$
$$= P_4\,(dm\,v_{m,4}) - P_1\,(dm\,v_{m,5})$$

Soit, finalement :

$$\left(h_{m,5} - h_{m,4}\right) + e_{cm,5} = 0 \quad \text{d'où} \quad e_{cm,5} = -\left(h_{m,5} - h_{m,4}\right) = -\frac{7}{2}r\left(T_5 - T_4\right)$$

Numériquement, $e_{cm,5} = 311\,\text{kJ.kg}^{-1}$. La vitesse à la sortie de la tuyère valant alors $c = \sqrt{2\,e_{cm,5}} = 789\,\text{m.s}^{-1}$.

➢ 5. Le rendement ρ du moteur peut être défini de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\text{énergie utile récupérée}}{\text{énergie fournie}} = \frac{e_{cm,5}}{q_m} = 37\,\%$$

14) Pompe à chaleur :

On dispose de deux bassins d'eau de masses m_1 et $m_1 / 5$. On désire transformer le 1er en piscine chauffée et le 2nd en patinoire à l'aide d'une pompe à chaleur fonctionnant de manière réversible. La capacité thermique massique c_m de l'eau est donnée.

a) Initialement, $T_1 = T_2 = T_{ext} = 278\ K$. T_2 baisse de 5°C. Déterminer la température finale T_1 ainsi que le travail W à fournir (Indication : envisager une faible variation des températures sur un cycle).

b) Dans une 2nd étape, l'eau du second bassin passe à l'état de glace. La chaleur latente massique de l'eau est L_f . Déterminer les nouvelles valeurs finales de T'_1 et W'.

c) Dans une troisième étape, la température de la glace est abaissée de 5°C . Déterminer les nouvelles valeurs finales de T''_1 et W''.

Solution :

a) Sur un cycle élémentaire : $\delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta W = 0\ et\ \dfrac{\delta Q_1}{T_1} + \dfrac{\delta Q_2}{T_2} = 0$. Or, $\delta Q_1 = -m_1 c_m dT_1\ et\ \delta Q_2 = -\dfrac{m_1}{5} c_m dT_2$:

$$\frac{dT_1}{T_1} + \frac{1}{5}\frac{dT_2}{T_2} = 0 \quad soit \quad T_1 T_2^{1/5} = cste = T_{ext}^{6/5} \quad et \quad T_1 = \left(\frac{T_{ext}}{T_2}\right)^{6/5} T_2 = 284\ K$$

Le travail à fournir est : $W = -Q_1 - Q_2 = m_1 c_m (T_1 - T_{ext}) + \frac{m_1}{5} c_m (T_2 - T_{ext})$.

b) On a alors : $m_1 c_m \ln\left(\frac{T'_1}{T_1}\right) - \frac{m_1}{5} L_f \frac{1}{T_f} = 0 \quad soit \quad T'_1 = T_1 e^{\frac{L_f}{5 c_m T_f}}$. Le travail est :

$$W' = -Q_1 - Q_2 = m_1 c_m (T'_1 - T_1) - \frac{m_1}{5} L_f$$

c) Idem (a).

15) Marmite sous pression :

Une marmite sous pression, de volume 10 L, est remplie à la température $T_0 = 20°C$ d'une masse d'eau m et d'air, sous pression normale $P_0 = 1$ bar. On la ferme et on porte sa température à $T_1 = 120°C$. Déterminer, dans les deux cas suivants, la pression à l'intérieur de la marmite : m = 6 g puis m = 12 g.

La pression de vapeur saturante de l'eau, dans le domaine 100°C < T < 200°C vaut (formule de Duperray) :

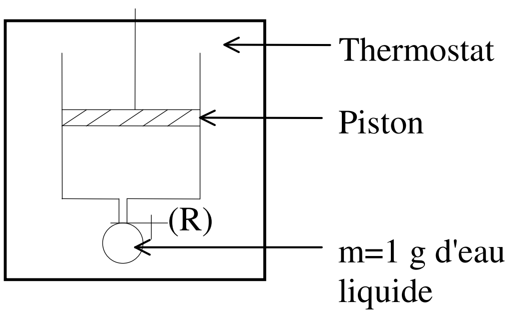
$$P_v = (T / 100)^4 \qquad \text{(T en °C ; } P_v \text{ en bar)}$$

et la vapeur d'eau sèche se comporte comme un gaz parfait. On néglige le volume de l'eau liquide.

16) Vaporisation dans le vide :

Un récipient diatherme, dont on peut faire varier le volume à l'aide d'un piston diatherme, est plongé dans un thermostat de température $T_0 = 100°C$. Une petite ampoule, de volume négligeable, communique avec le récipient à l'aide d'un robinet et contient une masse m = 1 g d'eau liquide.

Initialement le volume du récipient est nul. A partir de cet état initial, on réalise deux expériences :



a) On ouvre le robinet et on augmente lentement le volume du récipient jusqu'au volume V_f pour lequel tout le liquide a disparu. Le récipient contient alors de la vapeur, sous une pression égale à la pression de vapeur saturante à la température T_0.

b) On fixe le piston à la position finale obtenue précédemment, puis on ouvre le robinet.

Etablir, dans les deux cas, le bilan entropique de la transformation.

Solution :

On choisit comme système l'eau liquide contenue dans l'ampoule et le vide de l'enceinte.

Pour calculer la variation d'entropie de l'eau, on imagine un chemin réversible amenant du même état initial au même état final, alors : $\Delta S_{eau} = \frac{M_{eau} L_V}{T}$. A volume constant, on peut écrire que : $\Delta U = Q = M_{eau} L_V - P(V - V_L)$.

On en déduit la variation d'entropie de l'univers : $\Delta S_{eau} = \frac{Q}{T} + S_{cr}$ $\quad (S_{cr} = \Delta S_{univers})$.

Soit : $S_{cr} = \Delta S_{eau} - \frac{Q}{T} = \frac{P}{T}(V - V_L) \approx \frac{PV}{T} = R$

17) Frottements et fusion d'un glaçon :

Un cube de glace à la température T = 0°C, glisse sur le comptoir d'un bar avec une vitesse initiale v_0 et une masse m_0. Le coefficient de frottement sur le bar est f. L'énergie dépensée par le frottement sert à fondre la glace. L'eau formée quitte le glaçon avec une vitesse relative négligeable.

On note L_f la chaleur latente massique de fusion de la glace.

a) Déterminer, en fonction du temps, la vitesse du glaçon.

b) Quelle est la masse m' du glaçon en fin de mouvement ? Calculer le rapport m' / m pour une vitesse v_0 = 1 m / s, sachant que L_f = 320 kJ/kg.

Solution :

a) On considère le glaçon à l'instant t, de masse dm et la même quantité de matière à l'instant t + dt, constituée de glace (de masse m + dm) et d'eau liquide, de masse – dm. Un bilan de quantité de mouvement appliqué à ce système donne :

$$\frac{((m+dm)(v+dv)+(-dm.(v+dv))-(mv)}{dt} = -fmg$$

Soit, au 1^er ordre :

$$\frac{mdv}{dt} = -fmg \qquad d'où \qquad v = v_0 - fgt$$

b) On traduit que l'énergie dépensée par le frottement sert à fondre la glace :

$$-dm\, L_f = fmg\, vdt \qquad soit \qquad \frac{dm}{m} = -\frac{fg}{L_f}(v_0 - fgt)$$

Par intégration :

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{fgt}{2L_f}(2v_0 - fgt)$$

Le mouvement cesse quand la vitesse s'annule, soit à l'instant $t_f = v_0 / fg$.

La masse de glaçon est alors : $m(t_f) = m_0 e^{-\frac{v_0^2}{2L_f}}$

AN : $m(t_f) \approx m_0$: le glaçon ne fond pratiquement pas, l'énergie cinétique étant négligeable devant la chaleur latente de fusion.