Oscillateurs couplés

I – Oscillations mécaniques couplées libres :

1 – Etude d’un exemple :

2 – Modes propres :

3 – Cas de deux oscillateurs faiblement couplés, battements :

4 – Exemples de deux pendules simples couplés

II – Oscillations mécaniques couplées forcées :

1 – Mise en équations de l’exemple :

2 – Résonances :

III – Oscillateurs électriques couplés :

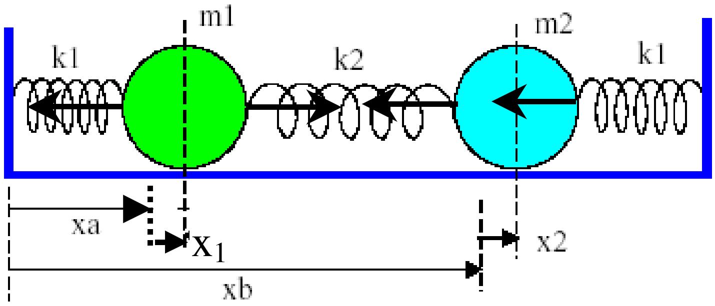
1 – Couplage capacitif :

2 – Couplage par inductance mutuelle :

I – Oscillations mécaniques couplées libres :

1 – Etude d'un exemple :

On considère deux points matériels de masse m_1 et m_2 reliés entre eux par un ressort de constante de raideur k_2 et à deux points fixes par des ressorts identiques de constantes k_1.



Ces masses se déplacent sans frottements sur l'axe horizontal (Ox) et on repère leurs positions x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives (notées x_a et x_b).

Dans le cas de la figure, on a $x_2 > x_1 > 0$.

Ainsi, la longueur du ressort de constante k_2 est, l'instant t quelconque :

$$\ell_2 = \ell_0 - x_1 + x_2$$

et celles des deux autres ressorts identiques :

$$\ell_{1,g} = \ell_0 + x_1 \qquad et \qquad \ell_{1,d} = \ell_0 - x_2$$

Le théorème du CI appliqué aux deux masses donne, en projection sur l'axe (Ox) (dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen) :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(-x_1 + x_2) \qquad et \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2(-x_1 + x_2)$$

On obtient alors un système d'équations différentielles couplées.

Dans un 1^er^ temps, on suppose que les deux masses sont identiques : $m_1 = m_2 = m$. Alors :

$$m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(-x_1 + x_2) \qquad et \qquad m\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2(-x_1 + x_2)$$

On pose $\sigma = x_1 + x_2 \;\; et \;\; \delta = x_1 - x_2$, solutions des équations différentielles :

$$m\ddot{\sigma} = -k_1\sigma \qquad et \qquad m\ddot{\delta} = -(k_1 + 2k_2)\delta$$

On définit deux pulsations caractéristiques :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad et \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

Alors :

$$\ddot{\sigma} = -\omega_1^2\sigma \qquad et \qquad \ddot{\delta} = -\omega_2^2\delta$$

Les solutions générales de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$\sigma = A_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) \qquad et \qquad \delta = A_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

En revenant aux variables initiales :

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sigma+\delta) = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t-\varphi_1)+\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(\sigma-\delta) = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t-\varphi_1)-\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2)$$

Les quatre constantes d'intégration s'obtiennent à partir des CI.

2 – Modes propres :

On suppose que les CI sont telles que $A_2 = 0$, alors :

$$x_1 = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t-\varphi_1) \qquad et \qquad x_2 = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t-\varphi_1) = x_1$$

Les deux masses effectuent des oscillations harmoniques de même pulsation ω_1 : ce régime correspond à un 1er mode propre du système couplé.

Interprétation du 1er mode propre : on constate que $x_1 = x_2$. Par conséquent, le ressort du milieu n'est ni tendu ni comprimé (puisque $\ell_2 = \ell_0 - x_1 + x_2 = \ell_0$). Tout se passe comme si on avait deux oscillateurs harmoniques indépendants identiques ramenés vers leur position d'équilibre par un unique ressort de constante de raideur k_1.

On suppose désormais que les CI sont telles que $A_1 = 0$, alors :

$$x_1 = \frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2) \qquad et \qquad x_2 = -\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2) = -x_1$$

Les deux masses effectuent des oscillations harmoniques de même pulsation ω_2 en étant en opposition de phase : ce régime correspond à un 2ème mode propre du système couplé.

Interprétation du 2nd mode propre : le milieu C du ressort central reste immobile lors du mouvement des deux masses. Tout se passe comme si on avait deux oscillateurs harmoniques indépendants identiques ramenés vers leur position d'équilibre par un ressort de raideur k_1 associé en parallèle à la moitié d'un ressort de raideur k_2, c'est-à-dire d'un ressort de raideur $2k_2$. L'ensemble de ces ressorts est équivalent à un seul de raideur $k_1 + 2k_2$, d'où la pulsation $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_1+2k_2}{m}}$.

Plus généralement, on appelle « mode propre » d'un système d'oscillateurs couplés une solution des équations du mouvement de telle sorte que tous les oscillateurs vibrent avec la même pulsation, les différents oscillateurs étant indifféremment en phase ou en opposition de phase. Les pulsations des modes propres sont appelées « pulsations propres ».

Un système de N oscillateurs couplés possède N modes propres, donc N pulsations propres et la solution générale est la superposition des modes propres.

Méthode générale de recherche des modes propres :

Les équations différentielles des deux oscillateurs couplés sont :

$$m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(-x_1+x_2) \qquad et \qquad m\ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2(-x_1+x_2)$$

Afin de déterminer les modes propres, on cherche des solutions harmoniques de la forme :

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \qquad et \qquad x_2 = A_2 \cos \omega t$$

Alors, avec $\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$ et $\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$:

$$-\omega^2 x_1 = -\frac{k_1}{m} x_1 + \frac{k_2}{m}(-x_1 + x_2) \qquad et \qquad -\omega^2 x_2 = -\frac{k_1}{m} x_2 - \frac{k_2}{m}(-x_1 + x_2)$$

Soit :

$$\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} - \omega^2\right) x_1 - \frac{k_2}{m} x_2 = 0$$
$$\frac{k_2}{m} x_1 + \left(\omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m}\right) x_2 = 0$$

Ce système linéaire homogène ne possède de solutions non triviales que si son déterminant est nul. Soit :

$$-\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{k_2}{m}\right)^2 = 0$$

D'où :

$$\left(\frac{k_1}{m} + 2\frac{k_2}{m} - \omega^2\right)\left(-\frac{k_1}{m} + \omega^2\right) = 0$$

Finalement :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \omega_1 \qquad et \qquad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} = \omega_2$$

On retrouve ainsi les deux pulsations propres. En reportant dans le système, on constate que $x_1 = x_2$ pour $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \omega_1$ et $x_2 = - x_1$ pour $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} = \omega_2$.

3 – Cas de deux oscillateurs faiblement couplés, battements :

On suppose que $k_2 << k_1$. Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} = \omega_1 \left(1 + 2\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/2} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

Les deux pulsations propres sont proches l'une de l'autre :

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{k_2}{k_1}\omega_1 << \omega_1$$

On choisit pour fixer les idées les CI suivantes :

$$A \;\; t = 0 \;:\; x_1(0) = a \,;\, x_2(0) = 0 \,;\, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Alors :

$$A_1 \cos \varphi_1 = a \quad ; \quad A_2 \cos \varphi_2 = a \quad ; \quad A_1 \omega_1 \sin \varphi_1 = 0 \quad ; \quad A_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = 0$$

Soit :

$$A_1 = a \quad ; \quad \varphi_1 = 0 \quad ; \quad A_2 = a \quad ; \quad \varphi_2 = 0$$

Et finalement :

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) \qquad et \qquad x_2 = \frac{a}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right)$$

Avec :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad et \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

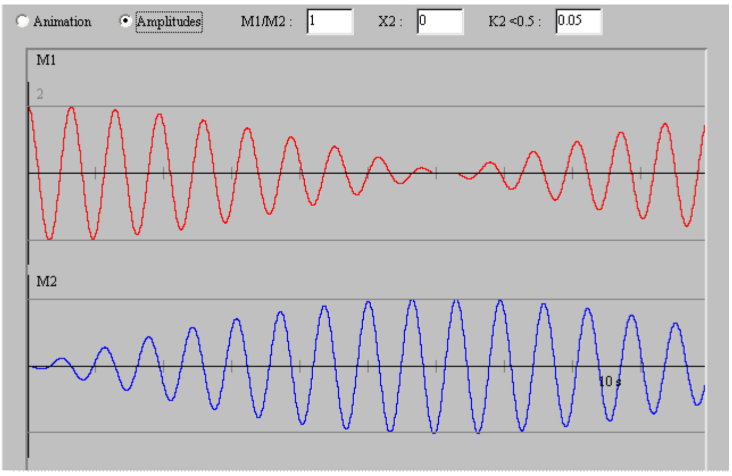
Il vient :

$$x_1 = a\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})\,t\,\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})\,t \qquad et \qquad x_2 = a\sin(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})\,t\,\sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})\,t$$

Soit, avec $\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{k_2}{k_1}\omega_1 \quad et \quad \omega_2 \approx \omega_1$:

$$x_1 = a\cos(\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\omega_1)\,t\cos\omega_1\,t \qquad et \qquad x_2 = a\sin(\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\omega_1)\,t\sin\omega_1\,t$$

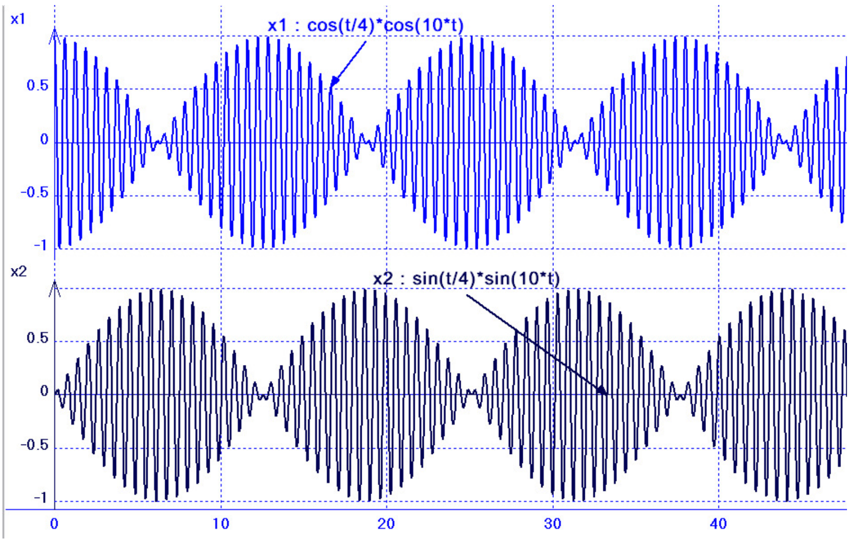
La figure suivante donne une illustration obtenue avec la simulation de JJ.Rousseau :



Avec Regressi, en choisissant :

$$\omega_1 = 10\,rad.s^{-1} \quad ; \quad \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{20} \quad ; \quad a = 1$$

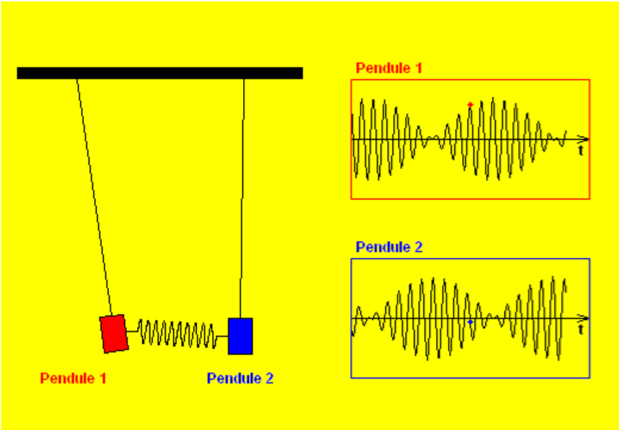
On obtient un phénomène de battements :



Les deux masses oscillent à la pulsation ω_1 ; leurs amplitudes varient à la pulsation $\frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\omega_1$ beaucoup plus faible (donc une période bien plus grande). De plus, lorsque l'amplitude de la 1ère masse est maximale, celle de la 2nde est nulle et réciproquement.

4 – Exemples de deux pendules simples couplés

L'illustration suivante donne un exemple d'oscillateurs couplés en rotation :



La mise en équation de ce système s'obtient en écrivant le théorème du moment cinétique à chacun des pendules, en supposant que les élongations angulaires de chaque pendule restent faibles afin de confondre l'angle et son sinus :

$$m_1\ell^2\ddot{\theta}_1 = -m_1 g\ell\theta_1 - k\ell(\theta_1 - \theta_2)$$
$$m_2\ell^2\ddot{\theta}_2 = -m_2 g\ell\theta_2 + k\ell(\theta_1 - \theta_2)$$

Soit, en introduisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$:

$$\ddot{\theta}_1 = -\omega_0^2\theta_1 - \frac{k}{m_1\ell}(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\omega_0^2\theta_2 + \frac{k}{m_2\ell}(\theta_1 - \theta_2)$$

On obtient un système différentiel semblable à celui obtenu précédemment :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(-x_1 + x_2) \qquad et \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2(-x_1 + x_2)$$

et la résolution est ainsi en tout point identique.

II – Oscillations mécaniques couplées forcées :

1 – Mise en équations de l'exemple :

On revient aux oscillateurs couplés de translation et on suppose qu'une force $F_m \cos\omega t$ est appliquée sur la masse 1. Les nouvelles équations du mouvement sont :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(-x_1 + x_2) + F_m \cos\omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2(-x_1 + x_2)$$

La solution de ce système est, une fois le régime transitoire disparu, une solution harmonique forcée de pulsation ω. En se plaçant en notation complexe :

$$\underline{x}_1 = X_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} \qquad et \qquad \underline{x}_2 = X_{2m} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$$

Il vient :

$$m_1(-\omega^2 \underline{x}_1) = -k_1 \underline{x}_1 + k_2(-\underline{x}_1 + \underline{x}_2) + F_m e^{j\omega t}$$
$$m_2(-\omega^2 \underline{x}_2) = -k_1 \underline{x}_2 - k_2(-\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$$

Après calculs :

$$\underline{x}_1 = \frac{(k_1 + k_2 - m\omega^2)F_m}{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2} e^{j\omega t} \qquad ; \qquad \underline{x}_2 = \frac{k_2 F_m}{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2} e^{j\omega t}$$

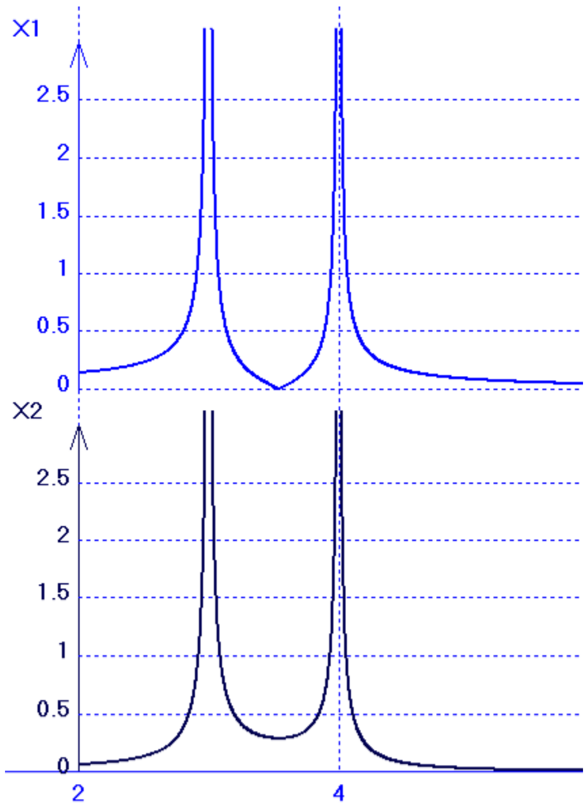
On en déduit les amplitudes réelles des deux masses :

$$x_1 = \frac{(k_1 + k_2 - m\omega^2)F_m}{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2} \cos \omega t \qquad ; \qquad x_2 = \frac{k_2 F_m}{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2} \cos \omega t$$

2 – Résonances :

On trace les amplitudes maximales de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ en fonction de la pulsation de l'excitateur, :

$$X_{1m} = \left| \frac{(k_1 + k_2 - m\omega^2)F_m}{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2} \right| \qquad ; \qquad X_{2m} = \left| \frac{k_2 F_m}{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2} \right|$$



(m = 1 ; F_m = 1 ; k_1 = 9 ; k_2 = 3.5 SI)

On remarque qu'il y a résonances pour :

$$(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2 = 0 \qquad soit \qquad \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad ou \qquad \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

Ainsi, en l'absence de frottements, un système d'oscillateurs couplés entre en résonance lorsque la pulsation de l'excitateur est égale à l'une des pulsations propres du système couplé. Ce résultat généralise celui obtenue pour un simple oscillateur en 1ère année.

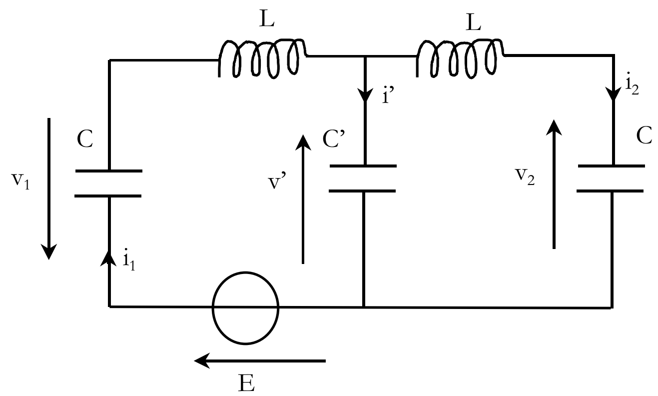
On note qu'entre deux résonances existe une pulsation $\omega_{ar} = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$ pour laquelle x_1 est nulle et x_2 minimale : on dit qu'il y a anti-résonance.

Bien évidemment, les frottements (faibles) adoucissent les résonances et les anti-résonances d'un système d'oscillateurs couplés.

III – Oscillateurs électriques couplés :

1 – Couplage capacitif :

On considère le circuit suivant où deux circuits (LC) sont couplés par le condensateur de capacité C' :



Initialement, on suppose les condensateurs non chargés.

On cherche les équations différentielles vérifiées par les tensions v_1 et v_2. Les intensités dans les branches peuvent s'écrire :

$$i_1 = C\frac{dv_1}{dt} \quad ; \quad i_2 = C\frac{dv_2}{dt} \quad ; \quad i' = C'\frac{dv'}{dt}$$

La loi des nœuds donne :

$$i_1 = i' + i_2 \qquad soit \qquad C'\frac{dv'}{dt} = C\frac{dv_1}{dt} - C\frac{dv_2}{dt}$$

On intègre en tenant compte des CI :

$$v' = \frac{C}{C'}(v_1 - v_2)$$

La loi des mailles permet d'autre part d'écrire :

$$E = v_1 + L\frac{di_1}{dt} + v' \qquad et \qquad v' = L\frac{di_2}{dt} + v_2$$

Soit :

$$E = v_1 + LC\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{C}{C'}(v_1 - v_2) \qquad et \qquad \frac{C}{C'}(v_1 - v_2) = LC\frac{d^2v_2}{dt^2} + v_2$$

Ou encore :

$$L\frac{d^2v_1}{dt^2} = -\frac{1}{C}v_1 + \frac{1}{C'}(-v_1+v_2) + E \qquad et \qquad L\frac{d^2v_2}{dt^2} = -\frac{1}{C}v_2 - \frac{1}{C'}(-v_1+v_2)$$

Ce système est formellement identique à celui obtenu en mécanique :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(-x_1+x_2) + F_m\cos\omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2(-x_1+x_2)$$

Les tensions sont les analogues des déplacements, l'inductance est l'analogue de la masse, l'inverse de la capacité 1 / C est l'analogue de la raideur k_1 et 1 / C' est l'analogue de la raideur du ressort de couplage.

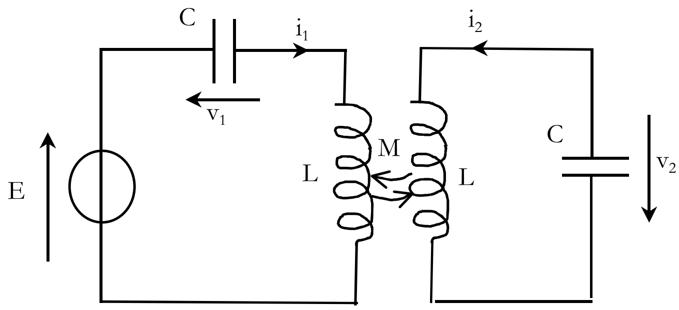
Les pulsations des deux modes propres du circuit s'obtiennent par analogie :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad et \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{C'+2C}{LCC'}}$$

En régime sinusoïdal forcé, le circuit entre en résonance lorsque la pulsation du générateur BF prend les valeurs ω_1 ou ω_2.

2 – Couplage par inductance mutuelle :

On considère désormais le circuit suivant :



Les tensions et les intensités sont reliées :

$$i_1 = C\frac{dv_1}{dt} \qquad et \qquad i_2 = C\frac{dv_2}{dt}$$

La loi des mailles donne :

$$E = v_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad et \qquad v_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0$$

D'où :

$$E = v_1 + LC\frac{d^2v_1}{dt^2} + MC\frac{d^2v_2}{dt^2} \qquad et \qquad v_2 + LC\frac{d^2v_2}{dt^2} + MC\frac{d^2v_1}{dt^2} = 0$$

Recherche des modes propres :

On suppose que E = 0 (régime libre). On cherche des solutions harmoniques de même pulsation ω. Alors :

$$0 = v_1 - LC\omega^2v_1 - MC\omega^2v_2 \qquad et \qquad v_2 - LC\omega^2v_2 - MC\omega^2v_1 = 0$$

D'où le système homogène :

$$(1-LC\omega^2)v_1 - MC\omega^2 v_2 = 0 \qquad et \qquad -MC\omega^2 v_1 + (1-LC\omega^2)v_2 = 0$$

Ce système possède une solution non triviale si son déterminant est nul :

$$(1-LC\omega^2)^2 - (MC\omega^2)^2 = 0$$

Soit :

$$(1-LC\omega^2 - MC\omega^2)(1-LC\omega^2 + MC\omega^2) = 0$$

On en déduit les deux pulsations propres (avec M < L) :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \qquad et \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$$

Pour le 1re mode propre, $v_1 = v_2$: les deux tensions oscillent en phase.

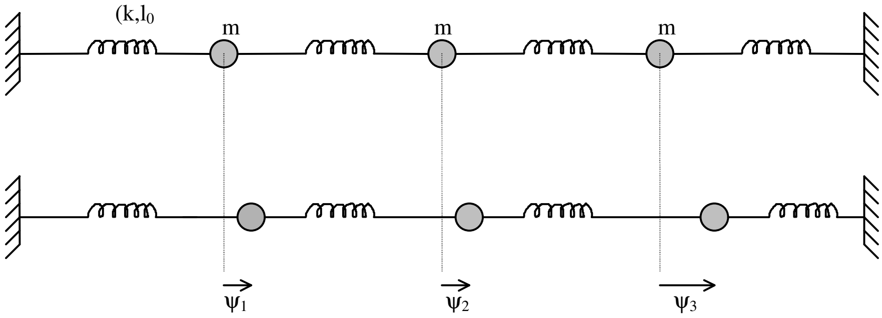
Pour le 2nd mode propre, $v_1 = - v_2$: les deux tensions oscillent en opposition de phase.

Le régime libre correspond à une superposition linéaire de ces deux modes propres.

L'étude du régime forcé harmonique conduit aux mêmes courbes qu'en mécanique (paragraphe II-2).

Exercices
Oscillateurs couplés

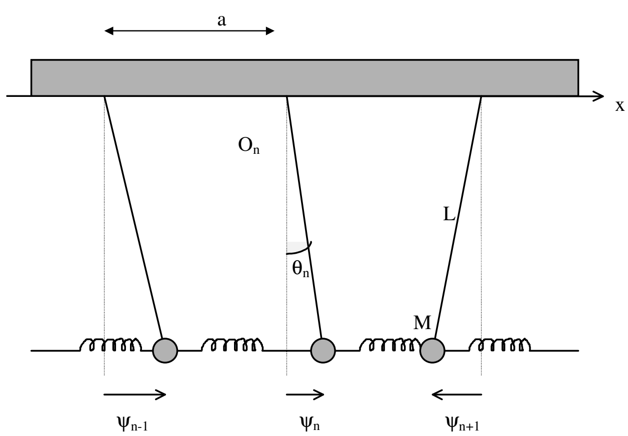
1) Modes propres d'un système de trois mobiles couplés : écrire le système d'équations du mouvement d'un système de trois mobiles couplés identiques, tel que dessiné sur la figure : (les ressorts sont identiques)



Rechercher les pulsations propres de ce système.

Interpréter les trois modes propres obtenus en termes de mouvements des trois mobiles couplés.

2) Equation de propagation de Klein-Gordon : on étudie la propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse M et de longueur L, couplés par des ressorts de constante K, représentés sur la figure ci-dessous :



On notera $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ et $\Omega_0 = \sqrt{g/L}$.

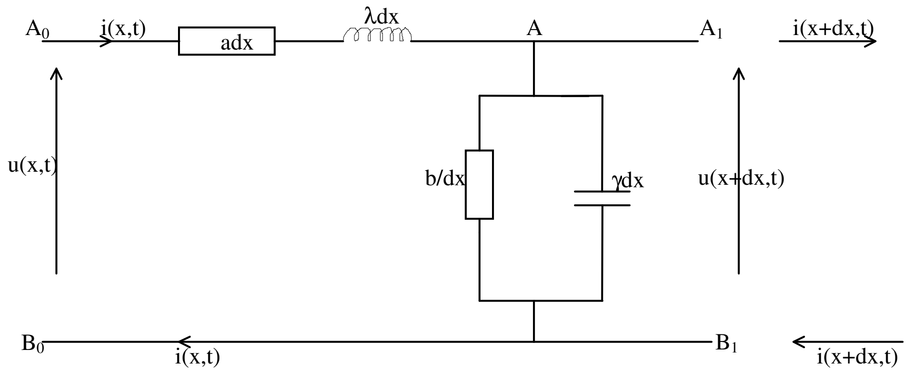
a) Quelle est l'équation de propagation liant les petits déplacements $\psi_n \approx L\theta_n$, ψ_{n-1} et ψ_{n+1} des extrémités des pendules ?

b) Quelle est la relation de dispersion des ondes progressives monochromatiques caractérisant cette propagation ?

c) Représenter la relation de dispersion en précisant la bande permise pour les pulsations d'oscillations libres de la chaîne de pendules couplés.

d) Préciser la forme prise par ces résultats dans l'approximation des milieux continus.

3) Equation des télégraphistes : on se propose de représenter un câble coaxial réel par le schéma :



a) Relier $\partial u/\partial x$, i et $\partial i/\partial t$; relier de même $\partial i/\partial x$, u et $\partial u/\partial t$.

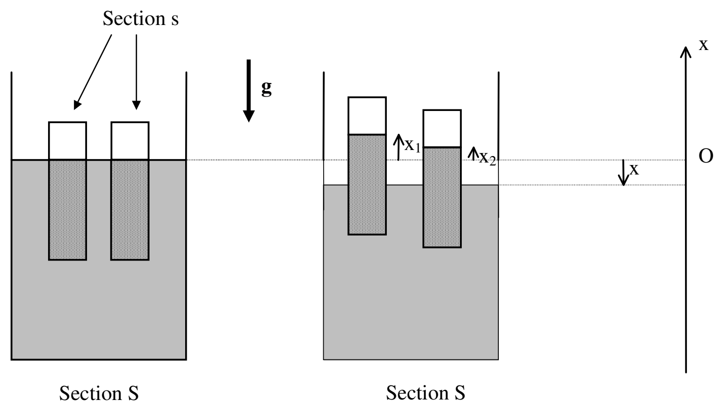
b) Etablir finalement deux équations aux dérivées partielles vérifiées l'une par i(x,t) et l'autre par u(x,t) (équation des télégraphistes).

c) On cherche de solutions de la forme $i(x,t)=I_m e^{-\alpha x} e^{j(kx-\omega t)}$.

* En déduire deux relations liant α, k et ω à (a,b,λ,γ).

* Exprimer α en fonction de ω/k, $a\gamma$ et λ/b. Obtenir ainsi une équation bicarrée donnant k en fonction de ω.

4) Oscillations de deux flotteurs : deux flotteurs identiques, cylindriques (de section s et de masse m) peuvent osciller dans l'eau d'un récipient de section S. Soit ρ la masse volumique de l'eau. Les positions des flotteurs sont repérés par leurs déplacements verticaux x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.



a) Déterminer le système d'équations différentielles qui définit le mouvement des deux flotteurs.

b) Résoudre ce système en supposant qu'à l'instant initial les deux flotteurs sont dans leurs positions d'équilibre respectives, avec des vitesses initiales $2v_0$ pour le premier et v_0 pour le second.

5) Pendules simples couplés : on considère trois pendules simples identiques de masse m et de longueur ℓ. les masses sont reliées entre elles par l'intermédiaire de 2 ressorts identiques, de raideur k. A l'équilibre les pendules sont verticaux, les trois masses sont équidistantes sur une même horizontale, et les ressorts ont leur longueur à vide ℓ_0.

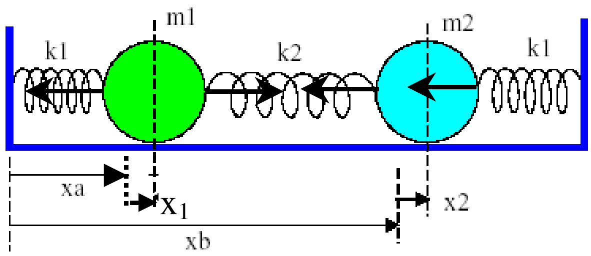
Le système en mouvement est défini par les élongations angulaires α_1, α_2, α_3 des pendules avec la verticale descendante. On posera $\omega_0{}^2 = k / m$ et $\Omega_0{}^2 = g / \ell$.

a) Ecrire les équations différentielles des petites oscillations du système.

b) Déterminer les pulsations propres du système.

AN : m=1 kg ; k=10 N.m^{-1} ; l=1 m ; g=10 m.s^{-2}

6) Couplage entre deux oscillateurs amortis : on considère deux points matériels de masse m_1 et m_2 reliés entre eux par un ressort de constante de raideur k_2 et à deux points fixes par des ressorts identiques de constantes k_1.



Ces masses se déplacent avec frottements sur l'axe horizontal (Ox) et on repère leurs positions x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives (notées x_a et x_b). Les forces de frottements sont modélisées par des forces de type fluide $-h\dot{x}_1$ et $-h\dot{x}_2$.

a) Ecrire les équations différentielles du mouvement et en déduire les équations vérifiées par $\sigma = x_1 + x_2 \;\; et \;\; \delta = x_1 - x_2$.

b) Dans le cas d'un couplage faible ($k_2 << k_1$), à quelle condition sur h peut-on observer des battements amortis ? Si on suppose en outre les frottements faibles, combien de périodes de battements peut-on typiquement observer ?