Etude des réseaux de diffraction

Chapitre 4

Etude des réseaux de diffraction

Un réseau est constitué par la répétition périodique d'un motif diffractant, comme par exemple une fente. Les interférences entre les rayons issus des nombreux motifs successifs privilégient alors précisément certaines directions dans lesquelles l'énergie lumineuse est envoyée.

Ce chapitre traite de la diffraction de la lumière par un réseau ainsi que de ses applications.

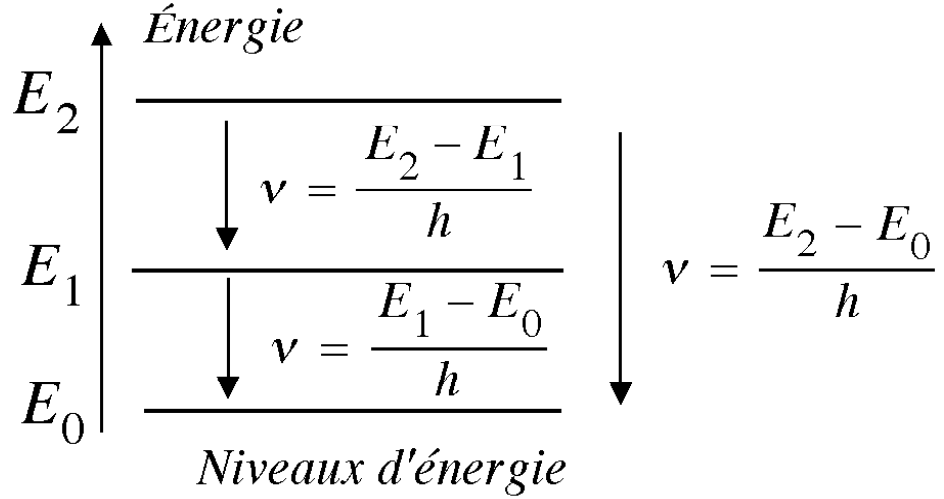
I) Intérêt d'un réseau :

Spectre d'émission :

Lorsque les atomes d'un gaz sont excités, ils émettent des radiations caractéristiques des éléments chimiques qui constituent le gaz.

Un atome excité émet un photon, c'est-à-dire un train d'ondes, à une fréquence ν telle que :

$$\Delta E = h\,\nu \qquad (h = 6{,}63 \,.\, 10^{-34}\ \text{J}\,.\,\text{s} \quad \textit{(constante de Planck)})$$



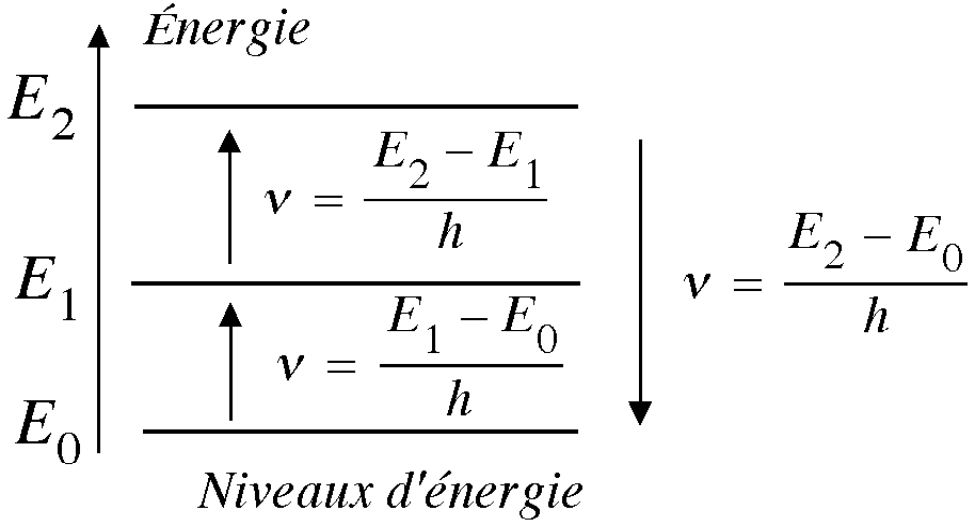
L'étude des spectres d'émission permet de connaître la composition du gaz.

En astronomie, on peut ainsi connaître la composition des gaz de la couche externe des étoiles.

En raison de l'effet Doppler, les fréquences sont un peu décalées ; on peut en déduire la vitesse avec laquelle l'étoile observée s'éloigne de la Terre.

Spectre d'absorption :

Lorsqu'un faisceau de lumière blanche traverse un milieu « transparent », ce dernier absorbe sélectivement des radiations caractéristiques du milieu traversé.



L'étude du spectre d'absorption permet de connaître la composition du milieu absorbant.

Dispersion de la lumière avec un réseau :

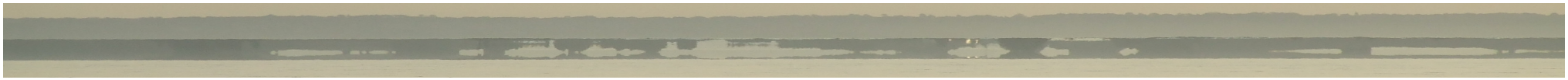
On peut séparer les composantes monochromatiques de la lumière avec un prisme, ou mieux, avec un réseau.

II) Réseau par transmission :

Un réseau par transmission est constitué par un très grand nombre de fentes parallèles et équidistantes.

Il est souvent constitué par une lame de verre sur laquelle on a tracé un très grand nombre de traits parallèles et équidistants (de l'ordre de 500 traits par millimètre !).

La distance *a* entre deux fentes successives s'appelle le *pas du réseau*.

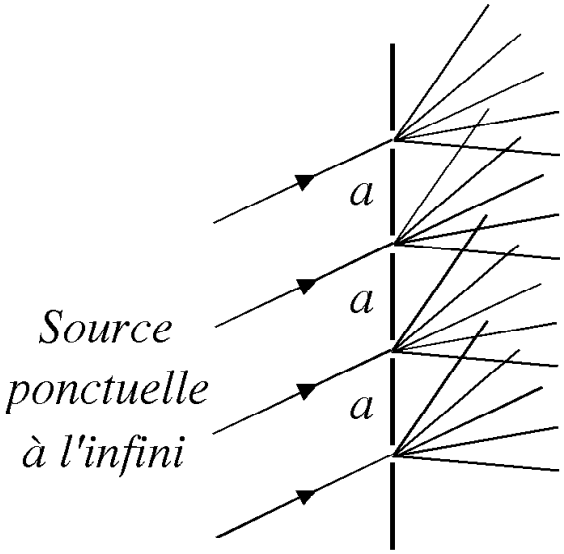


Densité de traits : Le réseau est caractérisé par son pas a qui est la distance séparant deux motifs diffractants consécutifs. On définit la densité de traits $n = \frac{1}{a}$ (nombre de traits par mètre). Le tableau suivant donne les ordres de grandeur pour différents types de réseau :

Qualité	n (m^{-1})	n (Lines Per Inch)	a (μm)	Largeur	N
moyenne		10^3	30	2 cm	~2000
Classique	~4.10^5	10^4	~3	3 cm	~10 000
Excellente	~4.10^6	10^5	~0,3	4 cm	~40 000

Soit une source ponctuelle, à l'infini, qui éclaire le réseau.

Chaque fente diffracte la lumière.



Réseau (vu en coupe)

Les rayons issus des différentes fentes interfèrent entre eux.

On s'intéresse seulement aux interférences à l'infini.

Remarque : la surface d'un CD ou DVD est formée de petits motifs répétés et constitue pratiquement un réseau. On remarque que cette surface décompose la lumière blanche et qu'elle apparaît colorée différemment selon l'orientation du disque.

III) Théorie élémentaire du réseau :

Soit une source S ponctuelle et monochromatique, à l'infini, qui envoie un faisceau de lumière parallèle et arrivant sur le réseau sous l'angle d'incidence *i*.

On cherche les directions θ pour lesquelles l'intensité des rayons qui interfèrent à l'infini est maximale.

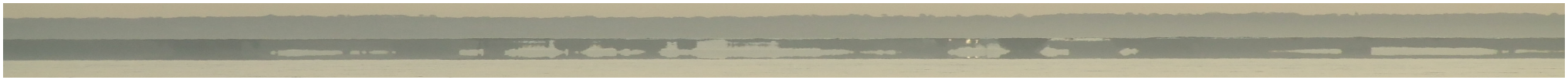
Il y a interférences à l'infini entre tous les rayons diffractés selon la direction θ.

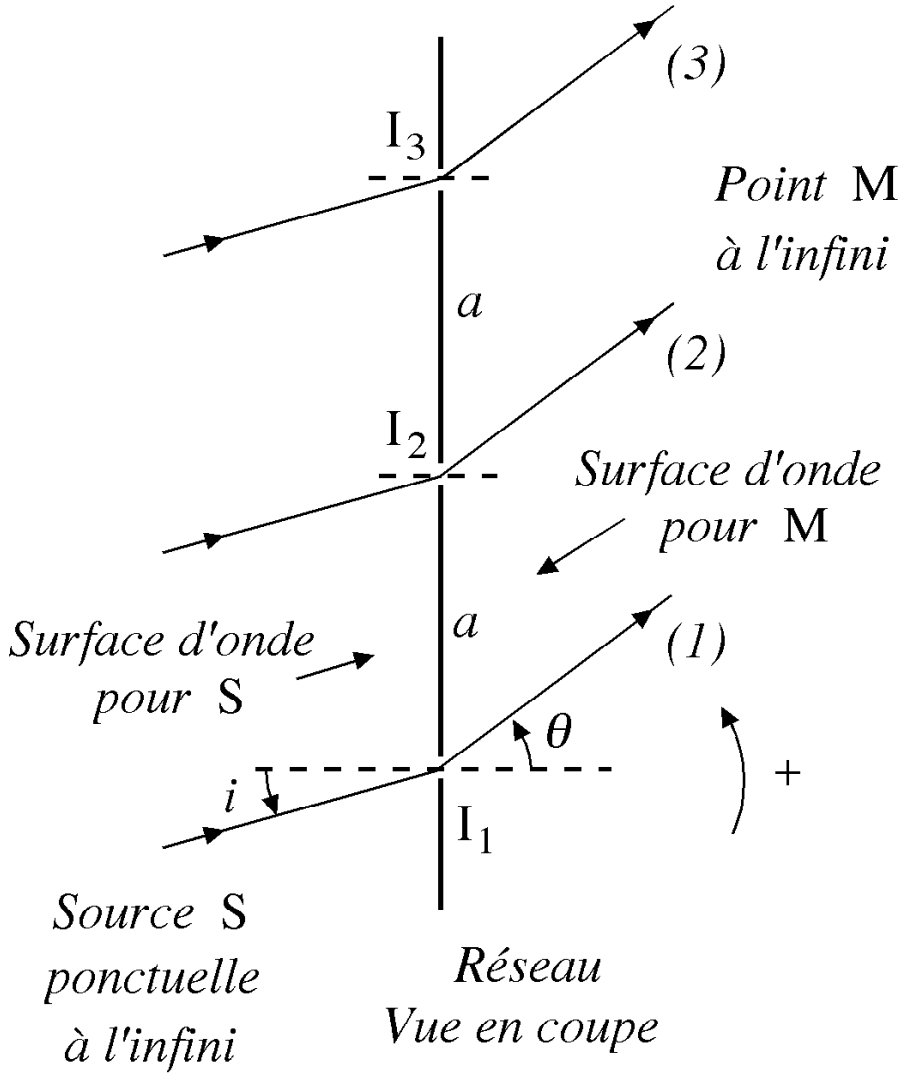
L'amplitude diffractée par le réseau à l'infini résulte des interférences entre les rayons issus de tous les motifs éclairés : on parle d'interférences à N ondes (dans le cas des trous d'Young, il s'agit d'interférences à deux ondes).

La différence de marche entre les deux rayons (1) et (2) est :

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = a\sin\theta - a\sin i = a(\sin\theta - \sin i)$$

(Attention ! Les angles *i* et θ peuvent être très grands ; on n'est pas dans les conditions de Gauss : il n'y a pas de lentilles !)




(3)
I3
Point M
à l'infini
a
(2)
I2
Surface d'onde
pour M
a
Surface d'onde
pour S
(1)
θ
+
i
I1
Source S
ponctuelle
à l'infini
Réseau
Vue en coupe

S'il n'y avait que les rayons *(1)* et *(2)*, l'intensité en M serait égale à :

$$I(\mathrm{M}) = 2I_0\left[1+\cos\left(2\pi\frac{\delta(\mathrm{M})}{\lambda_0}\right)\right]$$

L'intensité $I(\mathrm{M})$ serait maximale pour :

$$2\pi\frac{\delta(\mathrm{M})}{\lambda_0} = 2\pi m \qquad \textit{soit} \qquad \delta(\mathrm{M}) = m\lambda_0 \qquad (m \in \mathrm{Z})$$

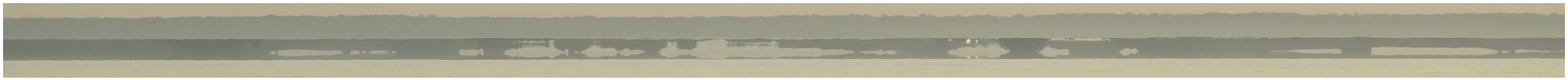
Les rayons *(1)* et *(2)* sont en phase.

Si la différence de chemin optique entre les rayons (1) et (2) vaut $m\lambda_0$:

- la différence de chemin optique entre les rayons (2) et (3) vaut aussi $m\lambda_0$

- la différence de chemin optique entre les rayons (1) et (3) vaut $2m\lambda_0$

Tous les rayons qui interfèrent en M à l'infini sont donc en phase : il y a un maximum de lumière dans cette direction d'angle θ .



Pour un angle d'incidence *i* donné, les angles θ correspondant à un maximum de lumière (les interférences entre les ondes issues de deux motifs successifs sont constructives) sont donnés par la relation : (« formule des réseaux »)

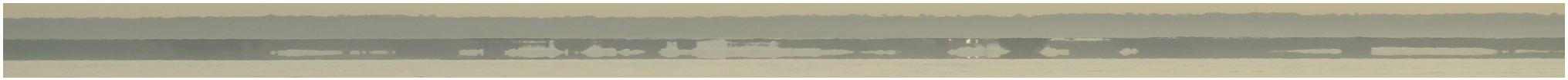
$$a(\sin\theta - \sin i) = m\lambda_0 \qquad soit \qquad \sin\theta - \sin i = m\frac{\lambda_0}{a}$$

m est appelé l'ordre du spectre (c'est l'ordre d'interférences).

Remarques :

- Pour un angle *i* donné, le nombre des valeurs de m est limité car :

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

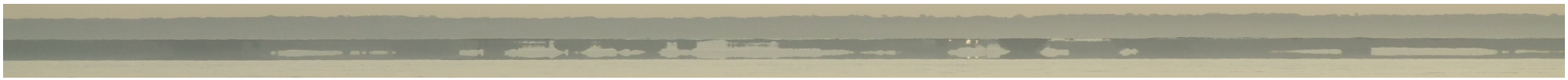


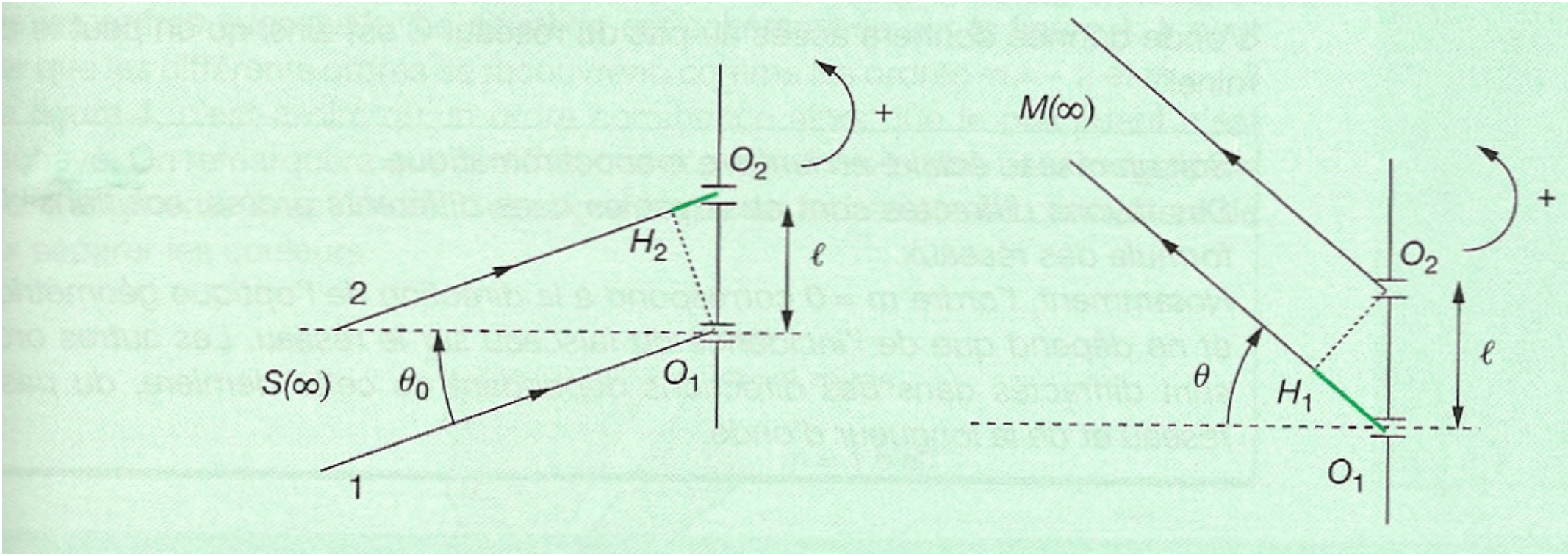
- Cas d'un réseau en réflexion :

Formule des réseaux pour un réseau en réflexion

a) Établir la formule des réseaux pour un réseau en réflexion.

b) Commenter la direction de l'ordre 0.




+
O_2
H_2
ℓ
2
$S(\infty)$
θ_0
O_1
1
$M(\infty)$
+
O_2
ℓ
θ
H_1
O_1

a) De même que précédemment, la différence de marche entre deux rayons réfléchis par deux motifs successifs est :

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = (O_1H_1) - (O_2H_2)\,,$$

avec S et M à l'infini (voir la figure 2 où les parties avant et après la réflexion ont été séparées pour des raisons de visibilité).

Comme $(O_1H_1) = -\ell \sin\theta$ (il ne faut pas oublier que $\theta < 0$ sur la figure 2) et $(O_2H_2) = \ell \sin\theta_0$, on aboutit à :

$$\delta = \ell(-\sin\theta - \sin\theta_0)\,.$$

La formule des réseaux en réflexion est donc :

$$\boxed{\ell(\sin\theta + \sin\theta_0) = m\lambda_0,\ m \in \mathbb{Z}}\,.$$

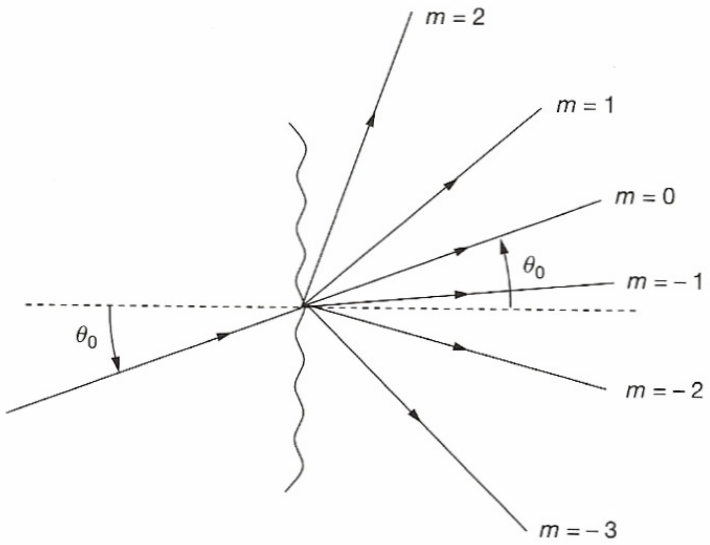
IV) Interprétation de la formule des réseaux :

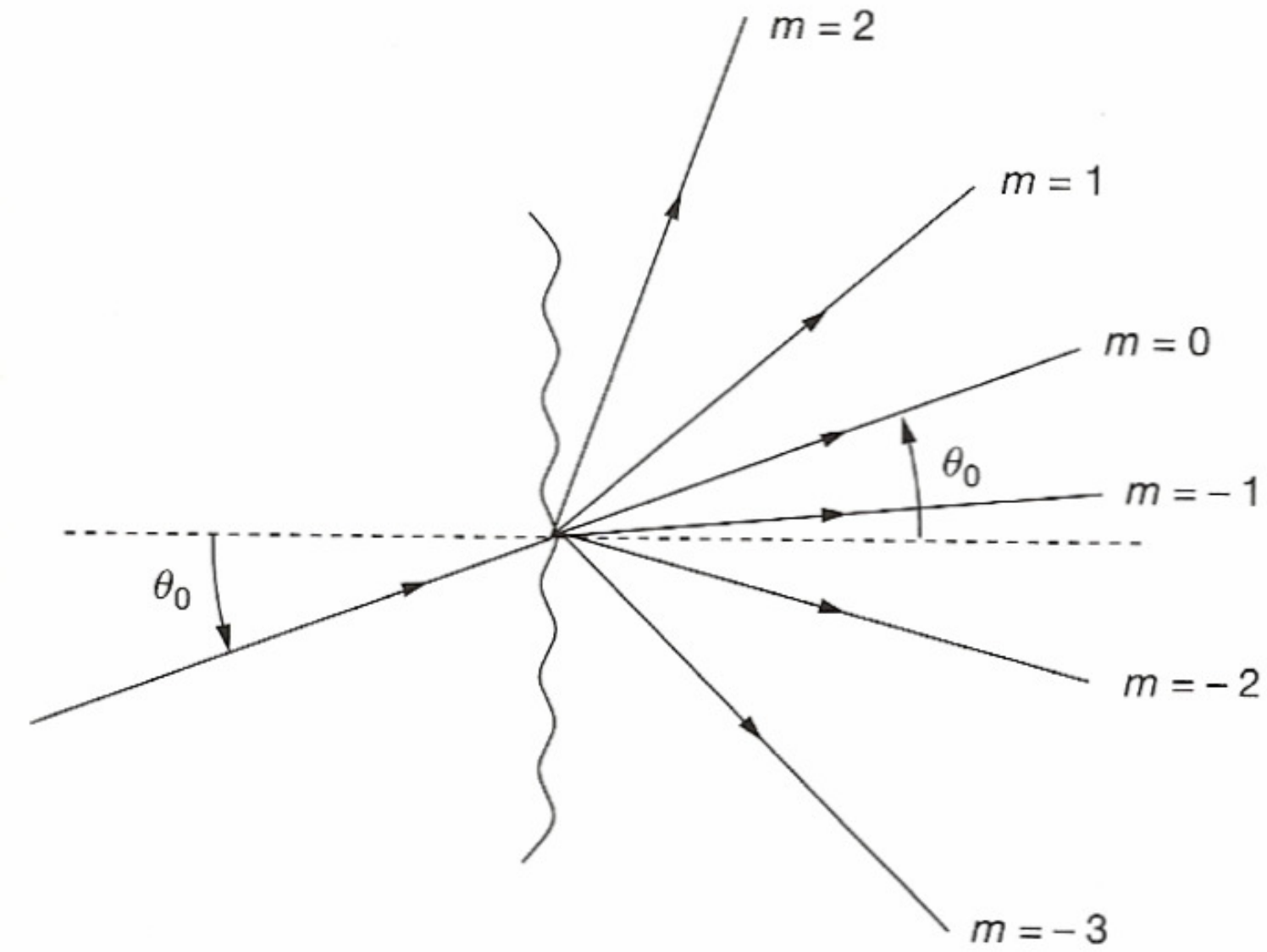
1 – Cas d'une lumière monochromatique :

On suppose que la source ne délivre qu'une seule longueur d'onde et on considère un réseau éclairé sous l'incidence i.

Pour m = 0, la formule des réseaux donne $\theta = i$: cette solution est dans la direction de l'optique géométrique.

Les autres solutions peuvent être obtenues numériquement et dépendent de la longueur d'onde. Elles sont représentées sur la figure.

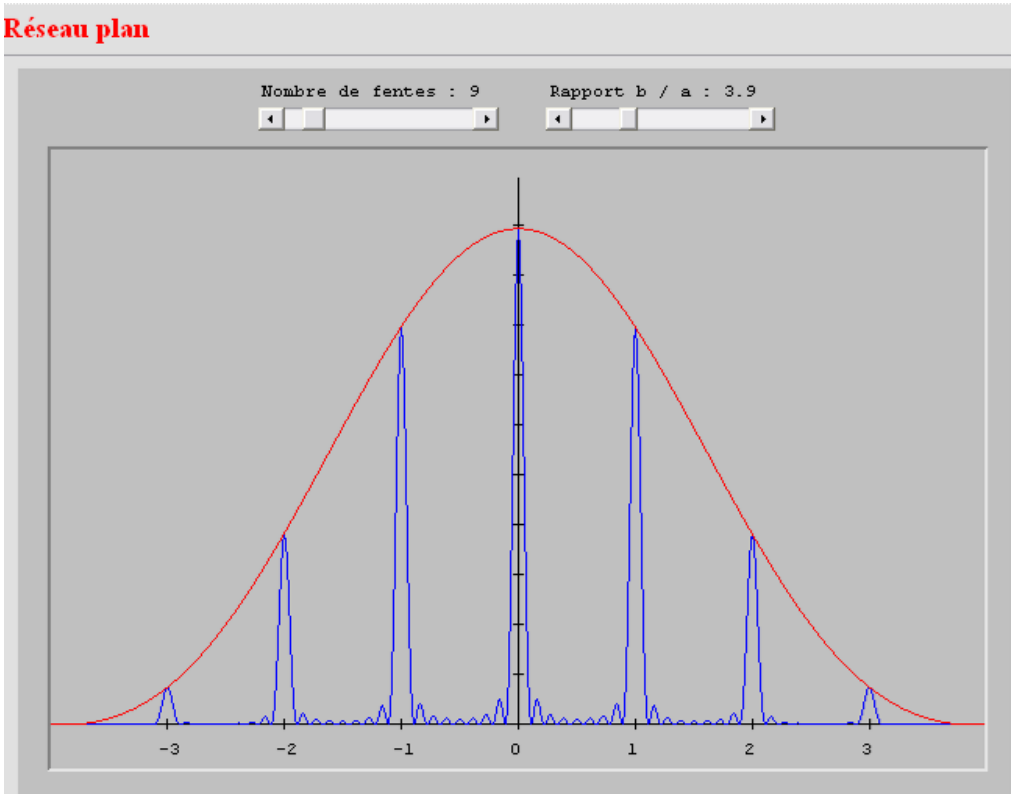



m = 2
m = 1
m = 0
m = − 1
m = − 2
m = − 3
θ0
θ0

Le rayon incident peut être observé, à la sortie du réseau, dans plusieurs directions.

La mesure précise des directions des rayons diffractés permet d'en déduire la longueur d'onde du rayonnement utilisé, si le pas du réseau est connu : le réseau est alors un spectromètre.

La connaissance de la longueur d'onde permet d'accéder au pas a du réseau.



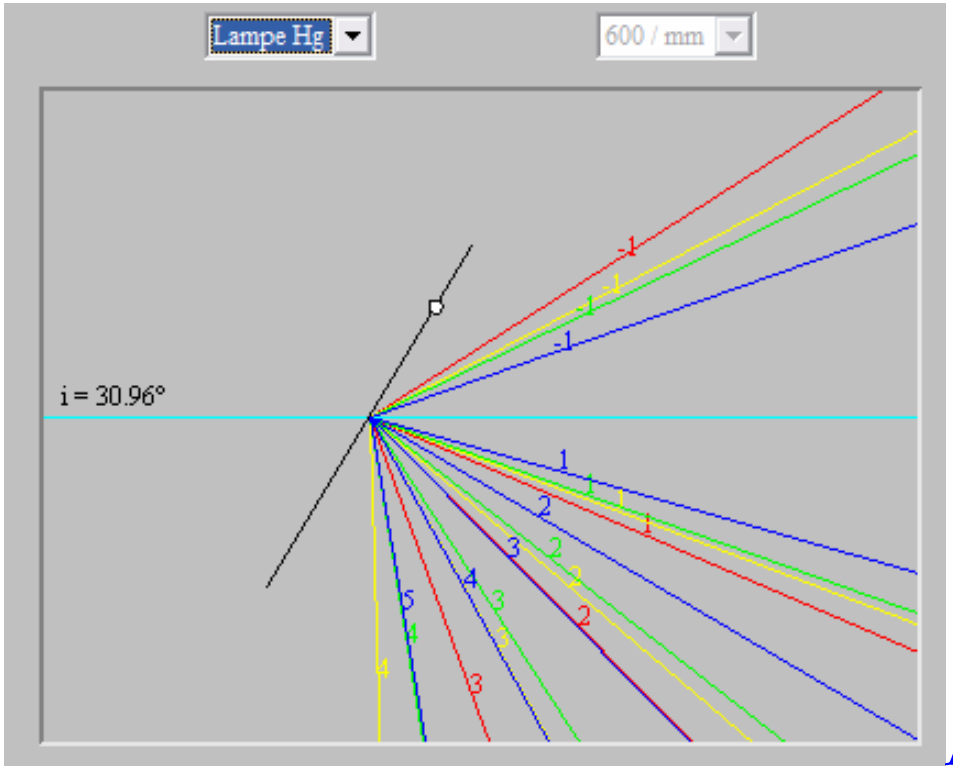
Animation JJ.Rousseau

2 – Cas de la lumière blanche :

La solution dans la direction de l'optique géométrique :

$$\theta = i \quad \text{pour} \quad m = 0$$

est valable indépendamment de la longueur d'onde. Dans cette direction, on observera de la lumière blanche.



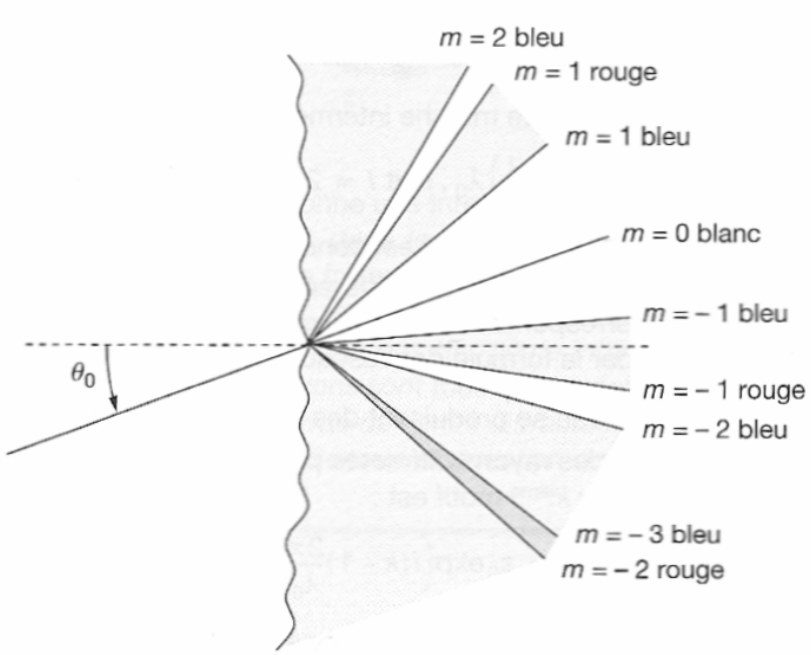
[Animation JJ.Rousseau]

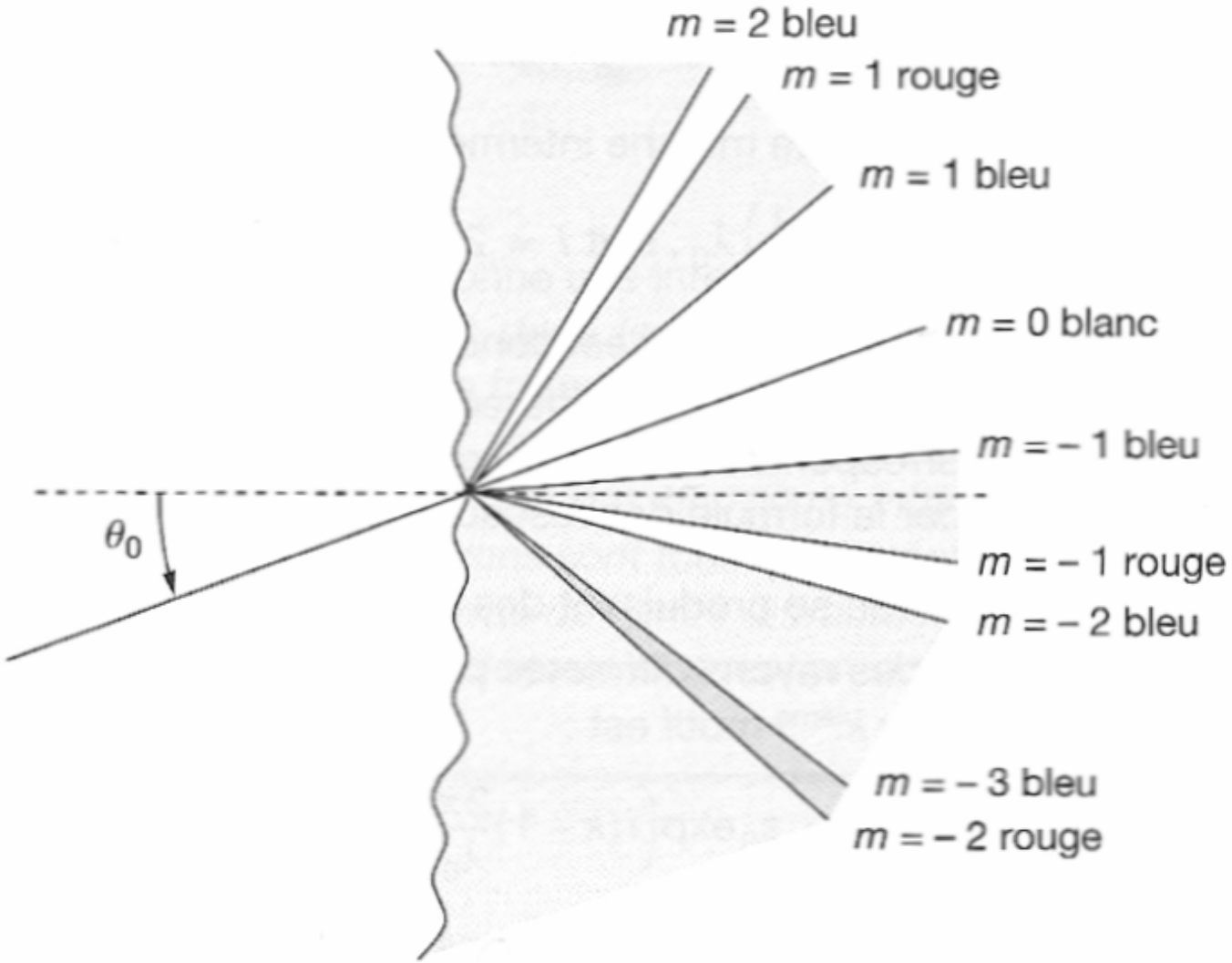
En revanche, dans les autres ordres, l'angle θ est fonction de la longueur d'onde. Cela signifie que suivant sa couleur, le rayon émergera du réseau avec un angle différent.

De même que le prisme, le réseau disperse la lumière dans les ordres non nuls. L'ordre nul, qui correspond à la direction de l'optique géométrique, est non dispersif.

Pour un ordre m donné, la déviation augmente du bleu au rouge.

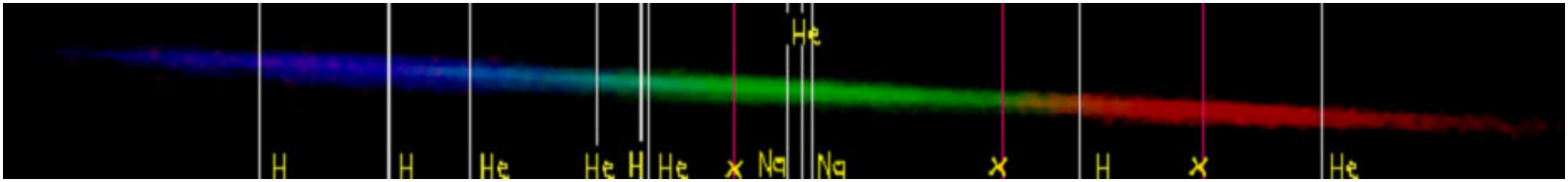
Il se peut parfois que les ordres se recouvrent (un ordre commence alors que le précédent n'est pas achevé) : c'est le cas ici pour les ordres m = - 2 et m = - 3.




m = 2 bleu
m = 1 rouge
m = 1 bleu
m = 0 blanc
m = – 1 bleu
m = – 1 rouge
m = – 2 bleu
m = – 3 bleu
m = – 2 rouge
θ0

Remarque :

Le réseau est préféré au prisme en tant que spectromètre : en effet, la formule des réseaux permet de relier précisément l'angle θ à la longueur d'onde, sans devoir utiliser une propriété d'un milieu. Pour le prisme, en effet, il est nécessaire de connaître la loi donnant la variation d'indice avec la longueur d'onde. Le pouvoir séparateur est également meilleur avec le réseau qu'avec le prisme.

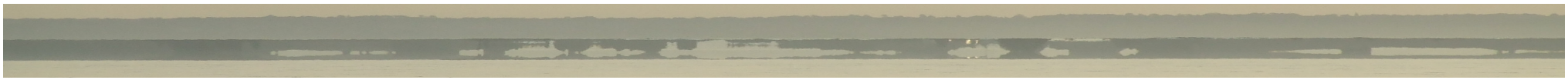


Spectre de Véga, étoile principale de la constellation de la Lyre, située à seulement 25,4 années-lumière du Soleil, réalisé avec un réseau de diffraction)

Exercice d'application :

Recouvrement des ordres

Un réseau comportant $n_0 = 800$ motifs par millimètre est éclairé par une lampe à vapeur atomique en incidence normale. Les longueurs d'onde sont comprises entre $\lambda_{min} = 404{,}7$ nm (violet) et $\lambda_{max} = 579{,}1$ nm (jaune). Les spectres se recouvrent-ils, et si oui, à partir de quel ordre ?



On évalue les déviations des longueurs d'onde extrêmes dans les différents ordres grâce à la formule des réseaux . Le pas est donné par $\ell = 1/n_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ mm. On en déduit :

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
Violet	18,9°	40,4°	76,2°
Jaune	27,6°	67,9	/

(le jaune n'existe pas dans les ordres supérieurs ou égaux à 3).
Les ordres ne se recouvrent donc pas.

V) Etude expérimentale : (Voir TP)

Fabriquer un réseau plan :

Expérience de JJ.Rousseau

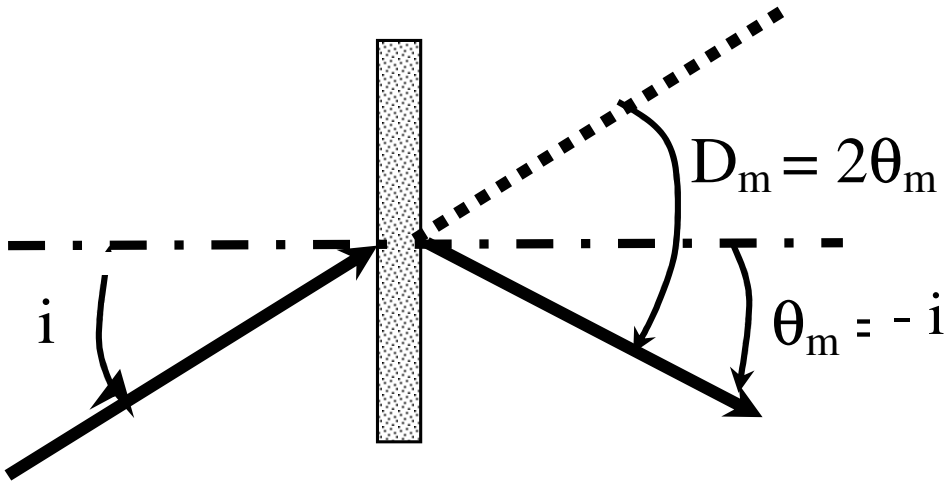
1) Minimum de déviation dans un ordre donné :

Pour un ordre m donné, la déviation du rayon incident est :

$$D_m = \theta_m - i \qquad \text{(Avec : } \sin\theta_m - \sin i = m\frac{\lambda_0}{a}\text{)}$$

On cherche un extremum (que l'on supposera être un minimum) de D_m lorsque l'angle d'incidence i varie, pour un ordre m donné :

$$\frac{dD_m}{di} = 0 \quad \text{soit} \quad d\theta_m = di \quad \text{et} \quad \cos\theta_m \, d\theta_m = \cos i \, di$$



Finalement, $\cos\theta_m = \cos i$, d'où $\theta_m = -i$ (la solution $\theta_m = i$ n'est pas intéressante car elle correspond à une déviation nulle).

Le rayon diffracté est symétrique du rayon incident par rapport au réseau :

$$D_{\min} = 2\theta_m \qquad d'où \qquad \sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{m\lambda_0}{2a}$$

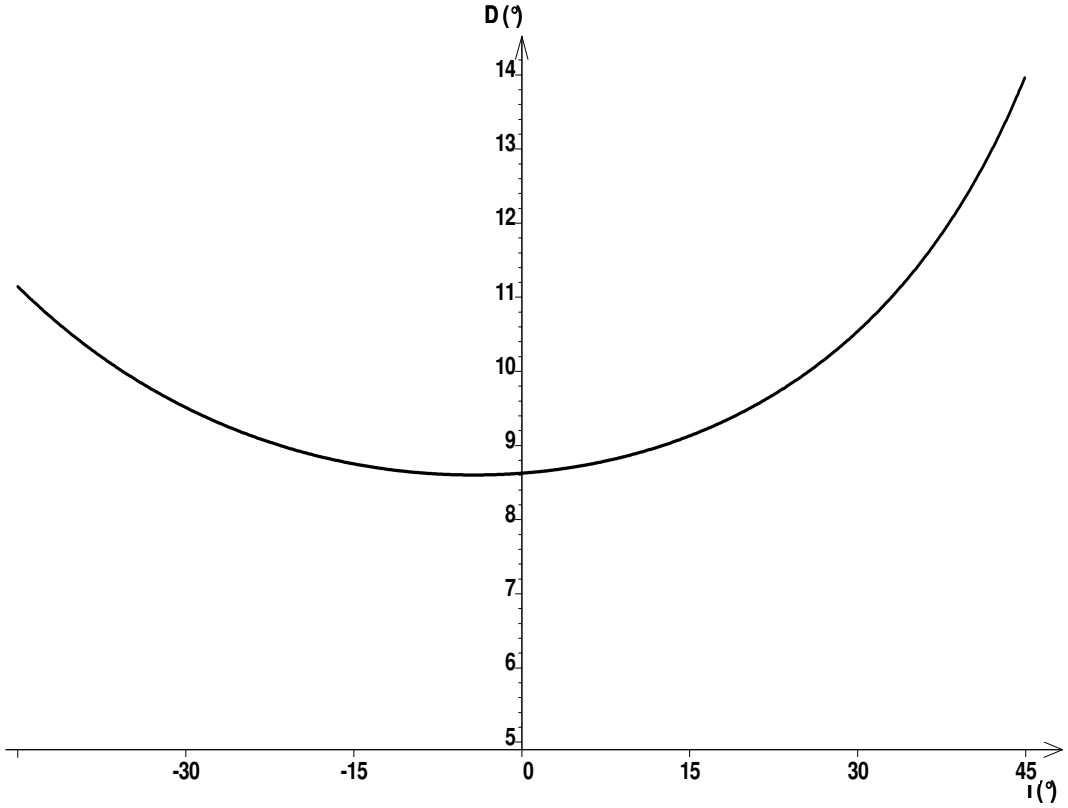
En mesurant D_m, on peut en déduire soit a soit la longueur d'onde dans le vide de la radiation utilisée.

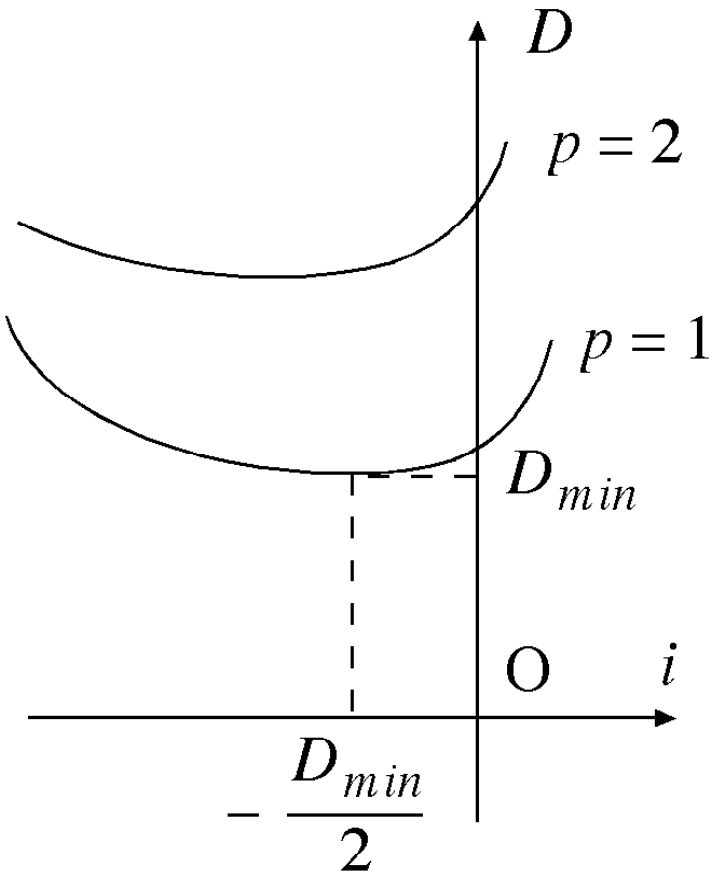
Remarque : cette relation est à comparer à la formule obtenue avec un goniomètre à prisme permettant de mesurer l'indice du prisme :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

La courbe suivante a été tracée avec Regressi, avec un pas du réseau p = 1 / a = 300 traits / mm et une longueur d'onde dans le vide de 500 nm.

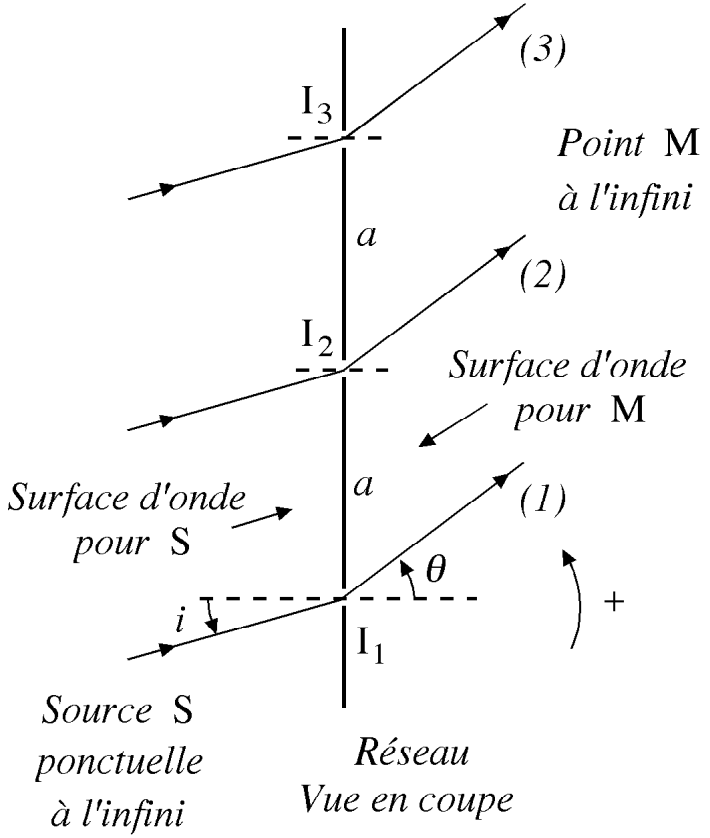
Cette courbe donne la déviation pour l'ordre 1 en fonction de l'angle d'incidence.


D (°)
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
-30
-15
0
15
30
45
i (°)


D
p = 2
p = 1
D min
O
i
- D min / 2

2) Intensité difractée dans un ordre donné :

On ne prend pas en compte dans un 1er temps la diffraction par les motifs du réseau.



On rappelle : $\varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda_0}(\sin\theta - \sin i)$ est le déphasage entre deux rayons successifs.

• Tous les rayons considérés sont issus d'un même train d'onde (division du front d'onde) ⇒ ils sont cohérents et vont donc interférer ; il faut donc sommer les **amplitudes** des vibrations lumineuses. Ecrivons l'amplitude complexe du premier rayon :

$\underline{s}_1 = A\exp(i\omega t)$ ($A = cste$, car les fentes infiniment fines diffractent de façon isotrope)

Par ailleurs : $\underline{s}_{k+1} = \underline{s}_k \exp(-i\varphi) \Rightarrow \underline{s}_{tot} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{s}_1 \exp(-ik\varphi) = \underline{s}_1 \times \frac{1-\exp(-iN\varphi)}{1-\exp(-i\varphi)} \Rightarrow$

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 \times \frac{\exp(-iN\varphi/2)}{\exp(-i\varphi/2)} \times \frac{\exp(iN\varphi/2)-\exp(-iN\varphi/2)}{\exp(i\varphi/2)-\exp(-i\varphi/2)} = \underline{s}_1 \times \frac{\exp(-iN\varphi/2)}{\exp(-i\varphi/2)} \times \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

• On peut alors calculer l'éclairement :

$$\boxed{E(\varphi) = \left\langle \underline{s}_{tot} \times \underline{s}_{tot}^{*} \right\rangle_t = A^2 \times \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = (NA)^2 \times \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2\sin^2(\varphi/2)}} \quad \text{(avec } \underline{s}_1 \times \underline{s}_1^{*} = \left|\underline{s}_1\right|^2 = A^2\text{)}$$

- La fonction est 2π -périodique $\Rightarrow$ on l'étudie dans l'intervalle $[0,2\pi]$

  ♦ pour $\varphi \to 0$, $\sin(\varphi/2) \to \varphi/2 \Rightarrow$ $\boxed{E(\varphi) \to (NA)^2 = E_{max}}$: ceci correspond au cas où tous les rayons qui interfèrent sont **en phase** $\Rightarrow$ l'amplitude totale vaut NA, ce qui correspond bien à un éclairement (grandeur quadratique) égal à $(NA)^2$.

♦ l'éclairement s'annule pour $\sin(N\varphi/2) = 0 \Rightarrow \varphi = 2p\pi/N$, $p \neq 0$ et N ; d'où le graphe :

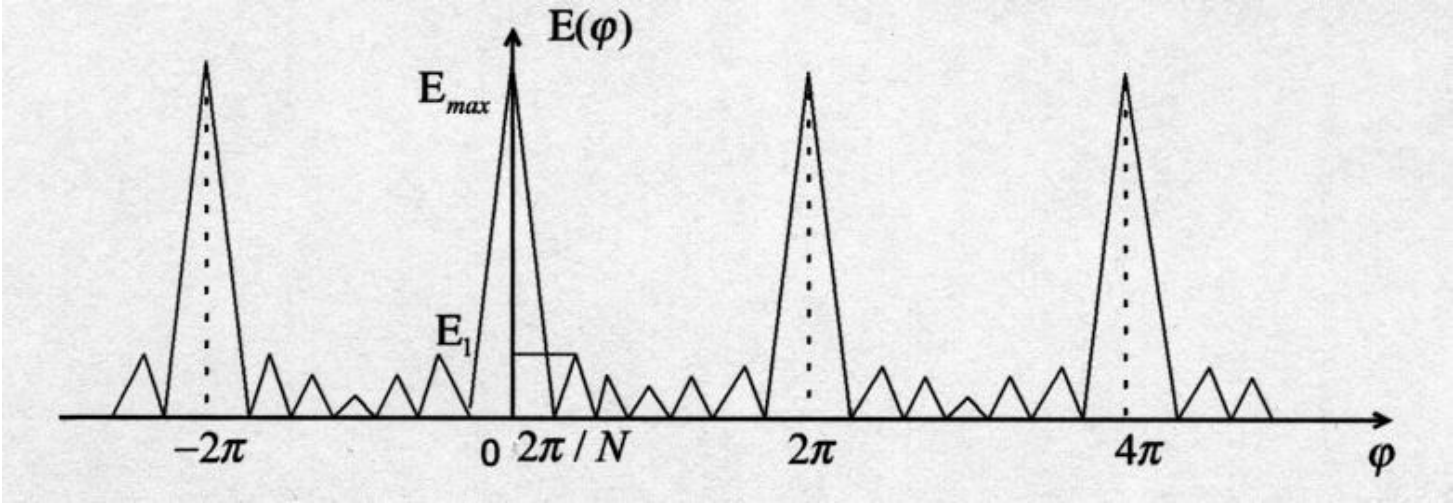
♦ le 1er maximum secondaire a lieu pour $\varphi \approx 3\pi/N \Rightarrow$ $\boxed{E_1 \approx E_{max} \times (2/3\pi)^2 \approx 0,04 \times E_{max}}$

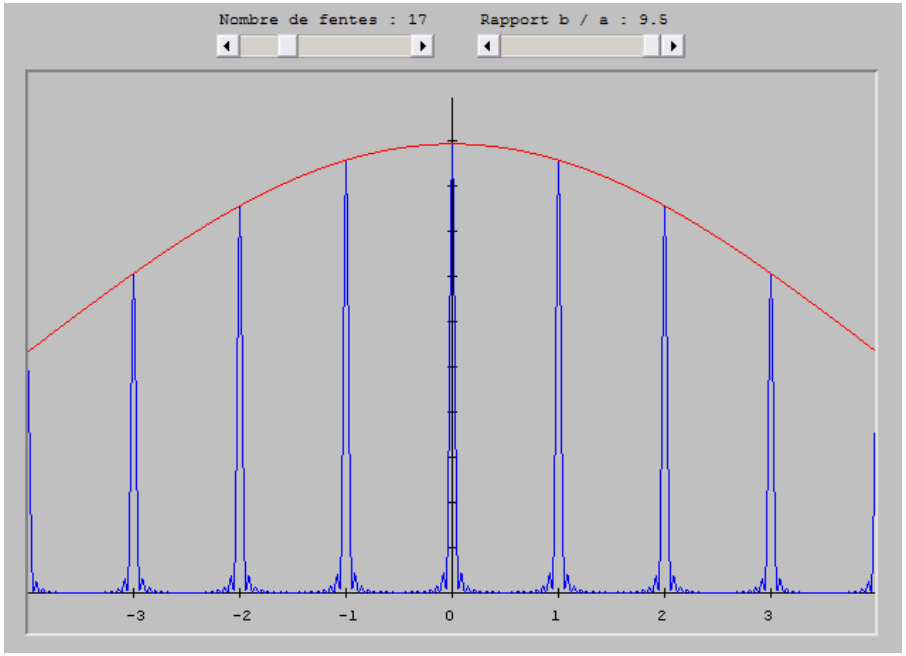
Soient L la longueur du réseau éclairé, a le pas du réseau et N le nombre de traits éclairés :

$$L = Na$$

La demi-largeur d'un maximum principal est égale à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$


E(φ)
E_max
E_1
−2π
0
2π / N
2π
4π
φ


Nombre de fentes : 17
Rapport b / a : 9.5
-3
-2
-1
0
1
2
3

Rq : le 2ème maximum secondaire serait donné par $E_2 \approx E_{max} \times (2/5\pi)^2 \approx 0{,}016 \times E_{max}$; l'éclairement est donc **concentré** dans les directions correspondant aux **maximums principaux**, $\varphi = 2k\pi$, ce qui permet d'obtenir :

$$\varphi = 2k\pi = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta_k - \sin i) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\theta_k = \sin i + k \times \frac{\lambda}{a}} \quad \text{avec : } k \in \mathbb{N}$$

On retrouve la formule classique des réseaux.

Dans cette partie, on prend en compte la diffraction :

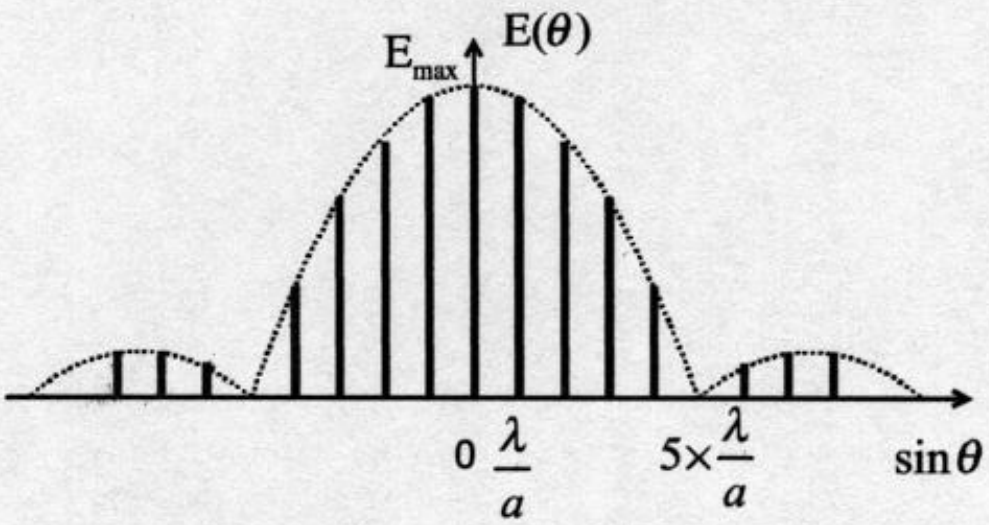
2) Cette fois, il faut tenir compte de la diffraction non isotrope de **chacune** des fentes ; on aura ainsi : $\underline{s}_1(\theta) = A(\theta)\exp(i\omega t) = A_{\max} \times \sin_c\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) \times \exp(i\omega t)$; la suite du calcul est inchangée ⇒

$$\mathrm{E}(\theta) = (NA_{\max})^2 \times \sin_c^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) \times \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{N^2 \times \sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}$$

- b étant plus petit que a, on voit que la « fonction diffraction » ($\sin_c^2$) varie « moins vite » que la « fonction réseau » ($\frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \times \sin^2(\varphi/2)}$) : c'est donc la première qui « enveloppe » la seconde.

- La fonction diffraction s'annule pour la 1ère fois en $\sin\theta = \lambda/b = 5\lambda/a$; les maximums principaux de la fonction réseau sont donnés par $\sin\theta = k\lambda/a$ ⇒ dans le lobe principal de la fonction diffraction, on pourra observer les maximums d'ordre –4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire 9 maximums (les ordres –5 et 5 correspondent à l'annulation de la fonction diffraction et ne sont donc pas visibles).

En pratique, les maximums situés dans les lobes secondaires de la fonction diffraction ne sont pas visibles ; l'éclairement en fonction de θ a donc l'allure suivante :



Conséquence pratique :

Les maximums d'ordre élevé sont de moins en moins lumineux ; lorsqu'on travaille en source polychromatique, les **spectres** d'ordre élevé seront moins visibles: c'est un facteur qui limite le pouvoir de résolution d'un réseau, qui, à priori, augmente avec l'ordre du spectre

3) Pouvoir dispersif d'un réseau :

On rappelle le déphasage entre deux rayons passant par deux traits consécutifs du réseau :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin\theta - \sin i)$$

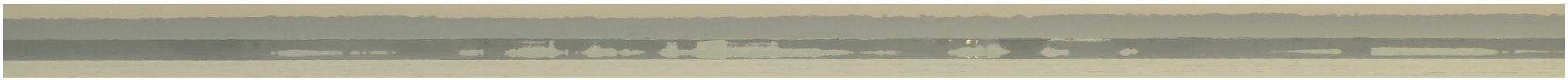
Soient L la longueur du réseau éclairé, a le pas du réseau et N le nombre de traits éclairés :

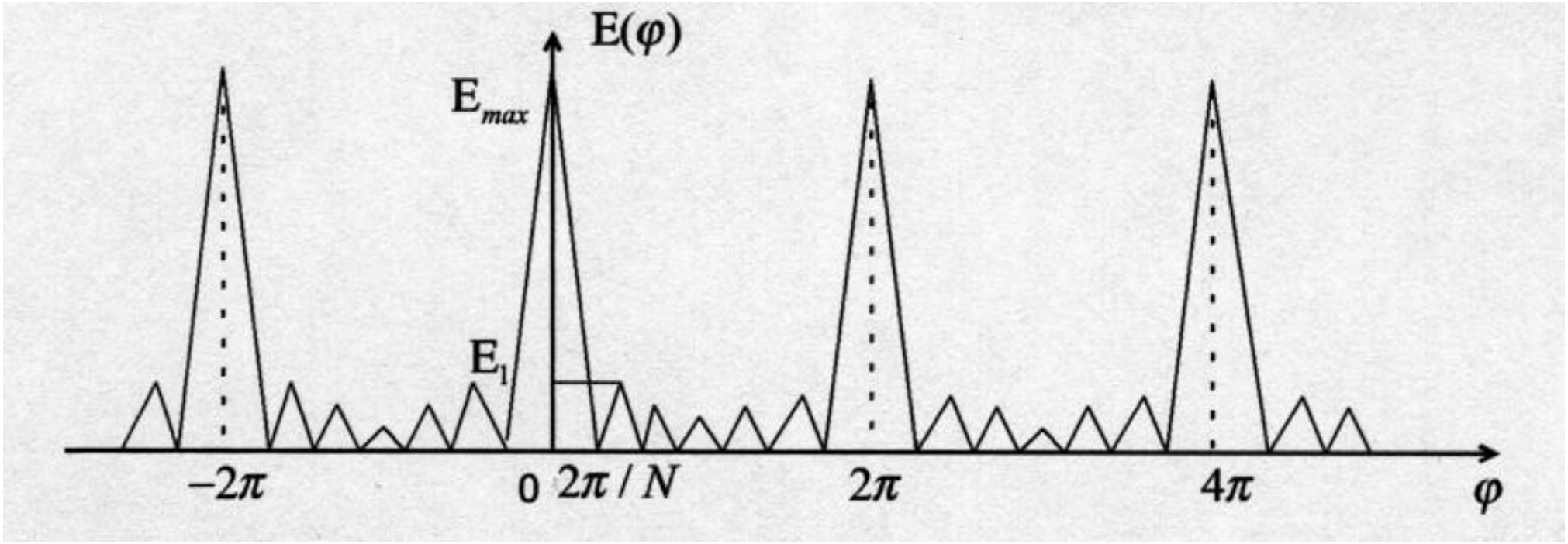
$$L = Na$$

On a montré au paragraphe précédent qu'un maximum principal a une demi-largeur angulaire (prise à mi-hauteur du pic d'intensité) égale à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

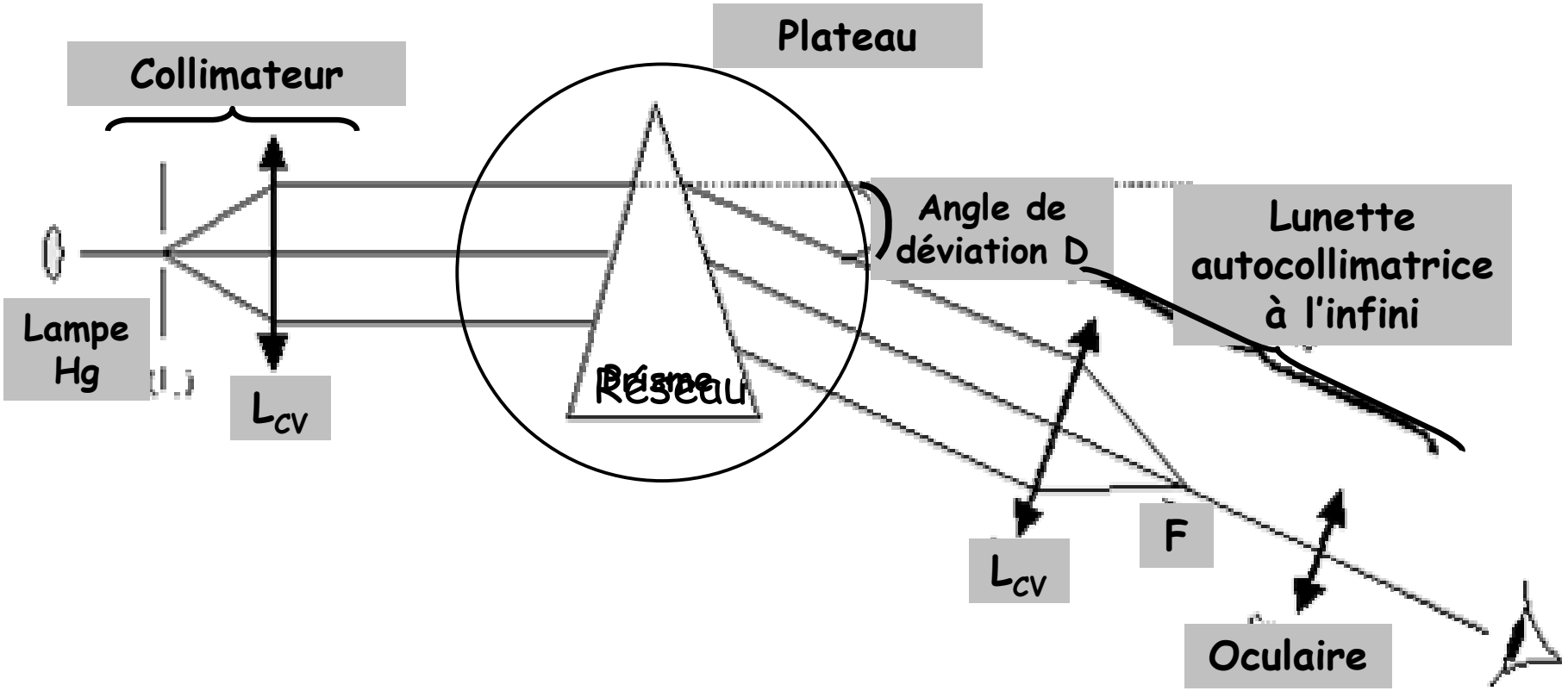
L'analyse spectrale de la lumière sera convenable si le réseau sépare correctement la lumière dans un ordre donné et si deux ordres différents ne se recouvrent pas.



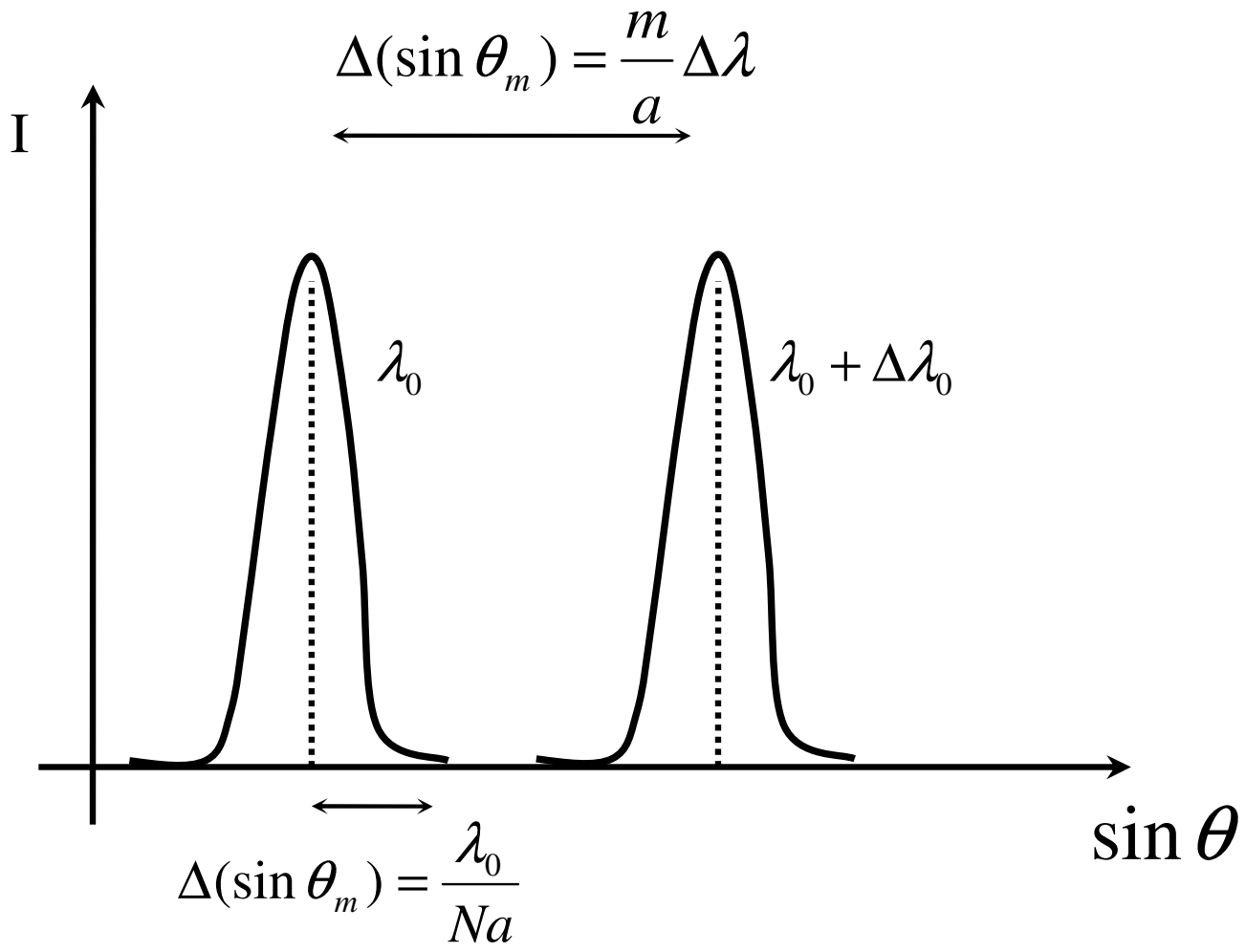


On considère deux radiations lumineuses de longueurs d'onde voisines λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda$ (lampe à vapeur de sodium, par exemple).

On souhaite, dans un ordre donné m, résoudre ces deux raies séparées de $\Delta\lambda$.



On voit sur l'écran ou à travers la lunette auto-collimatrice :


$\Delta(\sin\theta_m) = \frac{m}{a}\Delta\lambda$
I
λ_0
$\lambda_0 + \Delta\lambda_0$
$\Delta(\sin\theta_m) = \frac{\lambda_0}{Na}$
$\sin\theta$

En utilisant l'expression du déphasage pour un même ordre m :

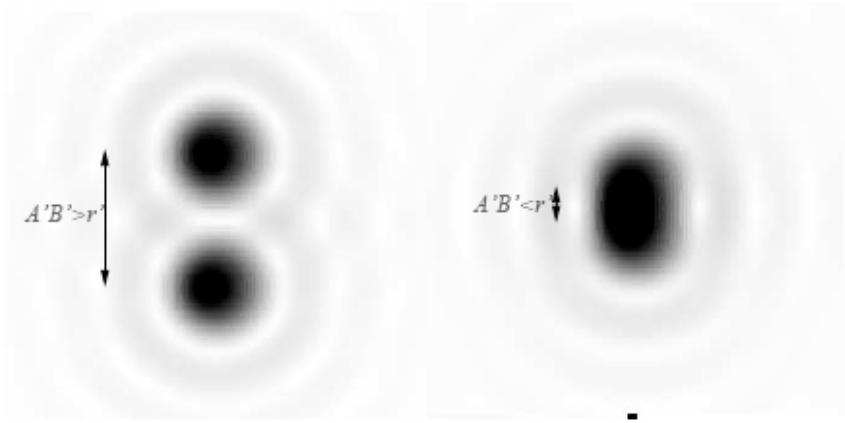
$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin\theta_m - \sin i) = 2\pi m$$

On en déduit l'écart angulaire entre les maximums principaux consécutifs de chacune de ces radiations :

$$\Delta(\sin\theta_m) = \frac{m}{a}\Delta\lambda$$

Cette largeur doit être, d'après le critère de résolution de Rayleigh, supérieure ou égale à la demie largeur angulaire du pic d'intensité d'ordre m, égale à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$



Critère de séparation de Rayleigh : lorsque les deux tâches d'Airy sont séparées par une distance inférieure au rayon d'une tâche, on considère que les deux points images ne sont pas résolus.

Soit, avec $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0}\Delta(\sin\theta_m)$:

$$\Delta(\sin\theta_m) = \frac{\lambda_0}{Na}$$

Et, en se plaçant à la limite de résolution :

$$\frac{\lambda_0}{Na} = \frac{m}{a}\Delta\lambda$$

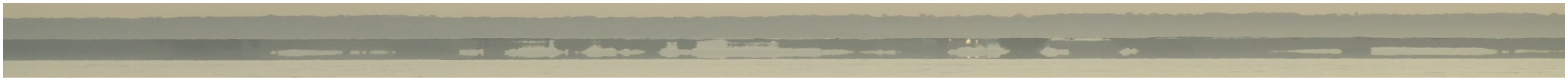
La résolution théorique du réseau est :

$$\Re = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = m\frac{L}{a} = mN$$

Par exemple, dans le cas du sodium :

$$\lambda_0 = 589\ nm \quad ; \quad \Delta\lambda = 0{,}6\ nm \quad ; \quad \Re = 982 \approx 1\,000$$

A l'ordre 1, on peut choisir N = 1 000. A l'ordre 2, N = 500.



Dispersion angulaire du réseau :

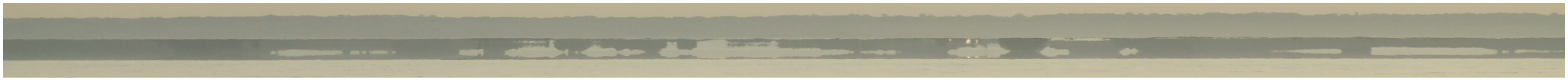
En différentiant l'expression du déphasage $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin\theta_m - \sin i) = 2\pi m$ pour un ordre donné, on obtient :

$$\cos\theta_m d\theta_m = \frac{m}{a} d\lambda_0$$

On montre que la dispersion angulaire du réseau vaut :

$$\Im_{ang} = \frac{d\theta_m}{d\lambda_0} = \frac{m}{a\cos\theta_m}$$

La dispersion est d'autant plus élevée que l'ordre est grand et le pas du réseau petit.



Exercice d'application :

- On considère un réseau de n=1100 traits/mm, délimité par une monture de 35 mm sur 35 mm.
- Il est éclairé par un faisceau lumineux **parallèle**, sous un angle d'incidence noté i (compté à partir de la normale au plan du réseau) ; l'observation se fait à l'**infini**, selon une direction variable notée θ.
- On a donc i et $\theta \in [-\pi/2,\ \pi/2]$.
- On prendra pour limites du spectre visible les longueurs d'onde $\lambda_V = 0,400\mu m$ et $\lambda_R = 0,750\mu m$

1) Quel est l'ordre maximal $p_{\max}$ observable pour chacune des radiations extrêmes du spectre visible ?

2) On s'intéresse, pour un angle i donné, à la « **dispersion angulaire** » $\frac{d\theta}{d\lambda}$ du réseau ; calculer cette grandeur dans le **second** ordre et au **minimum** de déviation, pour $\lambda = 0,5890\mu m$.

3) Par ailleurs, on rappelle que le « **pouvoir de résolution** » du réseau, au sens de Rayleigh, est donné par :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = pN$$

où $\delta\lambda_{\min}$ est le plus petit écart de longueur d'onde (à partir de λ donnée) pouvant être mis en évidence par le spectroscope, p est l'ordre d'observation et N est le nombre total de traits du réseau.

a) Calculer R pour la radiation précédente et dans le second ordre ; en déduire $\delta\lambda_{\min}$.

b) L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f = 1\ m$;quelle est, dans le second ordre et au minimum de déviation, la distance entre les images des raies de longueur d'onde $\lambda = 0,5890\mu m$ et $\lambda + \delta\lambda_{\min}$, dans le plan focal de la lentille ?

c) Ces deux raies sont-elles résolues spatialement si l'image est obtenue grâce à un capteur CCD (« Charge Coupled Device ») constitué de cellules élémentaires (« pixels ») de $10\mu m$ de côté ?

Que peut-il se passer si la focale de la lentille est nettement plus courte ou si les cellules du capteur sont plus larges ?

Solution :

1) On applique LA « formule du réseau », à savoir :

$$\sin\theta - \sin i = p\frac{\lambda}{a} = pn\lambda \quad (1) \quad ; \quad \text{or } \left|\sin\theta - \sin i\right|_{\max} = 2 \Rightarrow \boxed{p_{\max} = E\left(\frac{2}{n\lambda}\right)}$$

• L'application numérique donne : pour le ROUGE : $\boxed{p_{\max}^{R} = 2}$; pour le VIOLET : $\boxed{p_{\max}^{V} = 4}$

Rq : ces valeurs sont faibles, c'est une des limitations des réseaux **plans**, puisque le pouvoir de résolution est proportionnel à l'ordre p .

2) On différentie la relation (1), à i, n et p fixés, ce qui conduit à :

$$\cos\theta d\theta = pnd\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{pn}{\cos\theta}}$$

• Considérons le minimum de déviation, dans un ordre donné et pour une longueur d'onde donnée ; cette fois, la différentiation de la relation (1) fournit :

$$\cos\theta \times d\theta = \cos i \times di \qquad (2)$$

Par ailleurs, l'angle de déviation D est défini par : $D = \theta - i \Rightarrow \dfrac{dD}{di} = \dfrac{d\theta}{di} - 1$

$\Rightarrow$ pour la déviation minimale, on a : $\dfrac{dD}{di} = \dfrac{d\theta}{di} - 1 = 0 \Rightarrow d\theta = di \Rightarrow$ on reporte dans (2) :

$\cos\theta = \cos i \Rightarrow \theta = \pm i$, pour i et $\theta \in [-\pi/2,\ \pi/2]$; or $\theta = i$ correspond à l'ordre 0, qui ne présente aucun intérêt en spectroscopie $\Rightarrow$ on retient la solution $\theta_{min} = -i_{min} \Rightarrow \boxed{D_{min} = -2i}$.

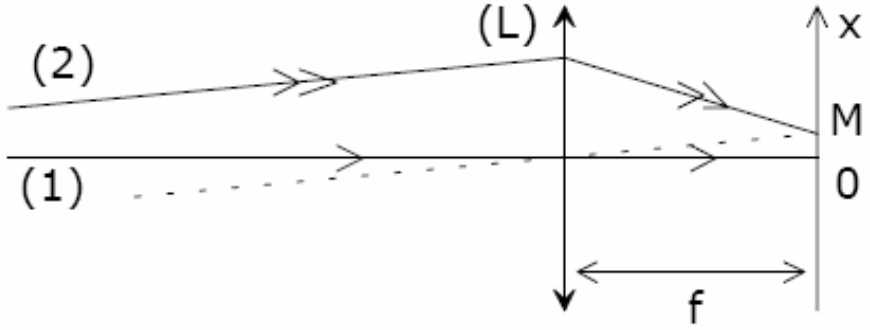
• En reportant cette dernière expression dans la relation (1), et se plaçant dans l'ordre 2, il vient :

$$2\sin\theta_{min} = 2n\lambda \Rightarrow \boxed{\theta_{min} = 0,7048\ rad = 40,38°} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{d\lambda} = 2,888\ rad/\mu m}$$

3)a) Une simple application numérique fournit :

$$\boxed{R = 2\times N = 2\times n\times 35 = 77000} \Rightarrow \boxed{\delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{R} = 7,649.10^{-12}\,m = 7,649\,pm}$$

b) Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Pour simplifier, on suppose que la lentille est perpendiculaire au rayon (1), correspondant à la raie de longueur d'onde λ .

- Quant à lui, le rayon (2), associé à la raie $\lambda + \delta\lambda_{\min}$, fait un angle $\delta\theta_{\min}$ avec le rayon (1).

- En notant $\delta x_{\min}$ la distance OM, on peut lire sur la figure :

$$\delta x_{\min} = f \times \tan(\delta\theta_{\min}) \simeq f \times \delta\theta_{\min} = f \times \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) \times \delta\lambda_{\min}$$

- L'application numérique permet d'obtenir :

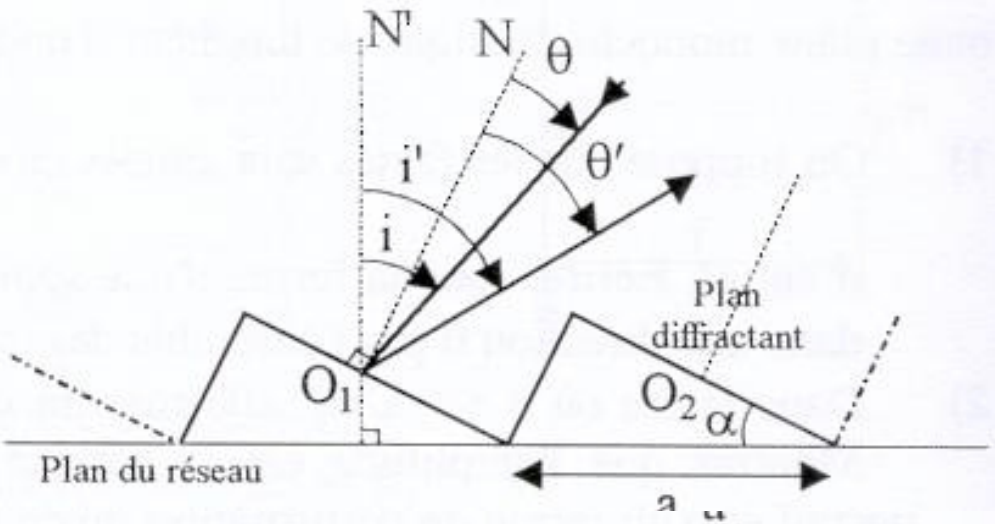
$$\boxed{\delta\theta_{\min} = 2,209.10^{-5} rad} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta x_{\min} = 22,09 \mu m}$$

c) Les images des deux raies par la lentille sont séparées par une distance supérieure à la taille des pixels : elles se formeront donc sur **deux** cellules CCD **différentes** et donneront bien deux « informations » distinctes $\Rightarrow$ les deux raies, déjà résolues angulairement, seront effectivement résolues spatialement.

Rq : si la distance focale de la lentille est plus faible (ou si la taille des pixels est plus grande), les deux rayons peuvent impressionner le même pixel et ne donner qu'une seule « image » : les raies, résolues angulairement, ne le sont plus spatialement.

VI) Etude d'un réseau à échelettes :

Un réseau à échelette est obtenu en traçant sur une surface métallique des dents de scie dont la coupe est représentée sur la figure ci-contre. Les bandes utiles réfléchissantes, de largeur b, sont inclinées d'un angle α et constituent un réseau de N bandes de pas $a = \frac{b}{\cos\alpha}$. On éclaire ce réseau à l'aide d'un faisceau parallèle monochromatique incident sous l'angle i, et on observe la lumière diffractée dans la direction i'.



1) Calculer l'amplitude diffractée par une bande dans la direction i'. Dans quelle direction trouve-t-on un maximum ? Une amplitude nulle ?

2) Calculer l'intensité totale diffractée par le réseau dans la direction i'.

3) Tracer les deux graphes des fonctions de diffraction et d'interférence. En déduire que l'on peut ajuster les paramètres du réseau de telle sorte que, pour une longueur d'onde donnée, seul le maximum d'ordre p soit lumineux et tous les autres éteints.

Solution :

1) L'amplitude diffractée dans la direction θ' par une bande diffractante est :

$$\underline{s}(\theta') = s_0 \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta' + \sin\theta)\,\xi\right] d\xi$$

avec $\theta' = i' - \alpha$ et $\theta = i - \alpha$. Il en résulte que :

$$\boxed{\underline{s}(i') = s_0 b \,\mathrm{sinc}\left[\frac{\pi b}{\lambda}\left(\sin(i'-\alpha) + \sin(i-\alpha)\right)\right]} \quad (1)$$

Cette amplitude est maximale quand $\sin(i'-\alpha) = -\sin(i-\alpha)$ soit :

$$\boxed{i' = -i + 2\alpha} \quad (2)$$

Elle est nulle pour :

$$\boxed{\sin(i'-\alpha) = p\frac{\lambda}{b} - \sin(i-\alpha)} \quad (3)$$

avec p entier non nul.

2) L'amplitude totale diffractée par le réseau dans la direction i' est :

$$\underline{S}(i') = \underline{s}(i') \sum_{n=-m}^{m} \exp\left[-jn\frac{2\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right]$$

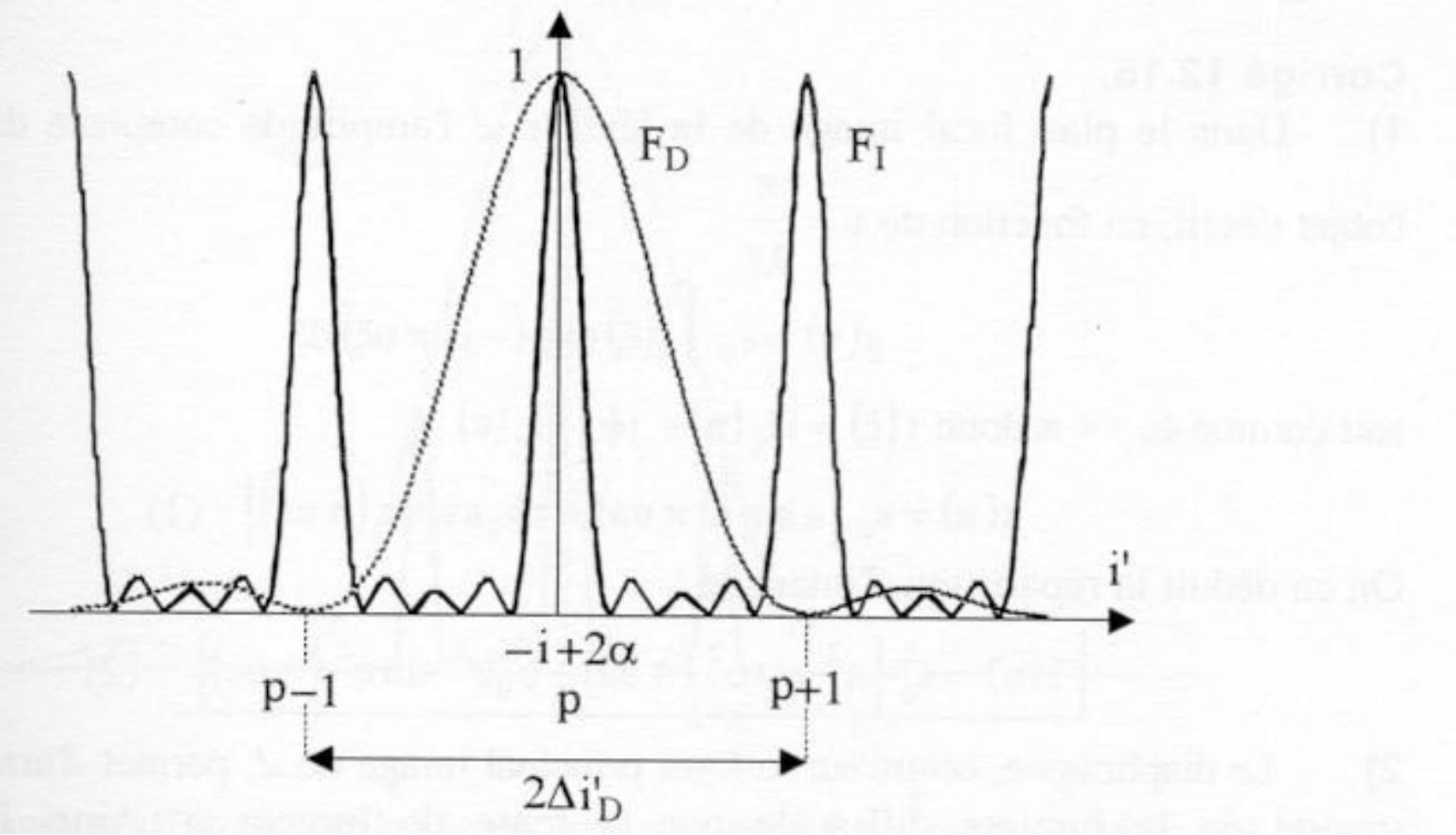
avec $N = 2m + 1$, ce qui nous donne :

$$\underline{S}(i') = N\underline{s}(i') \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)}{N\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)}\right] \quad (4)$$

On en déduit l'intensité diffractée dans la direction i' :

$$I(i') = N^2 \left|\underline{s}(i')\right|^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)}{N\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)}\right]^2 = N^2\, F_D(i').F_I(i') \qquad (5)$$

3) Les fonctions de diffraction et d'interférence sont représentées ci-dessous dans le cas où seul l'ordre p est lumineux.


1
F_D
F_I
i'
$-i+2\alpha$
p−1
p
p+1
$2\Delta i'_D$

Le maximum principal de diffraction correspond, comme nous l'avons vu, à :

$$i' = -i + 2\alpha \quad (2)$$

Les maxima d'interférence sont définis par :

$$\sin i' + \sin i = p\frac{\lambda}{a} \quad (6)$$

avec p entier.

On peut faire coïncider le maximum d'interférence d'ordre p avec le maximum principal de diffraction si les conditions (2) et (6) sont remplies simultanément. Il faut donc que l'angle d'incidence i soit tel que :

$$\boxed{2\sin\alpha\cos(i-\alpha) = p\frac{\lambda}{a}} \quad (7)$$

Par ailleurs, on veut que les autres maxima d'interférence soient éteints.

La demi-largeur angulaire du maximum principal de diffraction, qui est aussi la distance entre deux minima nuls - sauf ceux qui encadrent ce maximum - est, d'après (3) :

$$\Delta i'_D \approx \frac{\lambda}{b\cos(i'-\alpha)} = \frac{\lambda}{b\cos(i-\alpha)} \quad (8\text{-a})$$

La distance angulaire entre deux maxima de la figure d'interférence est, d'après (6) :

$$\Delta i'_I \approx \frac{\lambda}{a\cos i'} = \frac{\lambda}{a\cos(i-2\alpha)} \quad (8\text{-b})$$

L'extinction des maxima différents de p nécessite donc que $\Delta i'_D = \Delta i'_I$, soit :

$$\boxed{a\cos(i-2\alpha) = b\cos(i-\alpha)} \quad (9)$$

Comme $b = a\cos\alpha$ la seule solution possible pour (9) est $i = \alpha$. Donc d'après (7), pour p et λ donnés, il faut que $2a\sin\alpha = p\lambda$.

Dans ce cas on dit que le réseau est "blazé" pour l'ordre p.

Ce résultat n'est obtenu, en toute rigueur, que pour une longueur d'onde λ donnée. Si on éclaire ce réseau avec une lumière polychromatique dont le spectre est centré sur λ, de la lumière réapparaît dans les autres ordres pour les autres radiations. Toutefois la quasi totalité du flux lumineux incident se retrouve dans l'ordre p ; il n'y a pas de partage de la lumière incidente entre les divers ordres comme avec un réseau classique.