

Réflexion des ondes électromagnétiques sur un métal

Ondes guidées

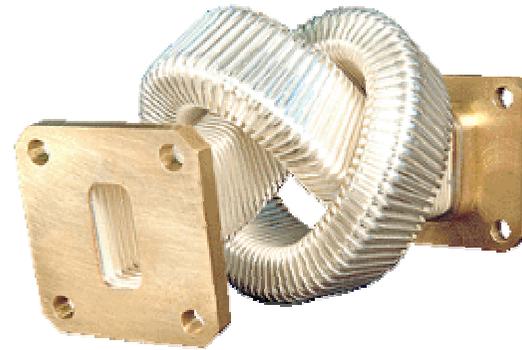


Réflexion des ondes électromagnétiques sur un métal

Ondes guidées



Les guides d'ondes sont des sortes de « tuyaux » permettant de mener une onde EM d'un point à un autre. Le guidage change très fortement les propriétés de l'onde par rapport à la propagation libre dans le vide.



Quelques exemples de guide d'ondes

Le but de chapitre est de présenter les propriétés des ondes EM en présence de conducteurs et de présenter une théorie des guides d'ondes.

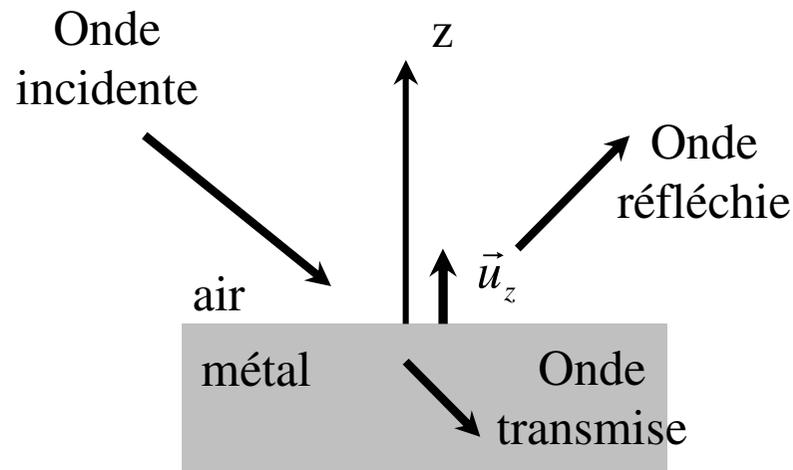


I – Réflexion d'une OPPH sur un conducteur métallique :

1 – Description du problème et limitations du sujet :

On s'intéresse à l'arrivée d'une onde EM sur une surface métallique.

On assimile localement l'interface air/métal à son plan tangent et on note \vec{u}_z le vecteur unitaire normal, dirigé du métal vers l'air.



L'air est assimilé au vide. Dans le conducteur, les charges de conduction sont mises en mouvement par le champ de l'onde EM et vont intervenir dans le processus de propagation.

Dans la suite, on se limite à des fréquences telles que la période de l'onde est très grande devant le temps de relaxation du métal (ou $\nu \ll 10^{13} \text{ Hz}$).

La loi d'Ohm est alors vérifiée avec, pour le cuivre par exemple, $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

On note ω la pulsation de l'onde incidente.

On constate expérimentalement que l'onde réfléchie et l'onde transmise ont même pulsation.

Le métal sera supposé parfait : sa conductivité $\gamma \rightarrow \infty$.

Les équations de Maxwell ont permis de montrer que :

$$\vec{E}_{air} - \vec{E}_{conducteur} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air} \quad et \quad \vec{B}_{air} - \vec{B}_{conducteur} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

- La composante tangentielle du champ électrique était continue à la traversée de la surface métallique.
- La composante normale du champ magnétique était continue à la traversée du métal.

2 – Modèle du conducteur parfait :

La puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur est :

$$p_{\text{Joule}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2$$

Pour un conducteur parfait, $\gamma \rightarrow \infty$ et ainsi $\vec{E}^2 \rightarrow 0$ pour que cette puissance volumique reste finie : le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.

D'après la relation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Seul un champ statique peut exister dans le conducteur parfait. On supposera dans la suite qu'il n'y a aucun champ statique : $\vec{B} = \vec{0}$.

Finalement, il n'y a pas de champ EM au sein du métal parfait (cas identique au cas statique).

L'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \rho = 0$$

Il n'y a pas de charges volumiques au sein du métal parfait.

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \vec{0} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{soit} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

Il n'y a pas de courants volumiques au sein du conducteur.

Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.

Conclusion :

En régime variable, un conducteur parfait est caractérisé par des champs \vec{E} et \vec{B} nuls et des densités volumiques de charge ρ et de courant \vec{j} nulles.

Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.

Remarque : on néglige finalement l'effet de peau (voir exercice).

Complément sur l'effet de peau :

Dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes : (on néglige également le courant de déplacement devant le courant de conduction)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

L'équation de propagation du champ électrique est :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad \Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

C'est une équation de type « diffusion », obtenue dans les transferts thermiques conductifs.

On cherche des solutions complexes de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 f(z) e^{j\omega t}$. D'où :

$$f''(z) - j\mu_0\sigma\omega f(z) = 0$$

On pose $k = \pm(1+j)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$; alors, en éliminant la solution qui diverge dans le métal

(avec $z < 0$!) et en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$, on obtient :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{z/\delta} e^{j(\omega t + z/\delta)}$$

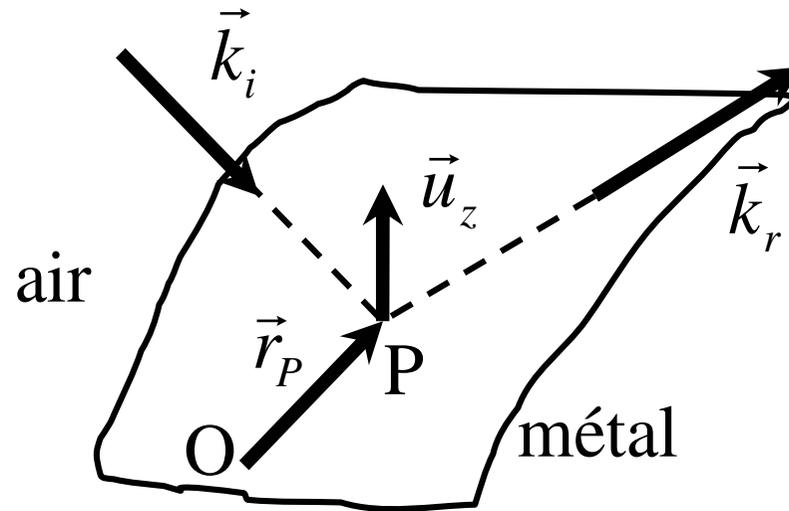
Le champ se propage dans le métal mais en étant atténué d'un facteur $e^{z/\delta}$ (attention ici, $z < 0$) ; δ est appelée épaisseur de peau et correspond à l'ordre de grandeur de la longueur de pénétration de l'onde dans le métal.

Cette épaisseur sera d'autant plus faible que la conductivité de matériau et la fréquence de l'onde sont élevées. L'onde est ici absorbée du fait de l'effet Joule au sein du conducteur, sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ . Si l'on considère une onde EM de fréquence de l'ordre du GHz, δ est de l'ordre du μm .

3 – Ondes incidente et réfléchie :

Le champ électromagnétique de l'onde incidente, se propageant dans la direction du vecteur \vec{u}_i dans le milieu (1) s'écrit :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{0i}}{\omega} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$



Pour l'onde réfléchie dont la pulsation est la même que celle de l'onde incidente (se propageant dans la direction du vecteur \vec{u}_r dans le milieu 1) :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_{0r}}{\omega} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

On a par ailleurs (dans le vide) : $k_i = k_r = \frac{\omega}{c}$.

Les conditions de passage des champs électromagnétiques permettent d'affirmer que :

$$\vec{E}_{air} - \vec{E}_{conducteur} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{air} - \vec{B}_{conducteur} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

Comme $\vec{E}_{conducteur} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{conducteur} = \vec{0}$, il vient :

$$\vec{E}_{air} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{air} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$



Le champ électrique total est normal au conducteur alors que le champ magnétique est tangent au conducteur.

Par conséquent :

$$\underline{\vec{E}}_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_P)} + \underline{\vec{E}}_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_P)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

où $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ désigne le rayon vecteur d'un point P quelconque de l'interface air-métal (avec l'origine O choisie sur l'interface).

On note

$$\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{0i, //} + \vec{E}_{0i, \perp} = \vec{E}_{0i, //} + \vec{E}_{0i, z}$$

(une coordonnée dans le plan tangent au conducteur et une autre coordonnée perpendiculaire, selon (Oz)).

De même pour le champ réfléchi :

$$\vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0r, //} + \vec{E}_{0r, \perp} = \vec{E}_{0r, //} + \vec{E}_{0r, z}$$

Si l'on projette sur le plan tangent de l'interface :

$$\underline{\vec{E}}_{0i, //} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_P)} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_P)} = \vec{0}$$

Soit encore :

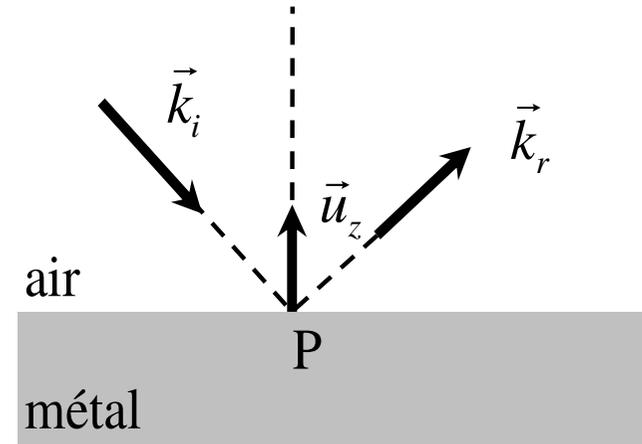
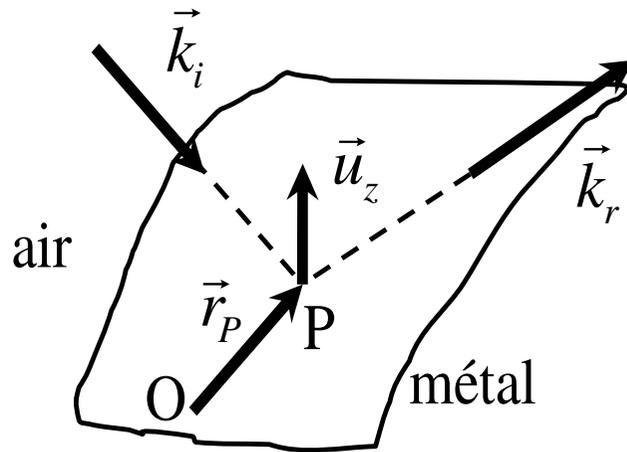
$$e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_P} \left(\underline{\vec{E}}_{0i, //} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P} \right) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\underline{\vec{E}}_{0i, //} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P} = \vec{0}$$

Cette équation devant être valable pour tout point P, il vient :

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P = 0$$



Soit $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ colinéaire à $\vec{n}_{cond \rightarrow air}$: le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est donc dans le plan d'incidence (défini par \vec{k}_i et $\vec{n}_{cond \rightarrow air}$).



Enfin, comme $k_i = k_r = \frac{\omega}{c}$ et que $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ est colinéaire à $\vec{n}_{cond \rightarrow air}$, les angles d'incidence et de réflexion sont identiques (loi de Descartes pour la réflexion).

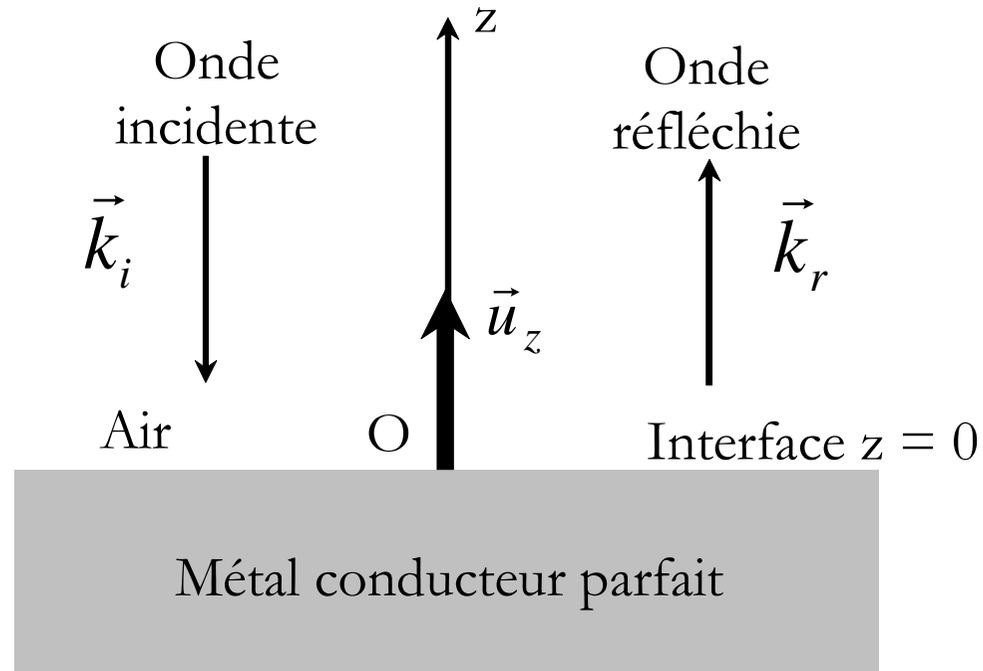
On en déduit de plus que :

$$\underline{\vec{E}}_{0i, //} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} = \vec{0}$$

4 – Réflexion sous incidence normale sur un plan conducteur parfait :

Dans le cas particulier de l'incidence normale :

$$\vec{k}_i = -\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_z$$



La condition aux limites $\vec{E}_{air} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air}$ pour le champ électrique donne :

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{z=0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

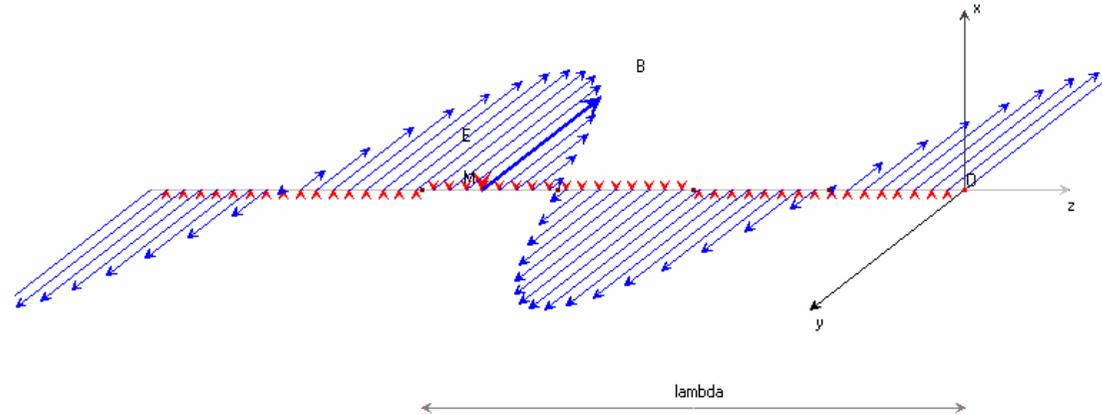
Or, le champ électrique de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont transverses ; par conséquent : $\sigma = 0$: le conducteur reste localement neutre en surface.

On en déduit ensuite que $\vec{E}_r = -\vec{E}_i$: le coefficient de réflexion r relatif à l'amplitude du champ électrique vaut -1 . On détermine le champ magnétique par :

$$(\vec{B}_r)_{z=0} = \left(\frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} \right)_{z=0} = \left(\frac{(-\vec{k}_i) \wedge (-\vec{E}_i)}{\omega} \right)_{z=0} = (\vec{B}_i)_{z=0}$$

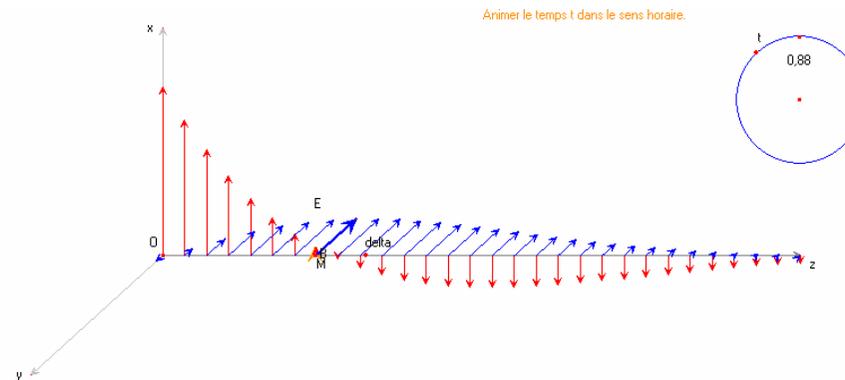
Le coefficient de réflexion relatif au champ magnétique vaut donc 1.

Quelques animations :



[Animation cabri géomètre \(Y.Cortial\)](#)

Prise en compte de l'effet de peau :



[Animation cabri géomètre \(Y.Cortial\)](#)



Complément (aspect énergétique de la réflexion) :

Le vecteur de Poynting associé à l'onde incidente est : (repasser en notation réelle)

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = -\frac{E_i^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z$$

et celui associé à l'onde réfléchie vaut :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{E_i^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z = -\vec{\Pi}_i$$

Toute l'énergie véhiculée par l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Le métal parfait ne dissipe pas d'énergie et la réfléchit totalement : c'est un miroir idéal.

5 – Courant surfacique :

La densité de courant surfacique se calcule avec :

$$\vec{B}_{air} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

Soit ici :

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r)_{z=0} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

Soit : (on rappelle que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$)

$$\vec{j}_s = \frac{\vec{u}_z \wedge (\vec{B}_i + \vec{B}_r)_{z=0}}{\mu_0} = \frac{\vec{u}_z \wedge (2\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i)_{z=0}}{\mu_0 \omega} = \frac{(2\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i)_{z=0} \wedge \vec{u}_z}{\mu_0 c} = \frac{2(\vec{E}_i)_{z=0}}{\mu_0 c}$$

Finalement :

$$\vec{j}_s = \frac{2}{\mu_0 c} \vec{E}_{0i} e^{i\omega t}$$

La réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit ainsi un courant surfacique de densité :

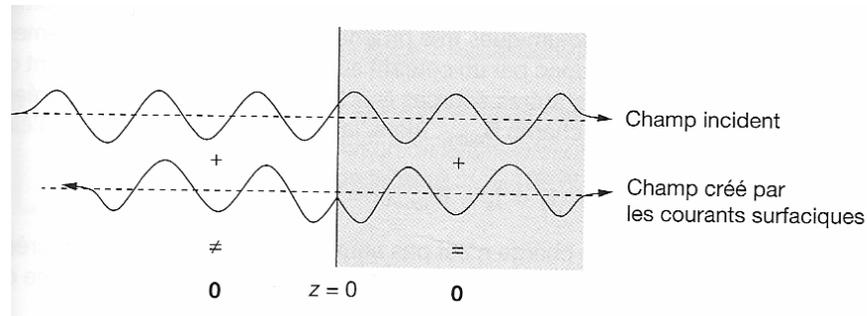
$$\vec{j}_s = \frac{2}{\mu_0 c} \vec{E}_{0i} e^{i\omega t}$$

non nul de même direction que le champ incident ainsi qu'une charge surfacique nulle.

Remarques :

- Existence des courants surfaciques :

L'onde incidente engendre un courant à la surface du conducteur. Comme les électrons sont mis en mouvement par le champ électrique, il est normal que les courants ainsi créés soient parallèles au champ électrique incident.



Ces courants, créés par le champ incident, sont à leur tour une source du champ EM : ce sont eux qui sont à l'origine du champ réfléchi. Cela explique pourquoi l'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente : des courants oscillants à la pulsation ω engendrent en régime permanent un champ EM de même pulsation ω .

Le champ engendré par les courants existe aussi bien dans la partie $z < 0$ (en dehors du métal) que dans la partie $z > 0$ (dans le métal). En effet, par symétrie, les courants engendrent exactement le même champ électrique dans la partie $z > 0$, sauf qu'il se propage dans le sens positif de l'axe (Oz). Mais ce champ est en opposition de phase avec le champ incident, et le champ résultant (appelé le champ transmis), qui est la somme des champs incident et créé par les courants, est donc nul dans le conducteur parfait.

- Pression de radiation :

Lorsqu'une onde EM se réfléchit sur un conducteur, ce dernier subit de la part de l'onde une force proportionnelle à la surface éclairée et à l'intensité de l'onde incidente : c'est la pression de radiation.

Cette pression de radiation est à l'origine de plusieurs phénomènes tels que l'orientation de la queue des comètes dans le sens opposé à celui du Soleil (car l'onde EM incidente provient du Soleil, voir exercice).



6 – Superposition des ondes incidente et réfléchie, ondes stationnaires :

On détermine la structure de l'onde résultante dans l'air :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0,i} e^{i(\omega t + kz)} + (-\underline{\vec{E}}_{0,i}) e^{i(\omega t - kz)} \quad (\text{avec : } k = \frac{\omega}{c})$$

Soit :

$$\underline{\vec{E}} = 2i \underline{\vec{E}}_{0,i} \sin(kz) e^{i\omega t}$$

De même, pour le champ magnétique :

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_i}{c} + \frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_r}{c} = -2 \frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_{0,i}}{c} \cos(kz) e^{i\omega t}$$

Supposons par exemple que l'onde incidente soit polarisée selon (Oy) :

$$\underline{\vec{E}}_{0,i} = \vec{E}_0 \vec{u}_y$$

Alors :



$$\underline{\vec{E}} = 2i E_0 \sin(kz) e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

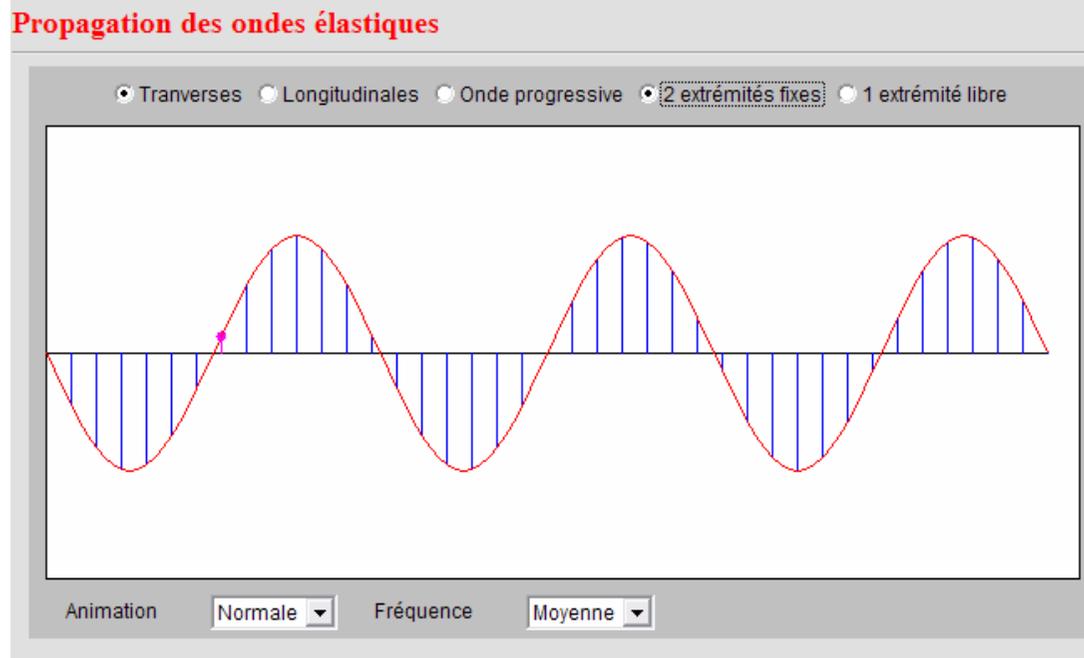
$$\underline{\vec{B}} = -2 \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \vec{u}_y}{c} \cos(kz) e^{i\omega t} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

D'où, en notations réelles :

$$\vec{E} = -2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une onde stationnaire.

Les champ \vec{E} et \vec{B} restent orthogonaux mais sont en quadrature spatiale et temporelle (déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$).



[Animation JJ.Rousseau](#)

Ce type de solutions, appelé onde plane stationnaire, est très différent d'une onde plane progressive : les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément ; la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase.

L'allure du champ électrique à différents instants est représentée sur la figure suivante.

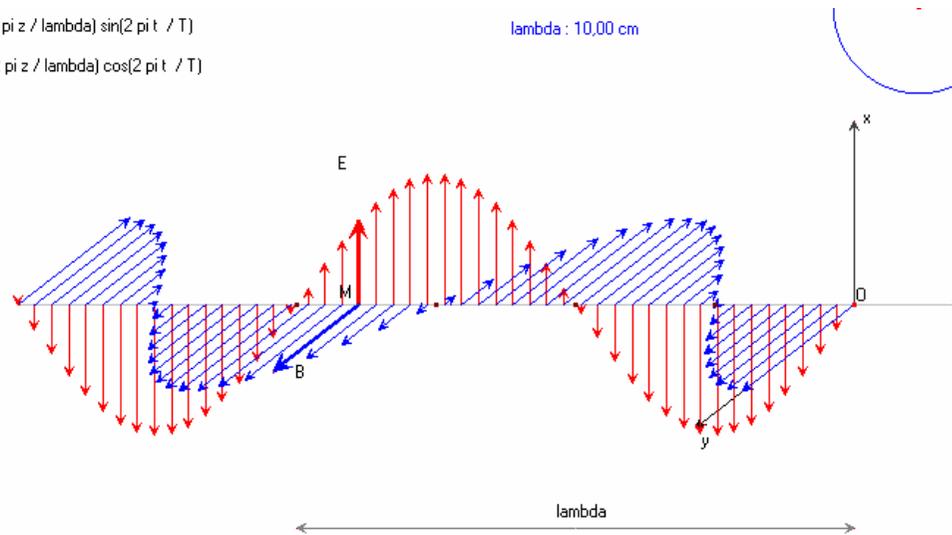
En certains points (appelés nœuds de vibrations), le champ est toujours nul.

En d'autres points (appelés ventres de vibrations), l'amplitude de vibration est maximale.

$$E_x = E_0 \sin(2\pi z / \lambda) \sin(2\pi t / T)$$

$$B_y = B_0 \cos(2\pi z / \lambda) \cos(2\pi t / T)$$

$\lambda : 10,00 \text{ cm}$



[Animation cabri géomètre \(Y.Cortial\)](#)

Position des nœuds (pour le champ électrique) : elle s'obtient en écrivant que :

$$\sin(kz) = 0 \quad \text{soit} \quad kz_n = n\pi \quad (\text{n entier naturel})$$

Soit, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$z_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n}{2}\lambda$$

La distance entre deux nœuds successifs est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

Position des ventres (pour le champ électrique) : elle s'obtient en écrivant que :

$$\sin(kz) = \pm 1 \quad \text{soit} \quad kz_v = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

Soit :

$$z_v = \frac{2n + 1}{4}\lambda = \frac{n}{2}\lambda + \frac{1}{4}\lambda$$

La distance entre deux ventres successifs est égale à : $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud et un ventre successif est égale à : $\frac{\lambda}{4}$.

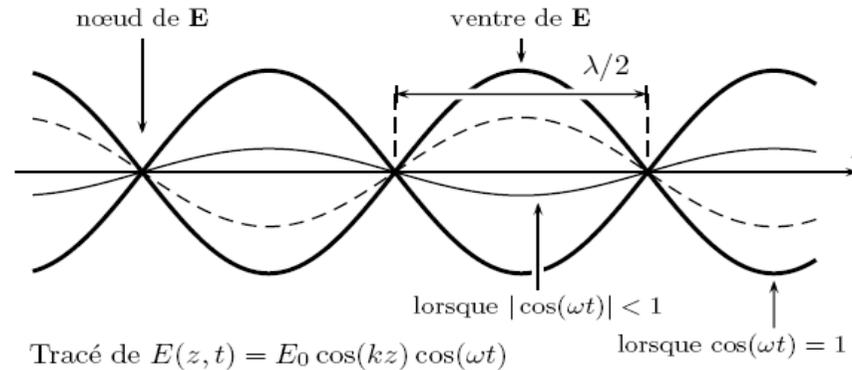
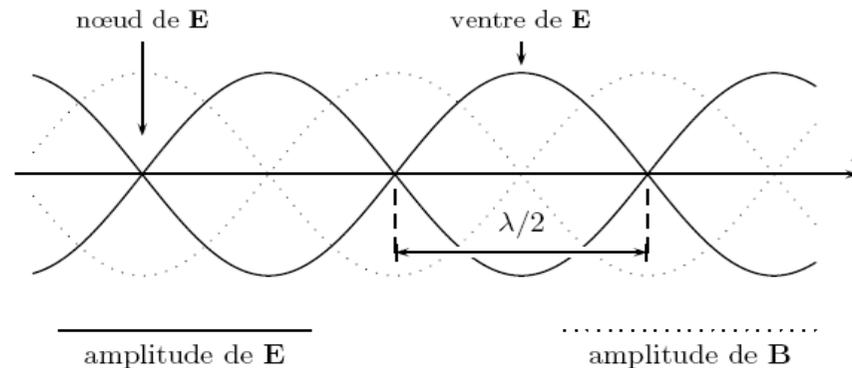


Figure 38.3 – Nœuds et ventres d'une onde stationnaire

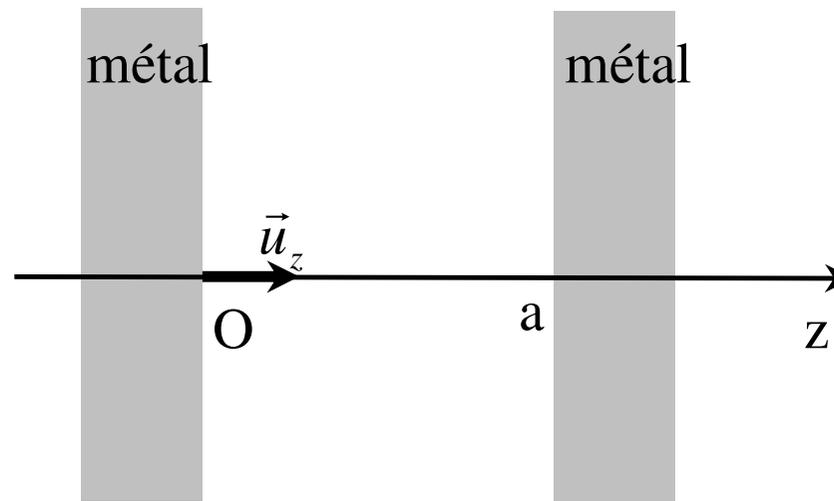


Les nœuds du champ électrique sont les ventres du champ magnétique et vice-versa.



7 – Ondes stationnaires entre deux plans métalliques :

On cherche les pulsations des ondes planes monochromatiques qui peuvent exister entre deux plans parallèles (supposés infinis) $z = 0$ et $z = a$ parfaitement conducteurs.



Le champ électrique $\vec{E}(z,t)$ de cette onde doit vérifier (les coordonnées x et y n'interviennent pas) :

- L'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$.

- L'équation de propagation : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.
- La condition de continuité à la surface d'un conducteur parfait :

$$\vec{E}(z=0) = \vec{E}(z=a) = \vec{0}$$

La 1^{ère} condition conduit à :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{soit} \quad E_z = 0$$

et le champ électrique peut s'écrire (le champ est transverse) :

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t) \vec{u}_x + E_y(z,t) \vec{u}_y$$

On note, en notation complexe (attention, l'onde n'est pas progressive) :

$$E_x(z,t) \vec{u}_x = \underline{E}_{0,x}(z) e^{i\omega t} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad E_y(z,t) \vec{u}_y = \underline{E}_{0,y}(z) e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

L'équation de propagation, projetée selon (Ox), donne alors : (et idem sur (Oy))

$$\frac{d^2 \underline{E}_{0,x}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_{0,x}(z) = 0$$

Dont la solution est de la forme :

$$\underline{E}_{0,x}(z) = \underline{A}_x \cos(kz) + \underline{B}_x \sin(kz) \quad (\text{avec } k = \frac{\omega}{c})$$

La 3^{ème} condition impose $\underline{A}_x = 0$ et $\underline{B}_x \sin(ka) = 0$. Il en est de même pour $\underline{E}_{0,y}(z)$.

La condition $\underline{B}_x \sin(ka) = 0$ conduit à :

$$ka = \frac{\omega}{c} a = p\pi \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{cp\pi}{a} \quad (\text{avec } p \in \mathbb{N})$$

Si on note $\omega_0 = \frac{\pi c}{a}$, les pulsations permises sont quantifiées : $\omega = \omega_p = p \omega_0$.

Les conditions aux limites imposent une quantification des fréquences propres de la cavité.

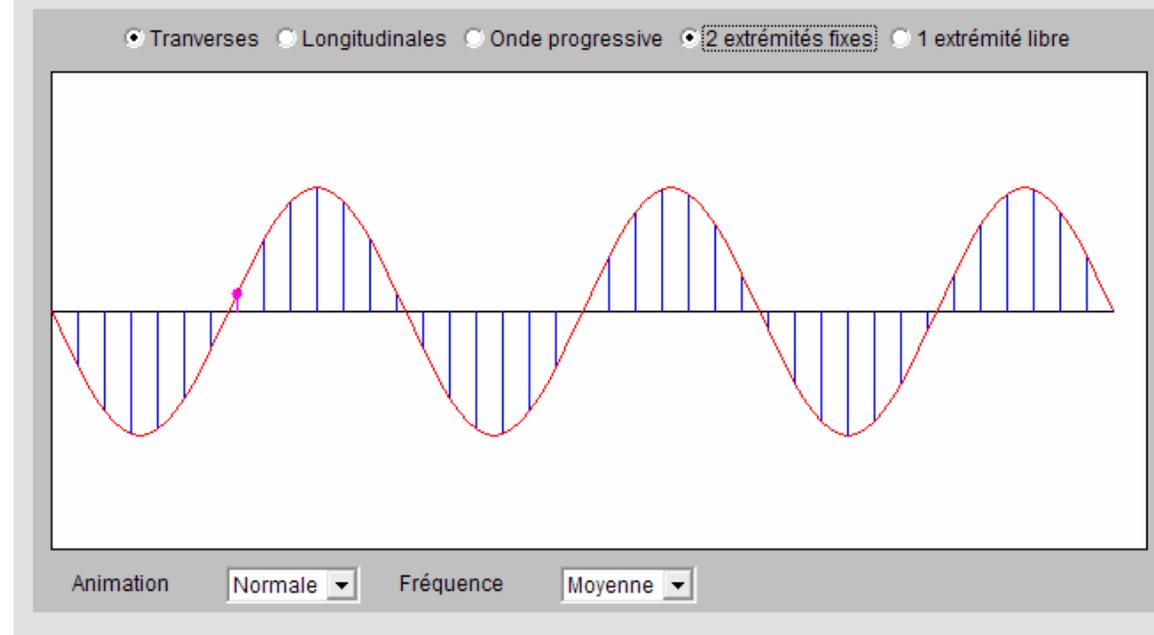
Le champ électrique pour cette pulsation ω_p s'écrit :

$$\vec{E}_p = \underline{B}_{x,p} \sin\left(p \frac{\pi}{a} z\right) e^{ip\omega_0 t} \vec{u}_x + \underline{B}_{y,p} \sin\left(p \frac{\pi}{a} z\right) e^{ip\omega_0 t} \vec{u}_y = \underline{\vec{E}}_{0,p} \sin\left(p \frac{\pi}{a} z\right) e^{ip\omega_0 t}$$

Le champ électrique existant dans la cavité peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}}(z, t) = \sum_p \underline{\vec{E}}_{0,p} \sin\left(p \frac{\pi}{a} z\right) e^{ip\omega_0 t} \quad (\text{avec } \omega_0 = \frac{\pi c}{a})$$

Propagation des ondes élastiques



[Animation JJ.Rousseau](#)

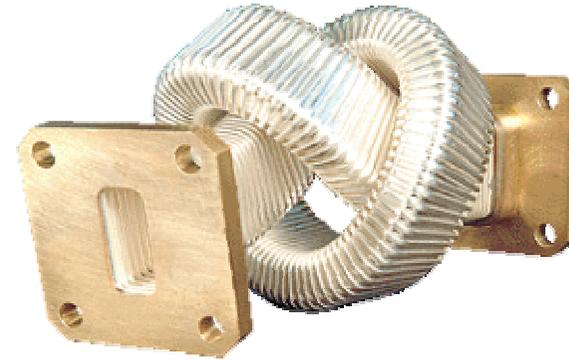
C'est la superposition des modes propres de pulsation propre $\omega = p\omega_0$: ce sont des ondes stationnaires.



II – Ondes guidées :

1 – Description des guides d’ondes :

Les applications pratiques des ondes électromagnétiques dans le domaine des communications ou du radar requièrent souvent un guidage des ondes, à la fois pour empêcher les interférences et pour canaliser l’énergie de façon à minimiser l’atténuation de l’onde. Ce guidage est causé par la présence d’une structure conductrice ou diélectrique (ou une combinaison des deux) qui permet des modes de propagation privilégiés dans une direction. Nous allons supposer que cette structure a une symétrie de translation dans une direction, qu’on choisit comme axe des z . On pense par exemple à un cylindre infini, fait entièrement de conducteur (ex. un fil), de diélectrique (ex. une fibre optique) ou de diélectrique entouré de conducteur, etc. Un objet en apparence aussi banal qu’un fil ou un ensemble de fils formant une ligne de transmission constitue en fait un guide d’onde, tout comme un câble coaxial. En particulier et contrairement à ce qu’on pourrait penser à première vue, le signal porté par un câble coaxial se propage non pas dans la partie métallique du fil mais dans le milieu diélectrique qui sépare le fil central de l’enveloppe conductrice; en tout cas, c’est là que se situe l’énergie en propagation.



Quelques exemples de guide d'ondes



Technologie de guide d'ondes acoustiques

*Plus de 2 m de guide d'ondes sont
pliés dans ce petit boîtier. Examinez
de plus près le principe de cette
technologie.*



La forme des ondes EM pouvant se propager dans un guide d'ondes n'est pas simple. Si on pense à une onde EM de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - kz) \quad (\text{avec } \underline{\vec{E}}_0 \perp \vec{u}_z)$$

Alors des problèmes de conditions aux limites se posent. Sur les bords, quelle que soit la coordonnée z , le champ électrique tangentiel doit être nul. Cette forme d'onde EM n'est donc pas solution du problème.

Ainsi, les conditions aux limites interdisent la possibilité d'une onde plane progressive monochromatique dans la plupart des guides d'ondes et imposent une forme plus complexe.

Modes TE, TM et TEM

Les ondes électromagnétiques guidées, à la différence des ondes se propageant dans le vide, ne sont pas toujours transverses, c'est-à-dire que les champs électrique et magnétique ne sont pas nécessairement perpendiculaires à la direction de propagation (l'axe des z). Il faut considérer différents modes de propagation pour une valeur donnée de la fréquence ω . On distingue les cas suivants :

1. Mode TEM (Transverse Électrique et Magnétique): les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} sont perpendiculaires à la direction de propagation, comme si l'onde se propageait dans le vide. On verra que ce type de propagation est impossible dans un guide d'onde fermé.
2. Mode TM (Transverse Magnétique): le champ \mathbf{B} est perpendiculaire à la direction de propagation, mais $E_z \neq 0$. On doit alors résoudre l'éq. (6.14) pour E_z . Ce mode est aussi appelé onde de **type E** (car E_z est non nul).
3. Mode TE (Transverse Électrique): le champ \mathbf{E} est perpendiculaire à la direction de propagation, mais $B_z \neq 0$. On doit alors résoudre l'éq. (6.14) pour B_z . Ce mode est aussi appelé onde de **type H** (car H_z est non nul).

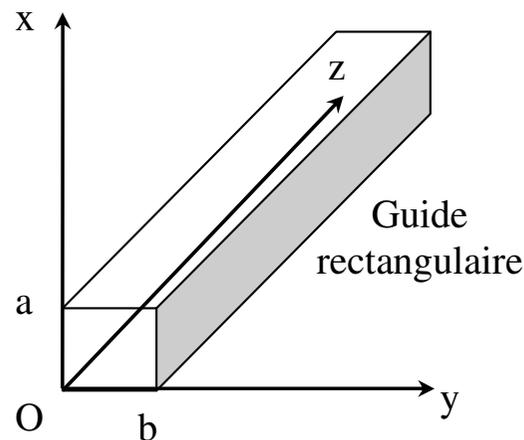
Les modes TE et TM ont ceci de particulier que la relation entre k et ω fait généralement intervenir une fréquence de coupure ω_c , en deçà de laquelle la propagation est impossible.

2 – Propagation de modes TE (transverses électriques) dans un guide d'ondes à section rectangulaire :

- On considère un cylindre droit métallique et creux, d'axe Oz, à section rectangulaire définie par : $0 \leq x \leq a$ et : $0 \leq y \leq b$

Le cylindre est illimité selon Oz et rempli d'air assimilable à du vide du point de vue électrique.

La conductivité des parois étant très grande, nous avons vu (« effet de peau ») que les champs de haute fréquence ne pénétreraient que très peu dans le métal : nous prendrons un modèle (dit du « conducteur parfait », où $\gamma \rightarrow \infty$) dans lequel \vec{E} et \vec{B} sont **nuls** dans le métal. Le champ électromagnétique est donc confiné à l'intérieur du cylindre : on parle de « **propagation guidée** » par opposition à la propagation libre à partir d'une source rayonnante.



1) Dans ces conditions, donner les conditions aux limites vérifiées par \vec{E} et \vec{B} sur les parois.

- On s'intéresse à un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(x, y) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y \quad (k \in \mathbb{R})$$

2) Montrer que $f(x, y)$ ne dépend pas de y .

Donner l'équation satisfaite par $f(x)$ et en déduire une condition vérifiée par k .

Déterminer les expressions possibles de $f(x)$ et établir la relation de dispersion.

Définir un ensemble de pulsations critiques et discuter de la forme des solutions selon la valeur de la pulsation.

Calculer la plus petite fréquence d'une onde pouvant se propager dans le guide avec $a=3\text{cm}$.

Calculer les vitesses de phase et de groupe, les comparer à c et conclure.

3) Déterminer le champ magnétique ; vérifier qu'il satisfait aux conditions aux limites de question 1). Le champ \vec{B} n'est pas transversal : est-ce un paradoxe ?

4) Calculer les moyennes temporelles de la puissance transportée par le guide et de l'énergie électromagnétique par unité de longueur, soit respectivement $\langle P \rangle_T$ et $\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T$.

En déduire la vitesse de propagation de l'énergie v_E ; la comparer à la vitesse de groupe v_g et conclure.

Solution :

1) La continuité des composantes tangentielle de \vec{E} et normale de \vec{B} , associée à la nullité des champs dans le métal, donnent les relations suivantes :

$$E_T = B_N = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = a, \text{ ainsi qu'en: } y = 0 \text{ et } y = b$$

2) • dans le vide : $\text{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ f ne dépend que de x

• équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f = 0$

(après simplification par $e^{i(\omega t - kz)}$)

♦ $k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$: conduit à des solutions en **exponentielles réelles** qui ne peuvent s'annuler en 2 points sans s'annuler partout \Rightarrow cas inintéressant.

♦ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$: les solutions sont **affines** et sont nulles partout comme précédemment.



$$\blacklozenge \quad \boxed{k^2 < \frac{\omega^2}{c^2}} : f(x) = E_0 \sin Kx + E'_0 \cos Kx \quad \text{avec: } K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 ; f(0) = 0 \text{ impose : } \boxed{E'_0 = 0}$$

Par ailleurs : $f(a) = 0 \Rightarrow \sin(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = \frac{n\pi}{a}$ avec: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ on tient la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad \text{et : } \boxed{\vec{E}_n = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y} \quad (\text{cette solution est appelée « **mode n** »})$$

Rq : le champ précédent est transverse et porté seulement par \vec{e}_y ; si le champ avait également une composante selon \vec{e}_x , alors les amplitudes seraient de la forme $E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$: les modes seraient alors caractérisés par un couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Le champ étudié dans cet exercice (qui est « transverse électrique » et où $m=0$) est noté $T.E_{n0}$ (le mode fondamental étant $T.E_{10}$).



On montre que la relation de dispersion du mode $TE_{n,m}$ est de la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

Toutes ces expressions constituent mathématiquement une base de solutions qui permettent ensuite de connaître l'expression de l'onde EM se propageant effectivement dans le guide d'ondes.

- Pour qu'une onde se propage, il faut que le **vecteur d'onde soit réel**, d'où :

$$\boxed{\omega \succ \omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}} \text{ qui définit un ensemble de pulsations critiques (une pulsation par mode } n)$$

Si $\omega \prec \omega_{n,c}$, k est **imaginaire** et le champ est de la forme : $E_0 \exp(k''z) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp(i\omega t)$; il n'y a plus propagation de la phase et, le vide ne pouvant être amplificateur, k'' est négatif : l'amplitude s'amortit exponentiellement, on parle « **d'onde évanescente** » ou « **onde stationnaire exponentiellement amortie** » (à ne pas confondre avec une « pseudo-O.P.P.M » où il y a encore propagation de la phase ; voir exercice 29.2).

Le guide se comporte donc comme un « **filtre passe-haut** ».

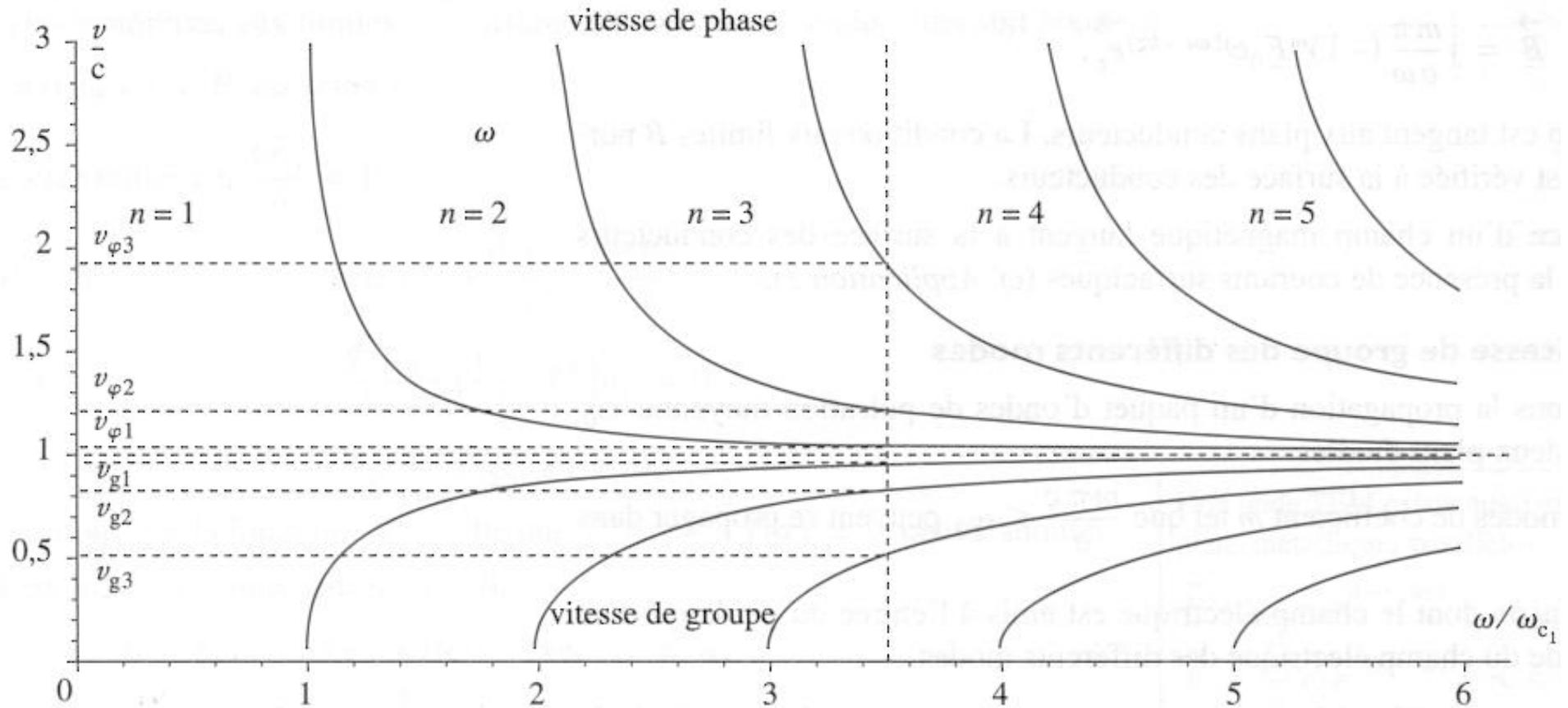
On peut alors calculer la plus petite fréquence pouvant se propager, qui correspond au mode fondamental :

$$f_{1,c} = \frac{\omega_{1,c}}{2\pi} = \frac{\pi c}{2\pi a} = 5\text{GHz} \quad (\text{domaine des hyperfréquences})$$

Rq : quand on examine la forme des solutions pour le champ électrique, on constate qu'à **x fixé**, les variables z et t sont « mélangées » dans le terme de phase, l'onde est alors **progressive** ; mais à **z fixé**, les variables x et t sont séparées \Rightarrow l'onde est **stationnaire** de ce point de vue.

- La vitesse de phase se calcule ainsi :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}}} \Rightarrow v_\varphi(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2}} > c$$



Tracé de v_ϕ et $v_g(\omega)$

Pour une valeur de ω donnée, il existe plusieurs modes de propagation possibles (ici 3) correspondant des valeurs de k différentes et donc à des vitesses de phase et de groupe différentes.

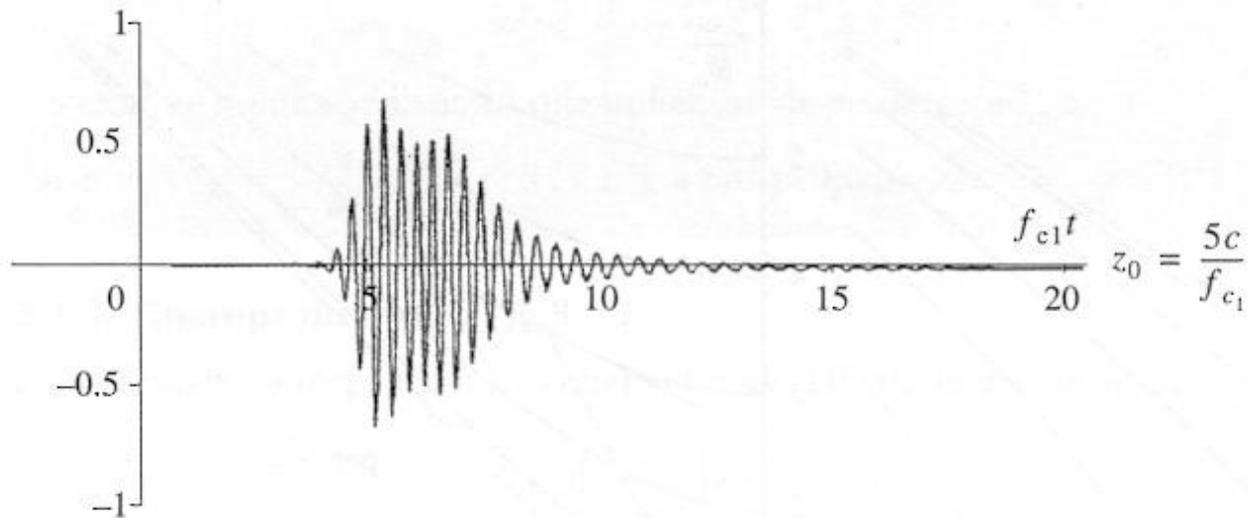
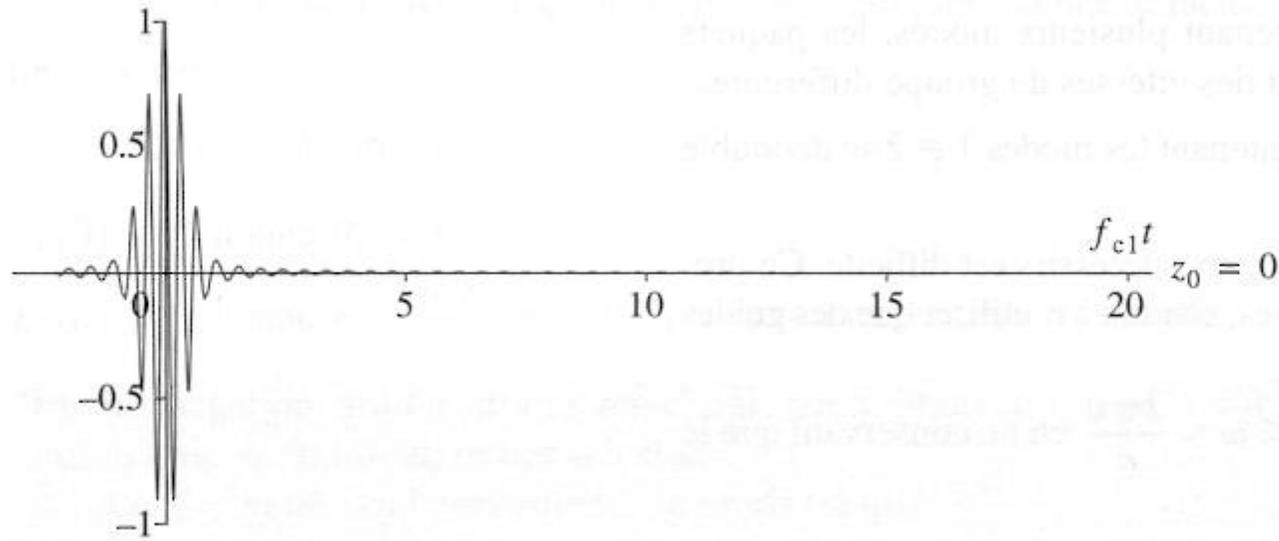
La vitesse de phase dépend de la pulsation \Rightarrow il y a **dispersion** : ce n'est pas le vide en soi qui est dispersif, mais bien le mode de propagation **guidé** (contrairement à la propagation libre).

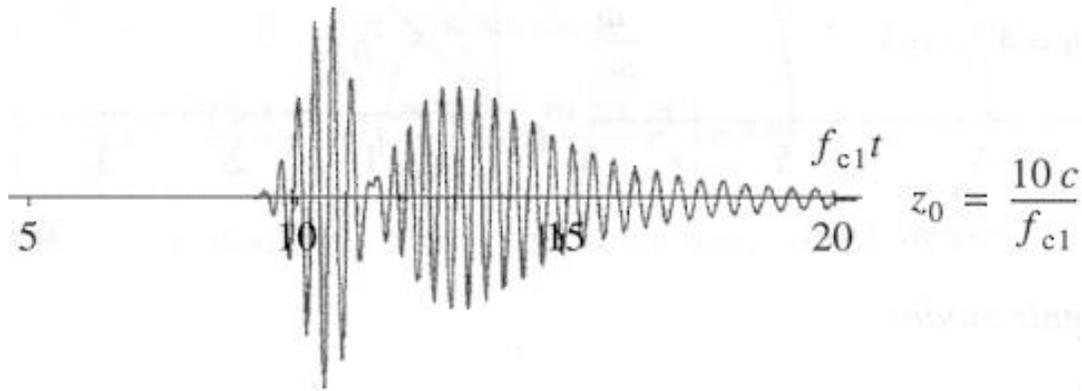
Pour la vitesse de groupe, on peut différentier la relation de dispersion : $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow$

$$\frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = c^2 \quad \text{ou: } v_g \times v_\phi = c^2 \quad (\text{cette relation n'est pas générale}) \Rightarrow \boxed{v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2} < c}$$

Comme signalé dans le cours, la vitesse de phase, qui est une grandeur purement mathématique, peut être supérieure à c ; la vitesse de groupe, ou vitesse d'enveloppe, peut représenter une grandeur physique comme l'énergie ou la position de la crête d'un paquet d'ondes (elle doit donc rester inférieure à c).







*Dédoublement d'un paquet
d'ondes dans un guide pour les modes TE_1
et TE_2 avec $\omega_0 = 2,5\omega_{c1} = 1,25\omega_{c2}$.*

3) • L'onde envisagée **n'étant pas plane** (dépendance spatiale en x ET z), on ne peut utiliser la relation de structure des O.P.P.M ; nous nous servirons de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overline{\text{rot}} \underline{\underline{\vec{E}}} = -\frac{\partial \underline{\underline{\vec{B}}}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -i\omega \underline{B_x} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} = ikE_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t - kz)] \\ -i\omega \underline{B_z} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{n\pi E_0}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t - kz)] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{B_x = -\frac{E_0 k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) ; B_z = -\frac{E_0 n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz)}$$

On peut vérifier que la composante normale du champ magnétique est bien nulle sur les parois :

- Sur les parois $y=0$ et $y=b$: la composante normale de $\underline{\underline{\vec{B}}}$ serait $B_y = 0 \Rightarrow$ vérifié ($B_N = 0$).

Sur les parois $x=0$ et $x=a$: la composante normale de $\underline{\underline{\vec{B}}}$ est B_x ; or $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$.



- Il n'y a rien de paradoxal au fait que le champ magnétique ne soit pas transversal, puisque l'onde n'est pas plane comme signalé plus haut.

4) • **Calcul du vecteur de Poynting** : $\bar{\Pi} = \bar{E} \wedge \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \frac{E_y B_z}{\mu_0} \bar{e}_x - \frac{E_y B_x}{\mu_0} \bar{e}_z$ (repasser en réel !...)

Or E_y et B_z sont en **quadrature** $\Rightarrow \langle E_y B_z \rangle_T = 0 \Rightarrow \Pi_x = 0$

Compte-tenu de $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle_T = 1/2$, il vient : $\langle \bar{\Pi} \rangle_T = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} \sin^2(n\pi x/a) \bar{e}_z$ (progression selon z)

D'où : $\langle P \rangle_T = \iint_S \bar{\Pi} \cdot d\vec{S}$ (S= section du guide) $\Rightarrow \langle P \rangle_T = \frac{E_0^2 b k}{2\mu_0 \omega} \int_0^a \sin^2(n\pi x/a) dx$

Après linéarisation du \sin^2 , il vient : $\langle P \rangle_T = \frac{E_0^2 a b k}{4\mu_0 \omega}$

*** Densité volumique d'énergie EM :**

$$u_{EM} = \frac{dW_{EM}}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Comme en électricité, on calcule l'énergie moyenne transportée par l'onde sur une période T :

• Calcul de la densité linéique d'énergie :

$$\left\langle \frac{dW_{EM}}{d\tau} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\epsilon_0 E_y^2}{2} \right\rangle_T + \left\langle \frac{B_x^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right\rangle_T = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \sin^2(n\pi x/a) + \frac{E_0^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[k^2 \sin^2(n\pi x/a) + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \cos^2(n\pi x/a) \right]$$

Nous allons intégrer sur la section S=ab du guide, avec dS=bdx ; comme précédemment, on a :

$$\int_0^a \sin^2(n\pi x/a) dx = \int_0^a \cos^2(n\pi x/a) dx = a/2 ; \text{ il vient alors :}$$

$$\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T = \frac{\epsilon_0 E_0^2 ab}{8} + \frac{E_0^2 ab}{8\mu_0 \omega^2} \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) ; \text{ avec } k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ et } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \text{ on obtient :}$$

$$\boxed{\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T = \frac{\epsilon_0 ab E_0^2}{4}}$$



Cette énergie représente donc l'énergie électromagnétique par unité de longueur transverse (selon (Oz)) dans le guide d'ondes.

- **Calcul de la vitesse de l'énergie** : nous allons calculer l'énergie moyenne qui traverse une section du guide pendant le temps dt (dt petit à notre échelle, grand par rapport à la période T de l'onde) de 2 manières différentes :

- ♦ lien direct entre énergie et puissance : $\langle dW_{EM} \rangle_T = \langle P \rangle_T dt = \frac{kabE_0^2}{4\mu_0\omega} dt$

- ♦ la même énergie est contenue dans un cylindre de section S , de longueur $dl = v_E dt$ (des « photons » animés de la vitesse v_E et situés au-delà de la distance dl ne pourront franchir la section choisie dans le temps imparti dt) ; on écrit alors :

$$\langle dW_{EM} \rangle_T = \left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T \times v_E dt = \frac{\epsilon_0 ab E_0^2}{4} v_E dt \Rightarrow v_E = \frac{\langle P \rangle_T}{\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T} = \frac{k}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} \Rightarrow \boxed{v_E = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g}$$



Détermination des densités surfaciques de charges et de courants :

On considère le mode TE_{10} , pour lequel le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y \quad (\text{avec : } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2})$$

En $x = 0$ et $x = a$, le champ est tangential et s'annule bien sur les deux parois métalliques.

En $y = 0$, le champ électrique est normal à la surface métallique ; il existe alors une densité surfacique de charges donnée par :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$$

Soit :

$$\underline{\sigma} = \epsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz)$$

En notation réelle :

$$\sigma(x,0,z,t) = \varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$

Sur la face $y = b$, apparaît la densité : (le vecteur normal est opposé)

$$\sigma(x,b,z,t) = -\varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$

Pour calculer les densités surfaciques de courants, on rappelle l'expression (pour le mode n quelconque) du champ magnétique :

$$B_x = -\frac{E_0 k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \quad ; \quad B_z = -\frac{E_0 n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz)$$

En $x = 0$ ou $x = a$, B_x est nulle mais par B_z : il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique.

Le courant surfacique qui apparaît par exemple en $x = 0$ est donné par : (et avec $n = 1$)

$$-\frac{E_0 \pi}{a \omega} \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s(0, y, z) \wedge \vec{u}_x$$

Soit :

$$\vec{j}_s(0, y, z) = \frac{E_0 \pi}{\mu_0 a \omega} \sin(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

On procéderait de la même manière pour la paroi $x = a$.

En $y = 0$, on aurait :

$$-\frac{E_0 k}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x - \frac{E_0 \pi}{a \omega} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s(x, 0, z) \wedge \vec{u}_y$$

Soit :

$$\vec{u}_y \wedge \left(-\frac{E_0 k}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x - \frac{E_0 \pi}{a \omega} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z \right) = \mu_0 \vec{u}_y \wedge (\vec{j}_s(x, 0, z) \wedge \vec{u}_y)$$

D'où :

$$\vec{j}_s(x, 0, z) = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{E_0 \pi}{a \omega} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_x + \frac{E_0 k}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z \right)$$

On procéderait de la même manière pour la paroi $y = b$.

Exercice d'application :

(Guide d'ondes entre une antenne parabolique et un démodulateur)

On veut relier une antenne parabolique à un démodulateur par un guide d'ondes à base rectangulaire.

- a) Quel intérêt y a-t-il à utiliser un guide monomode, c'est-à-dire qu'un seul mode puisse s'y propager ?
- b) Pour une réception par satellite dans la bande 4-6 GHz, quelles dimensions donner à un guide rectangulaire placé entre le foyer de l'antenne parabolique et le démodulateur, si l'on désire que de tous les modes $TE_{n,0}$, seul le mode $TE_{1,0}$ se propage ?
- c) Sachant que la relation de dispersion du mode $TE_{n,m}$ est :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

affiner le résultat précédent.

Solution :

a) L'onde de pulsation donnée se propageant dans un guide d'onde est en toute généralité la superposition de tous les modes pouvant se propager à cette fréquence. Dans le cas d'un guide monomode, on connaît alors sans ambiguïté la structure de l'onde. Ainsi, on sait où placer les récepteurs, émetteurs et autres éléments. De plus, les différents modes ne se propagent pas à la même vitesse, il y a dispersion ; l'étalement des impulsions est réduit pour un guide monomode.

b) La pulsation de coupure du mode $TE_{n,0}$ est :

$$\omega_{cn,0} = \frac{n\pi c}{a}$$

soit une fréquence de coupure :

$$f_{cn,0} = \frac{cn}{2a}$$

Si on désire que le seul mode $TE_{1,0}$ se propage, il faut que la fréquence du signal f vérifie :

$$\frac{c}{2a} \leq f \leq \frac{c}{a} \quad \text{soit} \quad a \leq \frac{c}{f} \leq 2a$$

L'AN donne $a < 5 \text{ cm}$ et $7,5 \text{ cm} < 2a$ vu l'étalement en fréquence.

Finalement : $3,75 \text{ cm} < a < 5 \text{ cm}$.

c) Il est aussi nécessaire que le mode $\text{TE}_{0,1}$ ne puisse pas se propager, soit $f < \frac{c}{2b}$,

ou $b < \frac{c}{2f}$.

On obtient $b < 3,75 \text{ cm}$.

Conclusion :

On a mis en évidence l'existence d'ondes solutions des équations de Maxwell qui sont transverses électriques mais non transverses magnétiques (on aurait pu choisir l'inverse, voir paragraphe suivant).

Ces ondes ont une double structure : progressive selon (Oz) et stationnaire selon (Ox), conformément à l'interprétation de cette solution comme superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques se propageant en zigzags à l'intérieur du guide.

Ces solutions dépendent d'entiers et portent le nom de modes. Il y a dispersion des ondes dans le guide, qui agit comme un filtre passe-haut. Seules les fréquences supérieures à une fréquence de coupure située dans le domaine des micro-ondes (longueur d'onde de l'ordre du cm, fréquence de l'ordre du GHz) peuvent se propager. En conséquence, les signaux dans le guide se déforment au cours de leur propagation. Cela constitue une contrainte à prendre en compte pour la transmission d'informations.

3 – Propagation de modes TM (transverses magnétiques) entre deux plans conducteurs :

On s'intéresse à la propagation d'ondes EM entre deux plans conducteurs parfaits

d'équation $x = \pm \frac{d}{2}$.

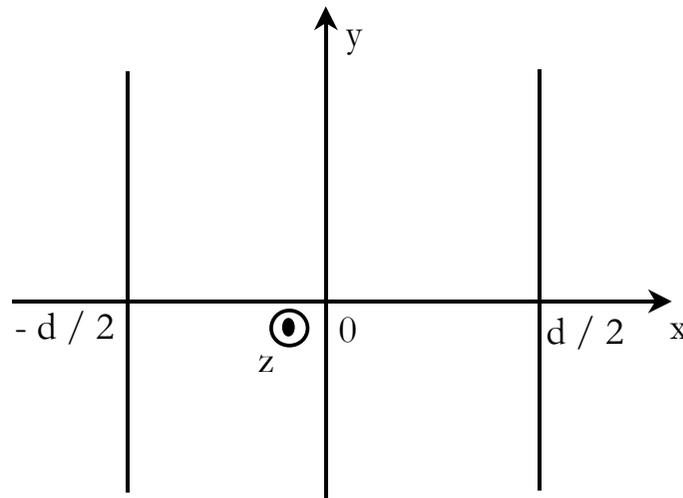
On cherche une solution des équations de propagation dont le champ magnétique est de la forme (champ magnétique transverse) et qui se propage selon (Oz) :

$$\underline{\vec{B}} = f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

a) Montrer que la compatibilité de cette solution et du champ électrique associé avec les équations de Maxwell ainsi que les conditions aux limites imposent une quantification et une relation de dispersion à déterminer.

On remarque tout d'abord que le champ magnétique proposé a bien une divergence nulle.

On ne peut pas calculer le champ électrique en utilisant la relation $\overrightarrow{rot}\vec{B} = -i\vec{k} \wedge \vec{B}$ ou encore la relation $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ car ces relations ne sont valables que si l'onde a une amplitude constante.



Le champ électrique se calcule avec l'équation de Maxwell-Ampère et en utilisant la définition de l'opérateur rotationnel :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ikf(x) e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ f'(x) e^{i(\omega t - kz)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{E} = \frac{c^2}{\omega} \left(kf(x) \vec{u}_x - i \frac{df(x)}{dx} \vec{u}_z \right) e^{i(\omega t - kz)}$$

Ce champ électrique a bien une divergence nulle :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

On peut écrire l'équation de propagation pour le champ magnétique :



$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Comme :

$$\Delta \vec{B} = \Delta B_y \vec{u}_y = \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y$$

On en déduit :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(x) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est oscillante si $\omega > ck$, affine si $\omega = ck$ et exponentielle (réelle) si $\omega < ck$.

La condition aux limites pour le champ électrique s'écrit, de manière générale :

$$\vec{E}_{air} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (\pm \vec{u}_x)$$

Ainsi, les coordonnées selon (Oy) et (Oz) du champ électrique doivent-elles nulles en $x = \pm \frac{d}{2}$. On en déduit :

$$E_z = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (\text{en } x = \pm \frac{d}{2})$$

On peut montrer facilement que cette condition ne peut être satisfaite que par la solution oscillante :

$$f(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \quad (\text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2})$$

Les conditions aux limites $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=\pm \frac{d}{2}} = 0$ donnent :

$$\text{En } x = -\frac{d}{2} : \quad A \sin\left(\alpha \frac{d}{2}\right) + B \cos\left(\alpha \frac{d}{2}\right) = 0$$

$$\text{En } x = +\frac{d}{2} : \quad -A \sin\left(\alpha \frac{d}{2}\right) + B \cos\left(\alpha \frac{d}{2}\right) = 0$$

Ce système admet d'autres solutions que la solution évidente $A = B = 0$ si son déterminant est nul :

$$2 \sin\left(\alpha \frac{d}{2}\right) \cos\left(\alpha \frac{d}{2}\right) = \sin(\alpha d) = 0 \quad \text{soit} \quad \alpha_n = n \frac{\pi}{d}$$

Les pulsations ω admises vérifient :

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \quad \text{donne} \quad \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = n^2 \frac{\pi^2}{d^2}$$

Cette dernière relation constitue la relation de dispersion du milieu : elle traduit la relation qui existe entre la pulsation de l'onde et le vecteur d'onde k .

En particulier, pour un mode donné, $k > 0$ si $\omega > \omega_{c,n} = n \frac{\pi c}{d}$.

On remarque que l'équation :

$$\text{En } x = +\frac{d}{2} : \quad -A_n \sin\left(\alpha_n \frac{d}{2}\right) + B_n \cos\left(\alpha_n \frac{d}{2}\right) = 0$$

conduit à :

$$A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Par conséquent, si n est pair alors $B_n = 0$ et si n est impair, $A_n = 0$. Dans la suite, on posera :

$$f_n(x) = A_n \cos(\alpha_n x) + B_n \sin(\alpha_n x) = f_{0,n} \cos(\alpha_n x - \varphi_n)$$

Avec :

$$\tan(\varphi_n) = \frac{B_n}{A_n} = \tan\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{soit} \quad \varphi_n = \frac{n\pi}{2}$$

Et, finalement :

$$f(x) = \sum_n f_{0,n} \cos(\alpha_n x - \varphi_n) = \sum_n f_{0,n} \cos\left(\frac{n\pi}{d} x - n\frac{\pi}{2}\right)$$

Soit :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{0,n} \cos\left[\frac{n\pi}{d} \left(x - \frac{d}{2}\right)\right]$$

b) On peut déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation ω de l'onde guidée pour un mode (n) donné. La pulsation ω doit vérifier :

$$\omega > \omega_{c,n} = n\frac{\pi c}{d} \quad (\text{il faut que } k^2 > 0)$$

En faisant intervenir la longueur d'onde : $\left(\lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi \frac{c}{\omega}\right)$

$$\lambda < \lambda_n = \frac{2d}{n}$$

Interprétation physique : la longueur d'onde de l'onde ne doit pas être « trop grande » pour que l'onde passe entre les deux plans.

Le champ magnétique s'écrit :

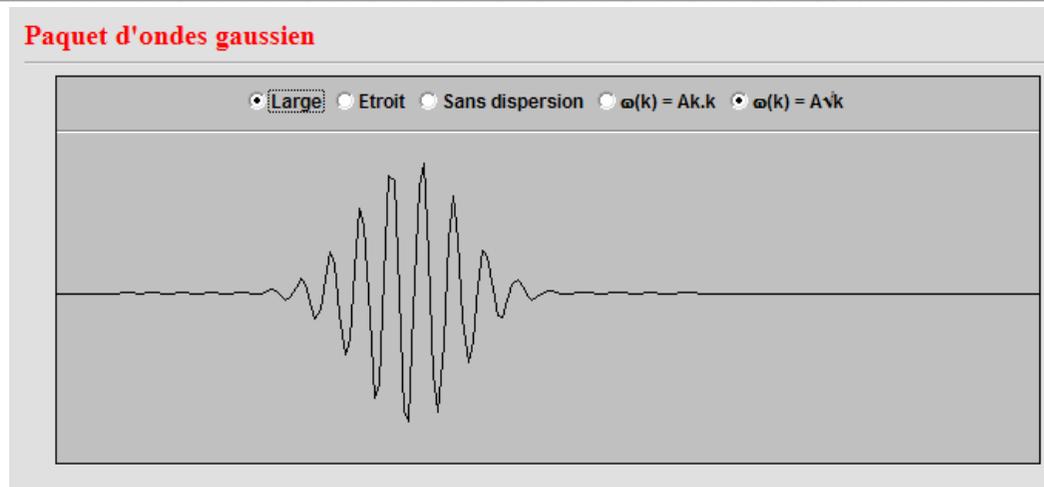
$$\underline{\vec{B}} = f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

Le terme $e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$ est identique à celui d'une onde plane progressive harmonique se propageant selon (Oz).

La vitesse de phase est définie usuellement par :

$$v_{\varphi,n} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - n^2 \frac{\pi^2}{d^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}}$$

Ici, la vitesse de phase dépend de la pulsation : ainsi, si plusieurs ondes (on parle de paquet d'ondes) de pulsations différentes se propagent dans le milieu, on observera un étalement du paquet d'ondes. On dit que le milieu est dispersif.



[Animation JJ.Rousseau](#)

La vitesse de groupe est :

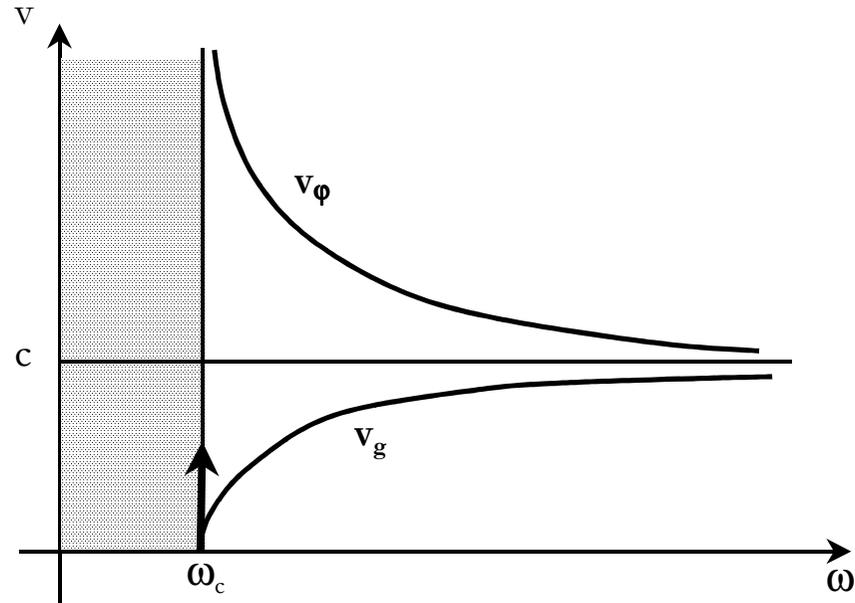
$$v_{g,n} = \frac{d\omega}{dk}$$

En différentiant la relation de dispersion $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = n^2 \frac{\pi^2}{d^2}$:

$$2\omega d\omega - 2c^2 k dk = 0 \quad \text{soit} \quad v_{g,n} = \frac{c^2}{v_{\phi,n}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}$$



Les graphes des deux vitesses sont donnés ci-dessous :



c) En considérant le flux moyen d'énergie transportée par l'onde dans sa direction de propagation, définir et calculer la vitesse d'énergie associée au mode (n). A quelle vitesse s'identifie-t-elle ?

En notation réelle :

$$\vec{B} = f_n(x) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$



$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \text{Re} \left\{ \frac{c^2}{\omega} \left(kf_n(x) \vec{u}_x - i \frac{df_n(x)}{dx} \vec{u}_z \right) e^{i(\omega t - kz)} \right\}$$

La coordonnée du vecteur de Poynting le long de la direction (Oz) de propagation vaut (et moyennée dans le temps) :

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{c^2}{\omega} kf_n(x) \right) f_n(x)}{\mu_0} = \frac{kc^2}{2\mu_0 \omega} f_n(x)^2$$

Avec $f_n(x) = f_{0,n} \cos \left[\frac{n\pi}{d} \left(x - \frac{d}{2} \right) \right]$, il vient :

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{kc^2}{2\mu_0 \omega} f_{0,n}^2 \cos^2 \left[\frac{n\pi}{d} \left(x - \frac{d}{2} \right) \right]$$

Le flux moyen d'énergie transportée à travers une section $\Delta x \Delta y = d \Delta y$ perpendiculairement à la direction (Oz) de propagation vaut :



$$\langle \Phi \rangle = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \langle \Pi_z \rangle dx \Delta y = \frac{kc^2 f_{0,n}^2}{4\mu_0 \omega} d \Delta y$$

La densité volumique d'énergie vaut :

$$e_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$$

dont la valeur temporelle moyenne vaut :

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{2} \frac{c^4}{\omega^2} \left(k^2 f_n^2(x) + \left(\frac{df_n}{dx} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2\mu_0} f_n^2(x)$$

Avec $f_n(x) = f_{0,n} \cos \left[\frac{n\pi}{d} \left(x - \frac{d}{2} \right) \right]$, il vient :

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) f_{0,n}^2 \cos^2 \left[\frac{n\pi}{d} \left(x - \frac{d}{2} \right) \right] + \frac{1}{4\mu_0} \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2} f_{0,n}^2 \sin^2 \left[\frac{n\pi}{d} \left(x - \frac{d}{2} \right) \right]$$

On peut calculer une énergie linéique (par unité de longueur selon Oz) :

$$\langle W_{em} \rangle = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \langle e_{em} \rangle dx \Delta y$$

Soit :

$$\langle W_{em} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) f_{0,n}^2 \frac{1}{2} d \Delta y + \frac{1}{4\mu_0} \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2} f_{0,n}^2 \frac{1}{2} d \Delta y = \frac{f_{0,n}^2}{8\mu_0} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2} \right) d \Delta y$$

Or, $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega_{c,n}^2}{c^2}$ donne $1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}$ et finalement :

$$\langle W_{em} \rangle = \frac{f_{0,n}^2}{4\mu_0} d \Delta y$$

On définit la vitesse de propagation de l'énergie dans la cavité par :

$$v_e = \frac{\text{flux moyen d'énergie à travers une section}}{\text{énergie par unité de longueur dans le guide}} = \frac{\langle \Pi_z \rangle}{\langle W_{em} \rangle} = \frac{kc^2}{\omega} = v_g$$



La vitesse de propagation de l'énergie s'identifie à la vitesse de groupe.

Autre démonstration : écrire que :

$$\langle \Pi_z \rangle dt = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} v_e dt dx \Delta y \langle e_{em} \rangle$$

Remarques :

- Si l'on souhaite faire les calculs avec les grandeurs complexes, alors :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \langle \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) \rangle \quad \text{et} \quad \langle e_{em} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right\rangle$$

- La vitesse de l'énergie n'est pas nécessairement la vitesse de groupe pour une onde non plane ou pour une onde plane dans un milieu absorbant.

