Diffraction à l'infini



Chapitre 3

Diffraction à l'infini



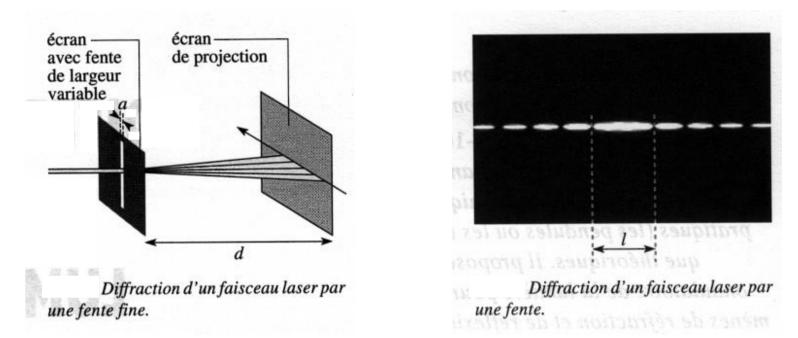
I) Principe d'Huygens - Fresnel:

1 - Présentation du phénomène de diffraction :

Notion de diffraction: La diffraction est un éparpillement de la lumière par les bords d'un obstacle avec apparition d'oscillation de l'éclairement près de l'ombre géométrique. La diffraction concerne aussi bien les ondes électromagnétiques (donc les ondes lumineuses) que les ondes mécaniques (ondes sonores, ondes à la surface de l'eau ...). Dans le cadre de l'optique, le phénomène de diffraction met en défaut les lois de l'optique géométrique pour laquelle la propagation de la lumière est rectiligne dans un milieu homogène et transparent. En fait le phénomène de diffraction apparaît chaque fois que l'onde lumineuse rencontre un obstacle mais les effets ne sont manifestement observables que lorsque les dimensions de cet obstacle sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

Optique Géométrique = $\lim_{\lambda \to 0}$ Optique Ondulatoire

L'expérience suivante montre la diffraction d'un rayon laser par une fente de largeur variable a et de « grande » hauteur.



Sur un écran de projection située à quelques mètres, on constate que la tâche quasi-ponctuelle formée par le faisceau, en l'absence d'obstacle, s'élargit perpendiculairement à la fente lorsque celle-ci se rétrécit.

De plus, l'éclairement de l'écran n'est pas uniforme : autour de la tâche centrale existent des tâches secondaires, moins larges et moins lumineuses.

Des mesures expérimentales relient d (distance entre la fente et l'écran), ℓ (largeur de la tâche centrale), λ (longueur d'onde) et a (largeur de la fente) :

$$\ell \approx 2 \frac{\lambda d}{a}$$

Ce qui correspond à une tâche de demi-largeur angulaire :

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{a}$$

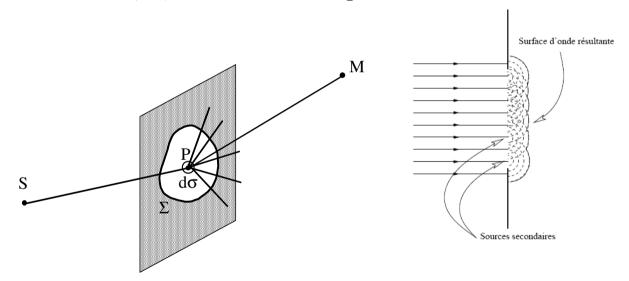
Si les lois de propagation rectiligne étaient vérifiées, la tâche serait plus fine dans la direction perpendiculaire à la fente : la tentative de limitation du faisceau a en fait abouti à un résultat opposé.

En revanche, dans la direction de la fente, on n'observe aucun élargissement.

2 - Enoncé du principe de Huygens-Fresnel:

Soit (Σ) une ouverture plane éclairée par une source ponctuelle (S) monochromatique de longueur d'onde λ_0 . Soit un découpage de (Σ) en éléments de surface $d\sigma(P)$ centrés en P. Alors, pour le calcul de l'éclairement en un point M:

• Chaque élément de surface se comporte comme une source ponctuelle fictive, émettant une ondelette dont l'amplitude complexe instantanée en P est proportionnelle à l'amplitude complexe instantanée <u>a</u>_S(P,t) de l'onde émise par S en P et à l'élément de surface dσ(P).



• Les sources fictives sont cohérentes : les ondes émises par ces sources secondaires interfèrent donc entre elles.

3 – Expression mathématique du principe :

Dans le cas où S et M sont à distance finie de (Σ) dans un milieu homogène, les ondes correspondantes sont sphériques. Si l'ensemble du dispositif est plongé dans l'air d'indice 1,

l'amplitude complexe instantanée reçue en P s'écrit, avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$:

$$\underline{a}_{S}(P,t) = \frac{A_{0}}{SP} \exp[i(\omega t - k_{0}SP)]$$

(Le terme 1 / SP peut s'expliquer par des considérations énergétiques : le flux du vecteur de Poynting à travers toute sphère centrée sur S est constant).

L'amplitude complexe émise en M par la source élémentaire centrée en P s'écrit donc :

$$d\underline{a}_{P}(M,t) = K\underline{a}_{S}(P,t) \frac{\exp[-ik_{0}PM]}{PM} d\sigma(P)$$

(Le terme 1 / PM traduit la nature sphérique de l'onde et le terme en $\exp[-ik_0PM]$ traduit la propagation de P à M).

Soit:

$$d\underline{a}_{P}(M,t) = K \frac{A_{0} \exp[i(\omega t - k_{0}SP)]}{SP} \frac{\exp[-ik_{0}PM]}{PM} d\sigma(P)$$

Les sources fictives étant cohérentes, leurs amplitudes complexes instantanées sont additives :

$$\underline{a}(M,t) = K \iint_{(\Sigma)} \frac{A_0}{SP} \frac{1}{PM} \exp[i\omega t] \exp[-ik_0 SP] \exp[-ik_0 PM] d\sigma(P)$$

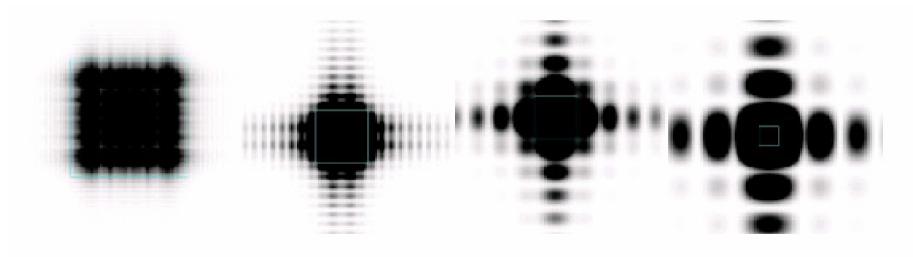
L'amplitude complexe vaut alors (en simplifiant par $\exp(i\omega t)$):

$$\underline{a}(M) = K \iint_{(\Sigma)} \frac{A_0}{SP} \frac{1}{PM} \exp[-ik_0 SP] \exp[-ik_0 PM] d\sigma(P)$$

4 – Distinction « diffraction à distance finie » et « diffraction à l'infini » :

Lorsque la distance entre la pupille de diffraction et l'écran d'observation est finie, on parle de diffraction à distance finie ou « diffraction de Fresnel ».

Dans le cas contraire, on parle de diffraction à l'infini ou encore « diffraction de Fraunhofer ». Les calculs sont plus simples et l'on étudiera le phénomène de diffraction dans une direction définie par le vecteur unitaire \bar{u} ; en pratique, les observations se feront dans le plan focal d'une lentille convergente.



Passage du régime de Fresnel au régime de Fraunhofer : Évolution du diffractogramme d'une pupille carrée lorsque le plan d'observation s'éloigne de l'ouverture.

Lorsque les points S et M sont très éloignés, les variations de 1 / SP et 1 / PM intervenant dans l'expression complexe de l'amplitude sont négligeables et ces termes peuvent être considérés comme des constantes qui peuvent être incluses dans la constante K. En regroupant par ailleurs les termes de phase selon :

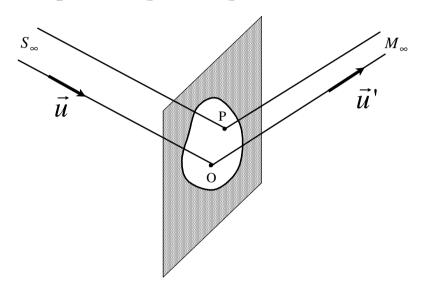
$$(SPM) = (SP) + (PM)$$

Il vient:

$$\underline{a}(M) = K \iint_{(\Sigma)} A_0 \exp[-ik_0(SPM)] d\sigma(P)$$

Recherche du chemin optique (SPM):

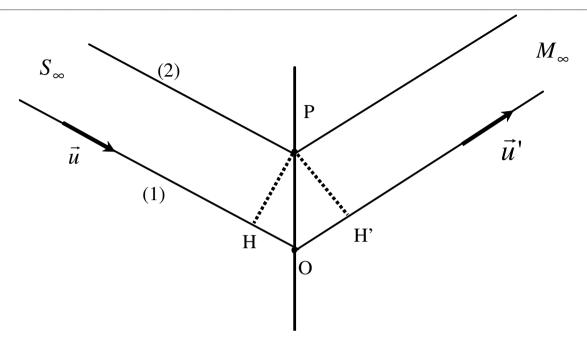
On détermine la différence de marche entre deux rayons : l'un qui tombe sur l'origine O de la pupille et l'autre qui tombe en un point P quelconque.



On note \vec{u} la direction de l'onde initiale et \vec{u}' la direction de l'onde diffractée.

On a alors:

$$\vec{u}.\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{HO}$$
 et $\vec{u}'.\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OH}'$



La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = S_{\infty} P M_{\infty} - S_{\infty} O M_{\infty} = -\overline{HO} - \overline{OH'} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{u'}.\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'})$$

Soit:

$$S_{\infty}PM_{\infty} = S_{\infty}OM_{\infty} + \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}')$$

Le principe d'Huygens-Fresnel devient :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp\left[-ik_0(S_{\infty}OM_{\infty})\right] \iint_{(\Sigma)} \exp\left[ik_0(\vec{u}' - \vec{u}).\overrightarrow{OP}\right] d\sigma(P)$$

Réalisation pratique des conditions de Fraunhofer :

La source S à l'infini peut être obtenue à l'aide d'un laser et l'observation à l'infini peut être approchée par l'observation sur un écran éloigné.

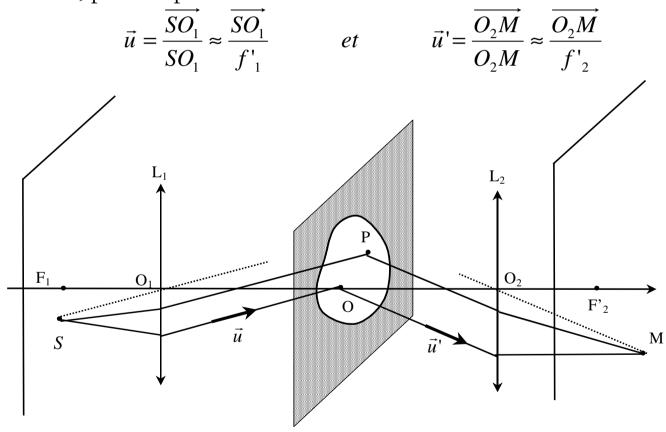
Si l'on note:
$$\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$$
 et $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$

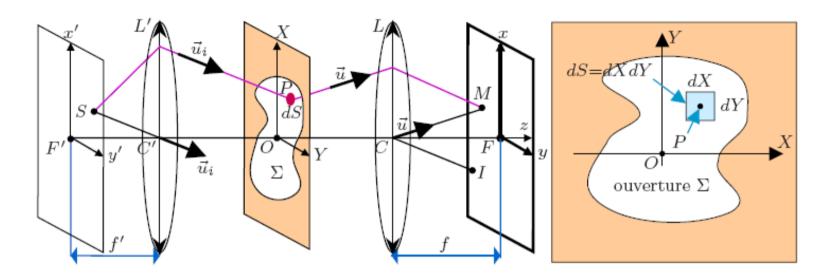
Alors, avec
$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$
 et $\overrightarrow{OP}(X, Y)$:

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp\left[-ik_0(S_{\infty}OM_{\infty})\right] \iint_{(\Sigma)} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0} \left((\alpha' - \alpha)X + (\beta' - \beta)Y\right)\right] dX dY$$

5 – Diffraction à l'infini d'une onde plane par un diaphragme plan :

On peut aussi réaliser un collimateur en plaçant une source ponctuelle S dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente (L_1) et en plaçant l'écran d'observation dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (L_2). Les directions \vec{u} et \vec{u}' s'obtiennent dans ce cas en utilisant les rayons non déviés, passant par les centres des lentilles :



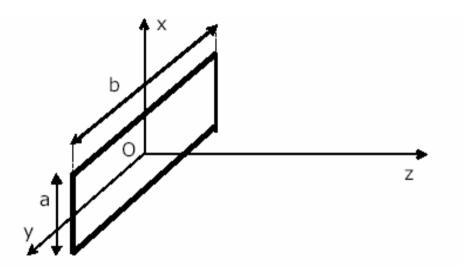


Si on note (x_S, y_S, z_S) les coordonnées de S et (x,y,z) celles de M :

$$\vec{u} \approx \begin{pmatrix} -\frac{x_S}{f'_1} \\ -\frac{y_S}{f'_1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \vec{u}' \approx \begin{pmatrix} \frac{x}{f'_2} \\ \frac{y}{f'_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

II) Exemple d'une ouverture rectangulaire :

1 - Expression de l'éclairement :



On intègre la relation précédente sur une ouverture rectangulaire (largeur a et longueur b), en remarquant que les variables x et y sont indépendantes.

On choisit l'origine O au centre de l'ouverture rectangulaire ; alors, en notant X et Y les coordonnées du point P :

$$(\vec{u}' - \vec{u}).\overrightarrow{OP} = (\alpha' - \alpha) X + (\beta' - \beta) Y$$

L'intégrale se factorise :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp\left[-ik_0 \left(S_{\infty}OM_{\infty}\right)\right] \int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0} \left((\alpha' - \alpha) X\right)\right] dX \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0} \left((\beta' - \beta) Y\right)\right] dY$$

Après calculs (en définissant la fonction sinus-cardinal ($\sin c(u) = \frac{\sin u}{u}$)):

$$\underline{a}(M) = KA_0 ab \exp\left[-ik_0 (S_{\infty}OM_{\infty})\right] \sin c \left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0}\right) \sin c \left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0}\right)$$

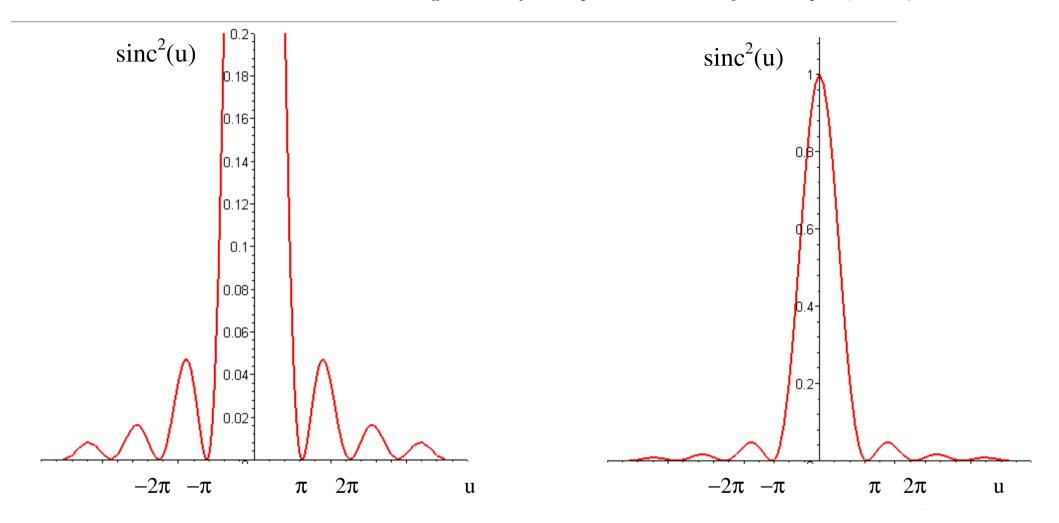
L'éclairement vaut, en notant $E_0 = K^2 A_0^2 a^2 b^2$

$$E(M) = E_0 \sin c^2 \left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0} \right) \sin c^2 \left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0} \right)$$

Le graphe de la fonction sinc²(u) est donné ci-dessous. On constate que :

- $sinc^2(u)$ présente un maximum absolu, appelé maximum principal, égal à 1 en u = 0.
- $sinc^2(u)$ s'annule pour $u = n\pi$, avec n entier non nul.
- Entre deux zéros successifs, sinc²(u) présente un maximum secondaire situé pratiquement au milieu de deux zéros successifs. On peut ainsi évaluer :

$$\sin c^2 \left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,04 \qquad et \qquad \sin c^2 \left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0,016$$



Graphe de la fonction $sinc^2(u)$

Représentation graphique de l'éclairement :

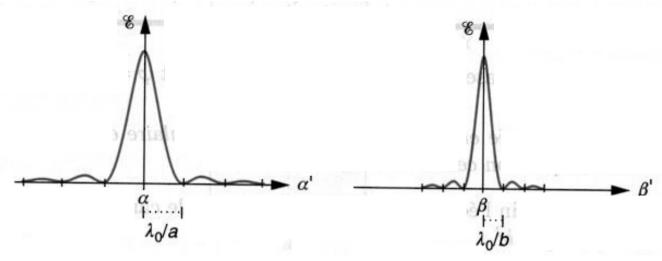
L'éclairement:

$$E(M) = E_0 \sin c^2 \left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0} \right) \sin c^2 \left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0} \right)$$

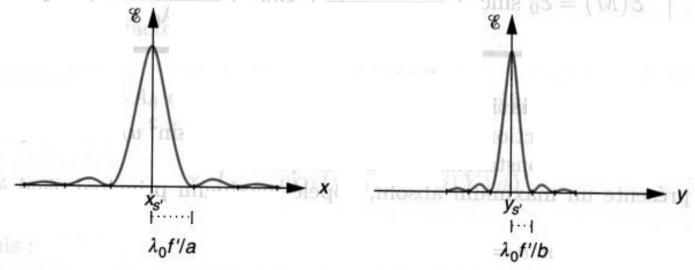
est donné sur les figures suivantes (à α ou β fixés, en choisissant b=2a).

En fonction de x et y, l'éclairement devient (en supposant $f'_1 = f'_2 = f'$):

$$E(M) = E_0 \sin c^2 \left(\frac{\pi (x - x_S)a}{\lambda_0 f'} \right) \sin c^2 \left(\frac{\pi (y - y_S)b}{\lambda_0 f'} \right)$$

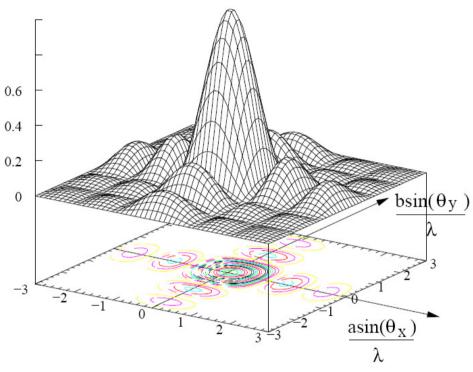


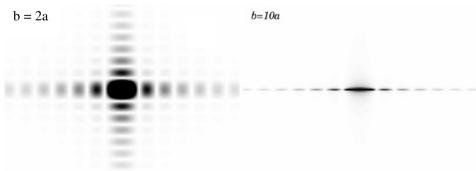
Eclairements pour β ou α fixés (par exemple, , $\beta = \beta$ ' et $\alpha = \alpha$ ')



Eclairements pour x ou y fixés.

amplitude de l'onde diffractée par une fente avec a=b





Conclusions:

• L'éclairement est maximum pour $\alpha = \alpha'$ et $\beta' = \beta$, c'est-à-dire pour $\vec{u} = \vec{u}'$, soit au point M situé sur le rayon lumineux non dévié. M est l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles.

Ce résultat est général :

« Dans un phénomène de diffraction à l'infini, l'éclairement est maximal sur l'image géométrique de la source ».

• L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentrée dans la frange centrale de diffraction, centrée sur l'image géométrique S' de la source S et de demi-largeurs angulaires :

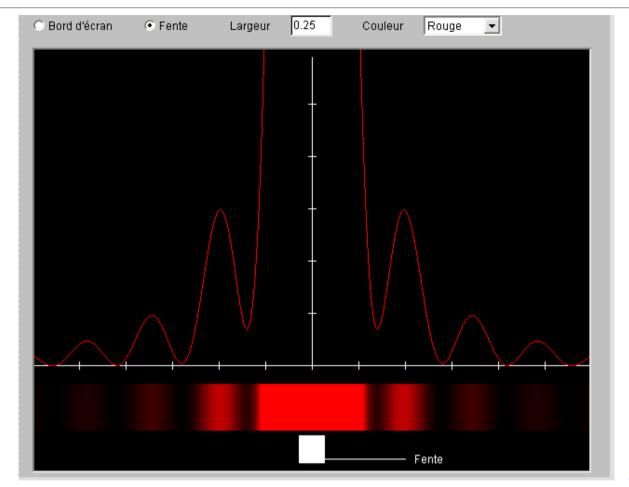
$$\left|\alpha' - \alpha\right| = \frac{\lambda_0}{a}$$
 et $\left|\beta' - \beta\right| = \frac{\lambda_0}{b}$

On retrouve dans la figure de diffraction les dimensions caractéristiques de la pupille diffractante. « Dans une figure de diffraction à l'infini, les dimensions caractéristiques de la pupille diffractante δ interviennent par leurs inverses $1/\delta$ ».

Ainsi, dans le cas ou b = 2a, les franges sont deux fois plus longues selon (Ox) que selon (Oy). On peut aussi dire que le phénomène de diffraction est le plus marqué dans la direction où la fente est la plus étroite.

• Les franges secondaires de diffraction sont deux fois moins larges que la frange centrale et beaucoup moins lumineuses.

On peut calculer l'intensité des taches relativement à celle de la tache centrale; pour les 4 taches les plus voisines, cette intensité relative est de 4,7% et elle tombe à 1,6% pour les 4 suivantes.



Animation JJ.Rousseau

2 – Cas limite d'une fente fine :

On s'intéresse au cas fréquent où l'une des dimensions de l'ouverture est très inférieure à l'autre.

Ici, on considère que a << b.

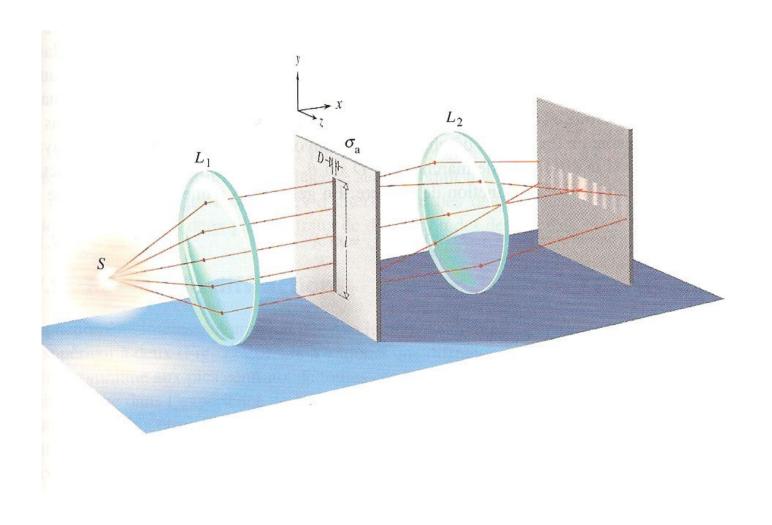
La diffraction s'effectue alors dans la direction verticale (Ox) ; le point P de la pupille diffractante est alors définie uniquement par sa coordonnée X et l'expression de l'amplitude diffractée se simplifie :

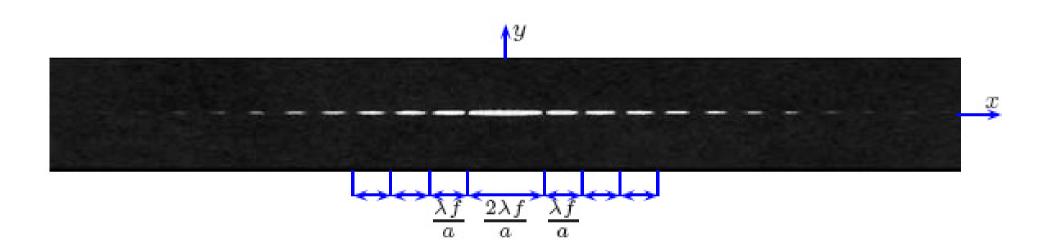
$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp\left[-ik_0 (S_{\infty}OM_{\infty})\right] \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_0} ((\theta' - \theta) X)\right] dX$$

où θ et θ ' désignent les angles d'inclinaison des rayons incident et diffracté par rapport à l'axe optique.

L'éclairement est ensuite :

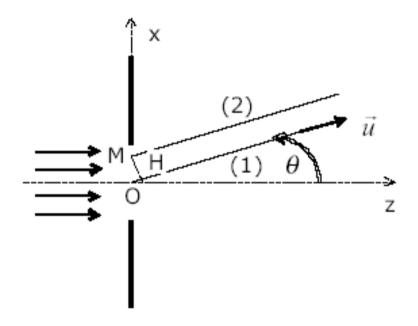
$$E(M) = E_0 \sin c^2 \left(\frac{\pi(\theta' - \theta)a}{\lambda_0} \right)$$





Calcul direct de l'intensité diffractée dans le cas d'une incidence normale :

On se place dans le cas de la figure ci-dessous :



L'amplitude diffractée en un point M d'un écran situé dans le plan focal d'une lentille CV est :

$$a(M) = K \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(ik_0.OH) b dX = K \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda_0}.X\theta\right) b dX$$

Avec $\theta = x / f'$, il vient:

$$a(M) = K \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x}{f'} X \right) b dX = Kab \sin c \left(\frac{\pi xa}{\lambda_0 f'} \right)$$

On en déduit ensuite l'éclairement :

$$I(M) = I_0 \sin c^2 \left(\frac{\pi x a}{\lambda_0 f'} \right)$$

La largeur de la tâche centrale est donc :

$$d = \frac{2\lambda_0 f'}{a}$$

Si on considère que le phénomène de diffraction n'est plus visible si d devient inférieure à 1 mm, alors, avec f' = 20 cm par exemple :

$$a > 400 \lambda_0$$

III) Cas d'une ouverture circulaire :

- C'est un cas très fréquent en diffraction, car la monture des lentilles ou des miroirs utilisés dans les instruments d'optique (appareils photographiques, télescopes...) sont généralement circulaires.
- La figure de diffraction obtenue a la symétrie de révolution : elle se compose d'anneaux (alternativement sombres et brillants), entourant une tache centrale beaucoup plus brillante, qui porte le nom de « TACHE D'AIRY ».
- Les limites angulaires de la tache d'Airy sont données par :

$$\sin \theta_L = 1,22 \times \frac{\lambda_0}{D}$$
 où D est le **diamètre** du diaphragme circulaire)

Rq: si E_{max} est l'éclairement au centre de la tache d'Airy, celui correspondant au premier anneau brillant n'est plus que de $1{,}75\% \times E_{max}$.

On peut évaluer le rayon du 1^{er} anneau noir, obtenu quand $\theta = \theta_L$; alors :

$$r = f' \theta_L = 1,22 \frac{\lambda_0 f'}{D}$$

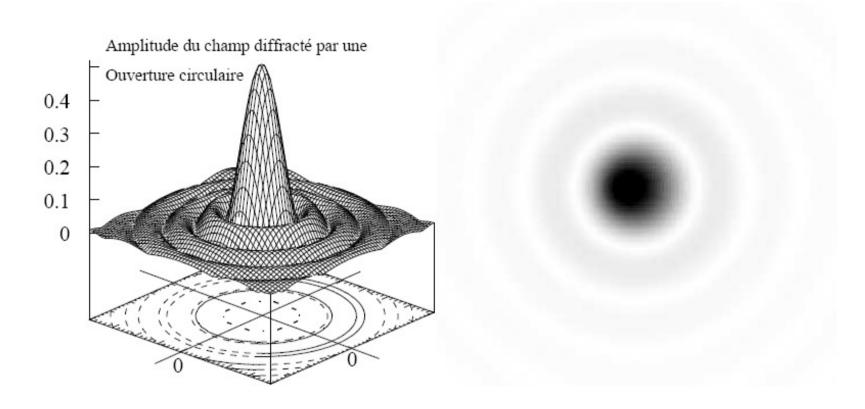


Figure de diffraction générée par une pupille circulaire. La tache circulaire centrale s'appelle la tâche d'Airy.

IV) Diagramme de phase, diagramme d'amplitude :

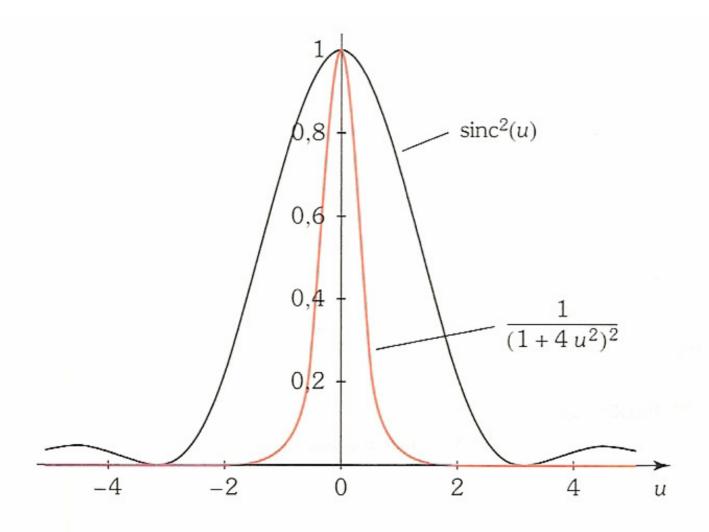
Exercice d'application; apodisation

On étudie la figure de diffraction par une fente éclairée par un faisceau monochromatique de lumière parallèle en incidence normale. Grâce à un cache, on obtient un coefficient de transparence variable avec l'abscisse, sur la largeur de la fente :

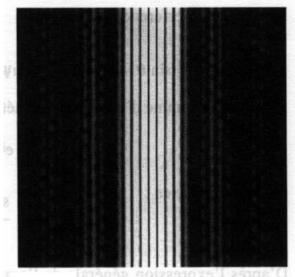
$$t(X) = \exp\left(-\frac{|X|}{a}\right).$$

On admet que la décroissance de cette fonction avec |X| est assez rapide pour que l'on puisse raisonner avec X variant sur $[-\infty,\infty]$. L'observation a lieu dans le plan focal image d'un objectif.

- a) Comment peut-on produire un faisceau de lumière monochromatique et parallèle à l'axe, à partir d'une lampe à incandescence blanche ?
- b) Soit F' le foyer de l'objectif et f' sa distance focale , quelle est l'expression des variations relatives de l'éclairement en fonction de l'abscisse x, sur l'axe (F'x)?
- c) Par comparaison avec le cas d'une fente de coefficient de transparence uniformément égal à 1, quelles sont les caractéristiques de la nouvelle figure de diffraction ?



V) Diffraction par les fentes d'Young :



Fentes de Young : figure de diffraction.

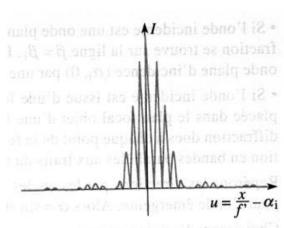
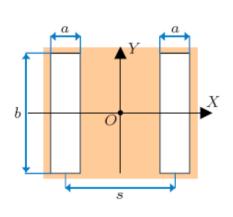
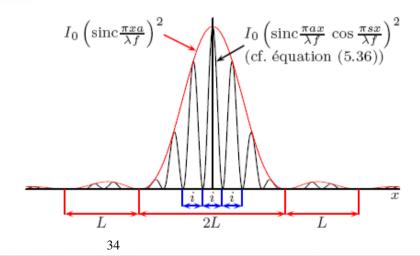


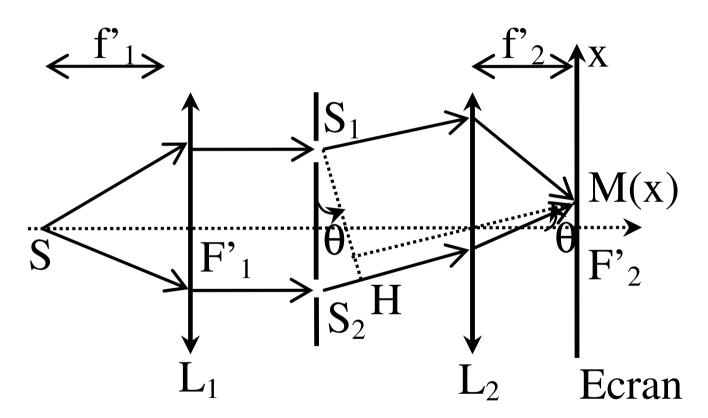
Figure de diffraction I(u).





On peut faire le calcul complètement dans le cas d'une incidence normale et pour deux fentes d'Young infiniment fines dans une direction :

Le schéma expérimental est le suivant :



L'amplitude diffractée par les deux fentes S₁ et S₂ est : (a désigne ici la largeur d'une fente)

$$\underline{a}_{1}(M) = KA_{0} \exp\left[-ik_{0}(SO_{1}M)\right] \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_{0}}(\theta X)\right] dX = KA_{0} \exp\left[-ik_{0}(SO_{1}M)\right] \sin c(\frac{\pi\theta a}{\lambda_{0}})$$

Et:

$$\underline{a}_{2}(M) = KA_{0} \exp\left[-ik_{0}(SO_{2}M)\right] \sin c(\frac{\pi\theta a}{\lambda_{0}})$$

L'amplitude résultante en M est ensuite :

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) = KA_0 \sin c(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}) \left(\exp[-ik_0(SO_1M)] + \exp[-ik_0(SO_2M)]\right)$$

Or:

$$(SO_2M) = (SO_1M) + (S_2H) = (SO_1M) + d\theta$$

d'où : (attention, ici d désigne la distance entre les milieux des fentes et a la largeur des fentes !)

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) = KA_0 \sin c(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0}) (1 + \exp[-ik_0 d\theta]) \exp[-ik_0(SO_1M)]$$

L'intensité résultante en M est alors :

$$I(M) = \frac{1}{2}k\operatorname{Re}(\underline{a}\underline{a}^*) = I_0 \sin c^2(\frac{\pi\theta a}{\lambda_0})(1 + \cos(k_0 d\theta))$$

Soit, avec $\theta = x / f_2$:

$$I(M) = I_0 \sin c^2 \left(\frac{\pi xa}{\lambda_0 f_2}\right) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{dx}{\lambda_0 f_2}\right)\right)$$

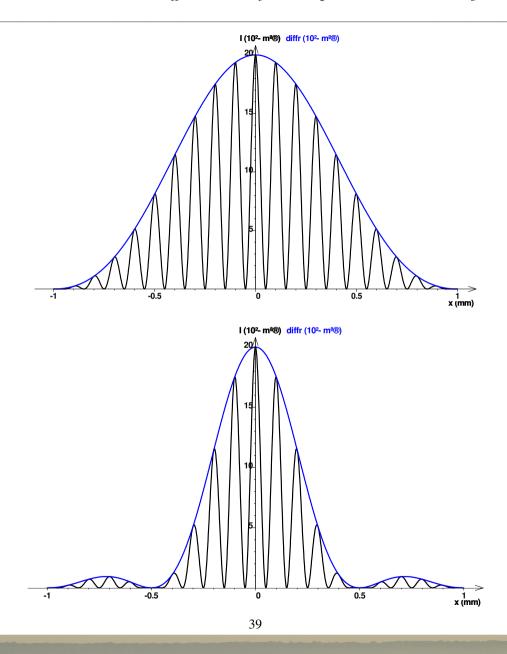
On retrouve bien l'expression du terme d'interférences, modulé par un terme dû à la diffraction par une fente.

Les courbes suivantes ont été tracées avec regressi.

On a choisi : $f_2 = 20$ cm, $\lambda_0 = 0.5 \, \mu \text{m}$, $d = 1 \, \text{mm}$.

Pour le 1^{er} graphe, a = 0,1 mm.

Pour le 2^{nd} , a = 0,2 mm (le pic de diffraction est alors moins étalé).

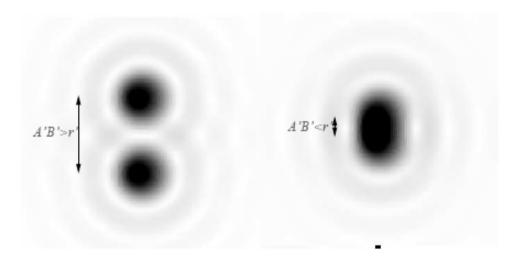


Remarque:

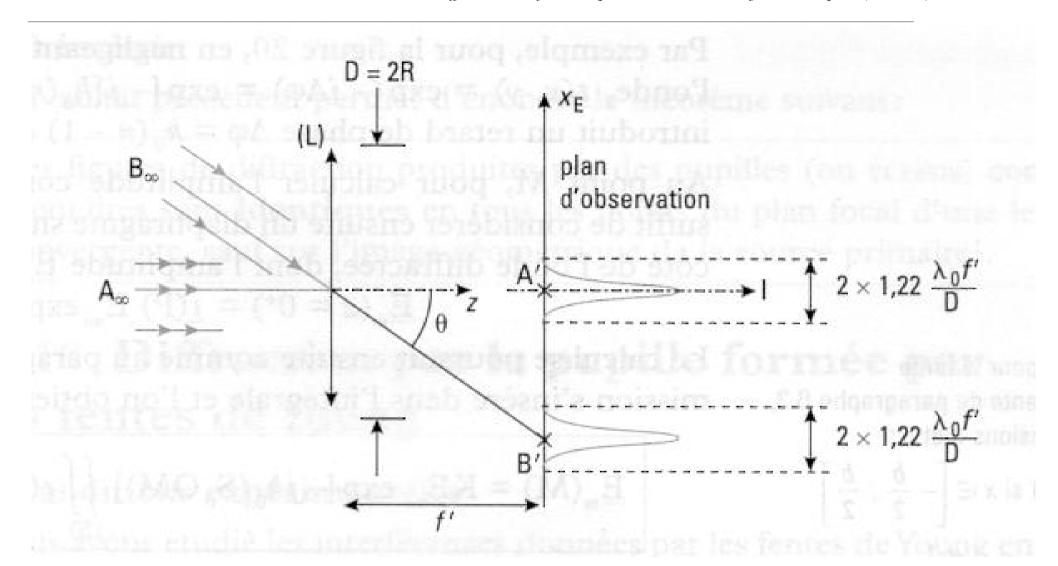
Pour retrouver l'image d'interférences décrite dans le chapitre sur les « Interférences », il faut que la diffraction soit suffisamment importante, de façon à ce que la fonction sinus cardinal ait ses premiers zéros rejetés très loin de O. Dans ce cas, on reste dans le pic central (qui est très étalé) et on ne voit pas la décroissance lente de l'enveloppe. On considère ainsi que l'épaisseur e des fentes tend vers zéro.

VI) Diffractions et limitations d'un système optique :

 <u>Pouvoir de résolution d'un instrument d'optique</u>: deux points objets (deux étoiles par exemple) donnent deux figures de diffraction, que l'on pourra « séparer » si les taches de diffraction centrales n'empiètent « pas trop » l'une sur l'autre ; toujours selon Rayleigh, la limite de résolution d'un instrument d'optique est telle que le bord de l'une des taches centrales passe par le centre de l'autre.



Critère de séparation de Rayleigh : lorsque les deux tâches d'Airy sont séparées par une distance inférieure au rayon d'une tâche, on considère que les deux points images ne sont pas résolus.



Ce critère appliqué à cet instrument nous indique que l'on ne peut séparer deux étoiles que si :

$$\theta > \theta_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$
.

Remarquons que si D est grand, la tache de diffraction est réduite. C'est une raison supplémentaire pour fabriquer par exemple des miroirs de télescope de grands diamètres. Notons aussi l'influence de la longueur d'onde sur la largeur de la tache de diffraction.

Le pouvoir séparateur peut être amélioré en utilisant un diaphragme de phase ou d'amplitude.

Limites de résolution angulaire. $1'' = 4.8510^{-6}$ rad.

instrument	D	λ	$\Delta \theta$
lunette	$14 \mathrm{~cm}$	550 nm	1"
télescope (Mt Palomar)	5 m	550 nm	$(2,7 \ 10^{-2})''$
radiotélescope (Jodrell Bank)	75 m	21 cm	700"
oeil humain	2 mm	550 nm	70"

