MP5 Physique

plan du cours de propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

I) ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE :

on suppose : $\rho = 0$ et $j = 0$

$$\mathrm{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{(MF)} \qquad \mathrm{rot}B = \varepsilon_0 . \mu_0 . \frac{\partial E}{\partial t} \text{(MA)}$$

$$\mathrm{div}B = 0 \text{(M}\Phi\text{)} \qquad \mathrm{div}E = 0 \text{(MG)}$$

II) ÉQUATIONS DE PROPAGATION :

1) Rappel : équations de propagation des potentiels :

a) Équation de propagation du potentiel vecteur : $\square A = 0$

b) Équation de propagation du potentiel scalaire : $\square V = 0$

2) Équation de propagation du champ électrique :

théorème : $\square E = 0$

3) Équation de propagation du champ magnétique :

théorème : $\square B = 0$

4) Onde électromagnétique :

définition : on appelle onde électromagnétique l'ensemble des deux champs vectoriels : (E, B), ces deux champs vérifiant, dans le vide, la même équation de propagation (équation d'onde vectorielle)

III) ÉTUDE DE QUELQUES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION D'ONDE :

définition : on appelle onde tout phénomène physique décrit par une équation de la forme:

$$\Box F = 0 \text{ , c'est-à-dire : } \Delta F - \frac{1}{c^2} . \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \text{(équation d'onde)}$$

1) Ondes planes :

a) Définitions :

définition : une onde est plane si, et seulement si la fonction d'onde la décrivant a, à un instant donné, la même valeur en tout point d'un plan orthogonal à une direction fixe, déterminée par un vecteur unitaire u, ceci quel que soit le plan choisi orthogonalement à u, et ceci à tout instant ; la direction définie par u est appelée direction de propagation de l'onde plane

définition : on appelle surface d'onde une surface telle que, à un instant donné, la fonction d'onde décrivant l'onde ait la même valeur en tout point de cette surface, et ceci à tout instant

théorème : les surfaces d'onde d'une onde plane sont des plans orthogonaux à la direction de propagation de l'onde plane

théorème : si une onde plane se propage selon une direction définie par le vecteur unitaire u_x, alors l'équation d'onde devient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} . \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \; {}^{2} \qquad \text{(EOP)}$$

b) Solution la plus générale de l'équation d'onde (EOP) :

théorème : la solution F(x,t) la plus générale de l'équation (EOP) est de la forme :

$$F(x,t) = f_1(x-c.t) + f_2(x+c.t)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions a priori quelconques (d'une seule variable)

ou encore : $$F(x,t) = g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions a priori quelconques (d'une seule variable)

c) Interprétation physique :

1) la dépendance de (x-c.t) de la fonction f_1 ou g_1 traduit une onde plane se propageant parallèlement à u_x dans le sens de u_x (ou encore vers les x croissants) avec la célérité ou vitesse de propagation c

2) la dépendance de (x+c.t) de la fonction f_2 ou g_2 traduit une onde plane se propageant parallèlement à u_x dans le sens de $-u_x$ (ou encore vers les x décroissants) avec la célérité ou vitesse de propagation c

d) Cas où la direction de propagation $\underline{u}$ est quelconque :

alors la solution la plus générale de l'équation (EOP) est de la forme :

$$f_1(OM.u - ct) + f_2(OM.u + ct)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions a priori quelconques (d'une variable)

ou encore : $$g_1\left(t - \frac{OM.u}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{OM.u}{c}\right)$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions a priori quelconques (d'une seule variable)

2) Ondes sphériques :

a) Définition :

définition : une onde est sphérique si, et seulement si la fonction d'onde la décrivant a, à un instant donné, la même valeur en tout point d'une sphère (par exemple de centre O), ceci quel que soit le rayon de cette sphère, et ceci à tout instant

théorème : les surfaces d'onde d'une onde sphérique sont des sphères

théorème : l'équation d'onde devient, pour une onde sphérique :

$$\frac{1}{r}.\frac{\partial^2(r.F)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(EOS)}$$

b) Solution la plus générale de l'équation d'onde (EOS) :

théorème: la solution F(r,t) la plus générale de l'équation (EOS) est de la forme :

$$F(r,t) = \frac{1}{r}.f_1(r - c.t) + \frac{1}{r}.f_2(r + c.t)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions a priori quelconques (d'une variable)

ou encore : $$F(r,t) = \frac{1}{r}.g_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}.g_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions a priori quelconques (d'une seule variable)

c) Interprétation physique :

1) la dépendance de (r-c.t) de la fonction f_1 traduit une onde sphérique se propageant depuis O dans toutes les directions (onde sphérique divergente) à la célérité ou vitesse de propagation c

2) la dépendance en (r+c.t) de la fonction f_2 traduit une onde sphérique se propageant vers O dans toutes les directions (onde sphérique convergente) à la célérité ou vitesse de propagation c

3) le coefficient 1/r traduit, dans chaque direction de l'espace, un amortissement de l'amplitude de l'onde lorsqu'on s'éloigne de O

3) Ondes progressives,ondes stationnaires :

a) Onde progressive :

définition : on appelle onde progressive un phénomène physique se produisant dans une certaine région de l'espace et décrit par une fonction du type:

$$g_{progressive} = A(M).f(t-\tau(M))$$

(il y a couplage des variables d'espace (M) et de temps (t))

b) Onde stationnaire :

définition : on appelle onde stationnaire un phénomène physique se produisant dans une certaine région de l'espace et décrit par une fonction du type :

$$g_{stationnaire} = A(M).f(t)$$

(il y a découplage entre les variables d'espace (M) et de temps (t))

IV) ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PLANES ; ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PLANES PROGRESSIVES :

1) Rappels

2) Ondes électromagnétiques planes progressives :

théorème : pour une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans la direction et le sens de u, on peut écrire formellement :

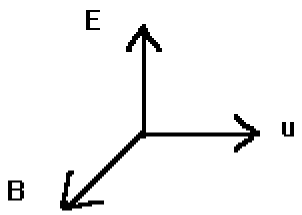
$$\nabla = -\frac{1}{c}.u.\frac{\partial}{\partial t}$$

3) Structure d'une onde plane progressive: transversalité des champs :

théorème : si l'on ne tient pas compte d'éventuels champs statiques (c'est-à-dire indépendants du temps), alors, pour une onde électromagnétique plane progressive se propageant selon le vecteur u et dans le sens de u :

1) le champ électrique E est orthogonal à la direction de propagation u
2) le champ magnétique B est orthogonal à la direction de propagation u
3) les champs électrique E et magnétique B sont orthogonaux entre eux
4) le trièdre (u, E, B) est orthogonal direct
5) $\|B\| = \frac{\|E\|}{c}$

remarque : pour une onde plane non progressive (superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans la même direction et dans des sens opposés), les champs électrique et magnétique sont encore orthogonaux à la direction de propagation



$$B = \frac{1}{c}.u \wedge E$$

V) VECTEUR DE POYNTING :

1) Définition :

définition : $$R = \frac{1}{\mu_0} E \wedge B$$

2) Lien entre le vecteur de Poynting et l'énergie transportée par l'onde :

théorème : la densité volumique d'énergie électromagnétique w_{elm} est :

$$w_{elm} = \frac{1}{2}.\varepsilon_0.E^2 + \frac{1}{2}.\frac{B^2}{\mu_0}$$

théorème :
1) de façon générale, dans "le vide" (c'est-à-dire dans un milieu ni diélectrique, ni magnétique) :

$$\mathrm{div}R + \frac{\partial w_{elm}}{\partial t} + j.E = 0$$

2) dans le vide absolu : ($\rho = 0$, $j = 0$)

$$\mathrm{div}R + \frac{\partial w_{elm}}{\partial t} = 0$$

interprétation physique du vecteur de Poynting : le flux du vecteur de Poynting à travers une surface (ouverte ou fermée) est égal à la puissance transportée par l'onde électromagnétique à travers cette surface

3) Cas d'une onde plane progressive :

théorème : pour une onde plane progressive se propageant dans la direction et le sens du vecteur unitaire u :

$$R = w_{elm} c u$$

remarque : le vecteur de Poynting est un vecteur longitudinal (parallèle à la direction de propagation de l'onde)

remarque : pour une onde plane progressive se propageant dans le vide, la vitesse de propagation de l'énergie est égale à c