Incertitudes et analyse dimensionnelle

Measurements - Uncertainties
Dimensional Analysis

Cours de méthodologie – Ecole d'été (ITC Phnom Penh)

Olivier GRANIER

(Du lundi 20 au mercredi 29 août 2012)

In physics, the uncertainty of a measurement is stated by giving a range of values to enclose the "true" value

The uncertainty of a measurement tells us something about its quality.

This may be denoted by error bars on a graph or by the following notation :

$$\boxed{X = X_0 \pm \Delta X}$$

X_0 : measured value

ΔX : uncertainty (accuracy) of measurement (unprecise).

Uncertainty is a quantification of the doubt about the measurement result.

Error is the difference between the measured value and the 'true value' of the thing being measured

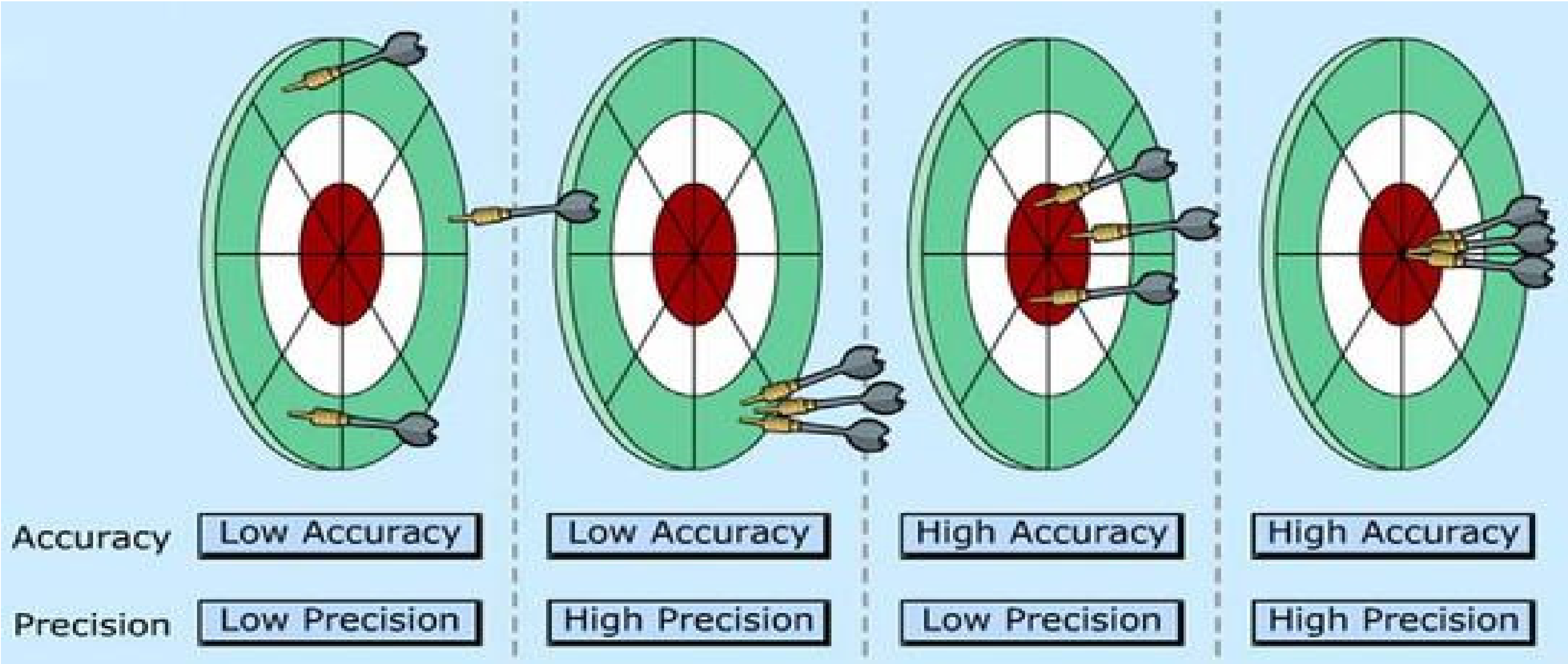
Uncertainty depends on :

- The accuracy and precision of the measurement instrument.
- Some measurements depend on the skill and judgement of the operator. One person may be better than another at the delicate work of setting up a measurement or at reading fine detail by eye.

Visual alignment is an operator skill. A movement of the observer can make an object appear to move. "Parallax errors" of this kind can occur when reading a scale with a pointer.

- The environment : temperature, air pressure, humidity and many other conditions can affect the measuring instrument or the item being measured.

Precision and Accuracy :



- **Precision** is the measure of how closely individual measurements agree with one another.
- **Accuracy** is how closely individual measurements with the correct value.

- Evaluer l'incertitude sur S = ab, connaissant Δa et Δb

- La loi d'Ohm est U = RI. Quelle est l'incertitude sur R si U et I sont connues avec des incertitudes ΔU et ΔI ?

$$R = \frac{U}{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

We have to increase the uncertainty : $\boxed{\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}}$

- Equation of state of perfect gases : $\boxed{\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta n}{n}}$

- Very conventionnal example (Index of refraction) : $n = \dfrac{sin\left(\dfrac{A + D_m}{2}\right)}{sin\left(\dfrac{A}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \Delta n \ ?$

Erreurs aléatoires (ou fortuites) (Random error)

Where repeating the measurement gives a randomly different result.

If so, the more measurements you make, and then average, the better estimate you generally can expect to get.

Erreurs systématiques (Systematic/bias error)

Bias error is a systematic inaccuracy caused by a mechanism that we can (ideally) control.

We can adjust measurements to account for bias errors.

Examples :

- A pressure gauge that always reads 2 Pa high at 100 Pa.
- There is a heat flow along thermocouple when measuring the temperature of an object.

Calculs de petites variations : (how to calculate small variations of physical quantities ?)

- Le volume d'une sphère de rayon r est $V = 4\pi r^3 / 3$.

Calculer l'accroissement de volume lorsque le rayon r varie de 1 m à 1,01 m.

The radius of a sphere goes up from 1 m to 1,01 m ; calculate the volume variation of the sphere.

- The altitude of a stationary satellite increases to 50 km.

How much energy have we given ?

Animation JJR/meca/animations/satellite artificiel

Basic Mechanical Units

	SI Units (MKS)	(CGS)	U.S. Common
Length (L)	meter (m)	centimeter (cm)	foot (ft)
Time (T)	second (s)	second (s)	second (s)
Mass (M)	kilogram (kg)	gram (gm)	slug
Velocity (L/T)	m/s	cm/s	ft/s
Acceleration (L/T^2)	m/s^2	cm/s^2	ft/s^2
Force (ML/T^2)	kg m/s^2=Newton(N)	gm cm/s^2= dyne	slug ft/s^2=pound(lb)
Work (ML^2/T^2)	N m = joule (j)	dyne cm = erg	lb ft = ft lb
Energy (ML^2/T^2)	joule	erg	ft lb
Power (ML^2/T^3)	j/s = watt (W)	erg/s	ft lb/s

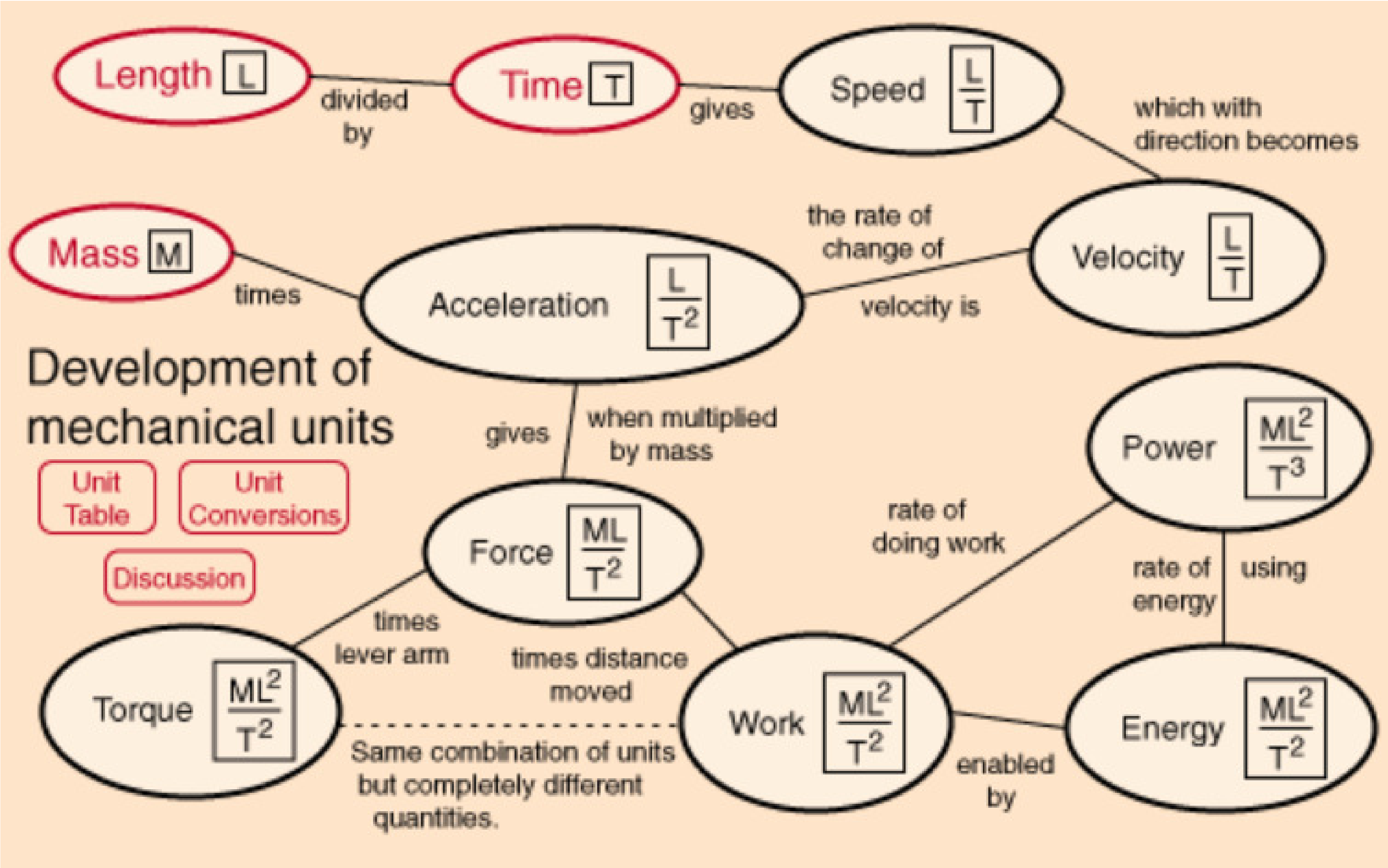
All mechanical quantities can be expressed in terms of these three quantities (L, T and M)

sillages.info
Ressources pour l'ouverture sociale et internationale de l'accès aux grandes écoles

I.T.C.

Université de Limoges

AGENCE UNIVERSITAIRE DE LA FRANCOPHONIE



Length L
divided by
Time T
gives
Speed L/T
which with direction becomes
Mass M
times
Acceleration L/T2
the rate of change of
velocity is
Velocity L/T
Development of mechanical units
Unit Table
Unit Conversions
Discussion
gives
when multiplied by mass
Power ML2/T3
Force ML/T2
rate of doing work
rate of energy
using
times lever arm
times distance moved
Torque ML2/T2
Work ML2/T2
Energy ML2/T2
Same combination of units but completely different quantities.
enabled by

Analyse dimensionnelle : (dimensional analysis)

- Une particule décrit une trajectoire circulaire de rayon R, à la vitesse uniforme v.

  Montrer, par analyse dimensionnelle, que le module de son accélération est de la forme :

$$a = k\frac{v^2}{R}$$

où k est une constante sans dimension.

- Dans un exercice, on a demandé à des étudiants de calculer l'intensité de la force d'attraction entre les deux armatures (chargées q et - q) d'un condensateur plan (séparées par la distance d) de capacité C.

  Les réponses obtenues ont été :

$$F = \frac{q^2}{2Cd^2} \quad ; \quad F = \frac{q}{2Cd^2} \quad ; \quad F = \frac{q^2}{2Cd}$$

  Quelle(s) réponse(s) est(sont) susceptible(s) d'être correcte(s) ?

- ***Implosion d'une bulle d'air :***

On veut calculer le temps que met à disparaître une bulle d'air (the air bubble will implode) contenue dans l'eau, lorsque la pression de vapeur dans la bulle est faible devant la pression qui règne dans l'eau.

On considère une bulle sphérique, de centre *O*, origine du repère, dont le rayon *a* varie en fonction du temps *t*.

P_0 est la pression loin de la bulle, μ la masse volumique de l'eau et a_0 le rayon initial de la bulle.

Le temps d'implosion (implosion time) τ de la bulle peut s'exprimer sous la forme :

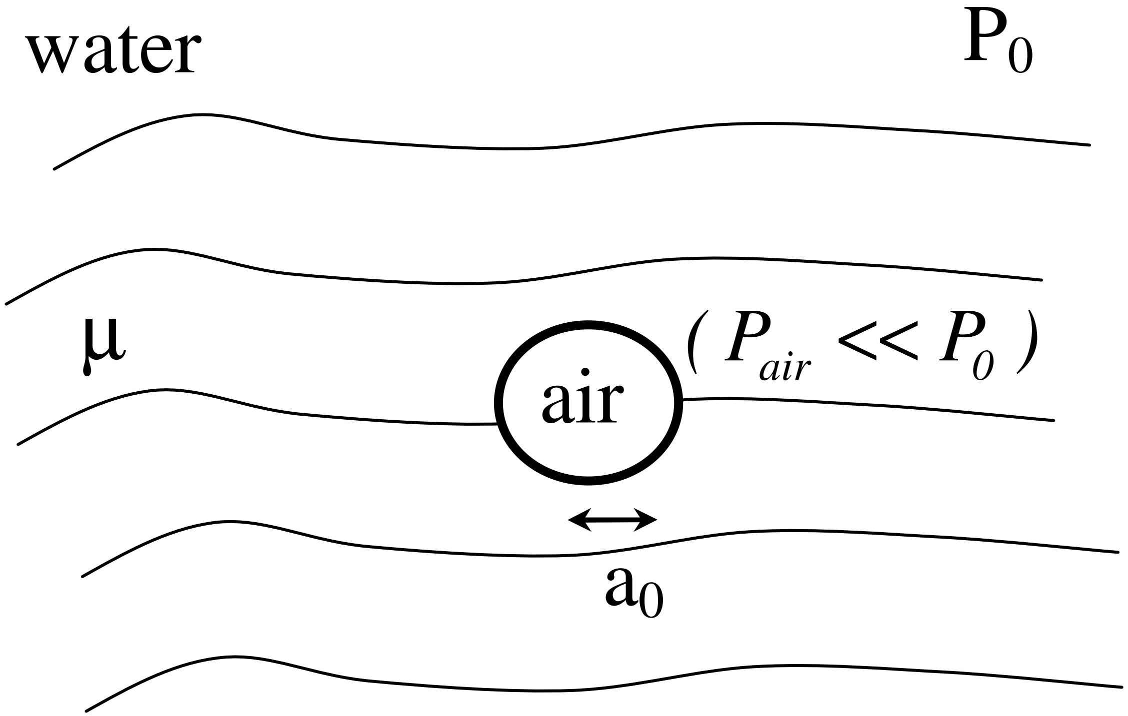
$$\boxed{\tau = k a_0^{\alpha} \mu^{\beta} P_0^{\gamma}}$$

où α, β, γ et k sont des réels, k étant sans dimension.

Déterminer α, β et γ.

Vérifier la pertinence du résultat en étudiant l'influence de a_0, P_0 et μ.

En supposant k = 1, calculer un ordre de grandeur de τ pour a_0 = 1 cm et P_0 = 1 bar.



$$\boxed{\tau = k a_0 \sqrt{\frac{\mu}{P_0}}}$$

Analyse en ordre de grandeur de l'équation de Navier – Stockes :

$$\boxed{\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = -\overrightarrow{grad}P + \mu\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}}$$

(2^{nde} Newton's law applied to a small fluid particle, with a mass μdτ)

Un liquide s'écoule entre deux plaques planes parallèles carrées de côté a (two stationary squared plates, of side a) confondues avec les plans d'équation $z = \pm e/2$ (avec e << a).
The flow is incompressible and stationary. Gravity is negligible.

We assume : $P(x, y, z)$ *et* $\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{u}_x + v_y(x, y, z)\vec{u}_y$

L'ordre de grandeur (the order of magnitude) de la vitesse est V.

L'échelle caractéristique de ses variations selon (Ox) et (Oy) est a.

L'échelle caractéristique de ses variations selon (Oz) est e.

Simplification de l'équation de Navier – Stockes : $\boxed{\eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \overrightarrow{grad}P}$

$$\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = \mu\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(v_x(x,y,z)\vec{u}_x + v_y(x,y,z)\vec{u}_y\right)$$

$$\left\|\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}\right\| \approx 4\mu\frac{V^2}{a}$$

$$\eta\Delta\vec{v} = (\eta\Delta v_x)\vec{u}_x + (\eta\Delta v_y)\vec{u}_y$$

$$\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\| \approx 2\eta\left(2\frac{V}{a^2} + \frac{V}{e^2}\right) \approx 2\eta\frac{V}{e^2} \qquad (e << a)$$

$$\frac{\left\|\mu\,(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}\right\|}{\left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|} \approx \frac{4\mu\frac{V^2}{a}}{2\eta\frac{V}{e^2}} = 2\frac{\mu V}{\eta}\frac{e^2}{a} << 1 \qquad \left(R_e = \frac{\mu V}{\eta}\frac{e^2}{a}, \text{Reynolds number}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad \eta\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} = \overrightarrow{grad}P}$$

(the viscosity term is relevant)

sillages.info Ressources pour l'ouverture sociale et internationale de l'accès aux grandes écoles

I.T.C.

Université de Limoges

Agence Universitaire de la Francophonie