

Mécanique des fluides



I) Etude phénoménologique des fluides :

- 1 – L'état fluide
- 2 – Grandeur moyenne locale, particule fluide
- 3 – Contraintes dans les fluides

II) Champ des vitesses dans un fluide :

- 1 – Description lagrangienne, description eulérienne
- 2 – Champ de vitesse, lignes de courant et trajectoires :
- 3 – Dérivée particulaire du champ des vitesses
- 4 – Equation locale de conservation de la masse et conséquences
- 5 – Cas des écoulements incompressibles
- 6 – Exemple : écoulement autour d'une aile d'avion

III) Equations dynamiques locales des fluides parfaits :

- 1 – Forces volumiques, forces massiques
- 2 – Equation d'Euler, applications
- 3 – Relations de Bernoulli, applications

IV) Ecoulements d'un fluide réel ; viscosité d'un fluide et nombre de Reynolds :

- 1 – Constatations expérimentales
- 2 – Equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible (équation de Navier-Stokes)
- 3 – Exemples de résolution de l'équation de Navier-Stokes
- 4 – Similarité et nombre de Reynolds
- 5 - Interprétation du nombre de Reynolds (ou autre définition)

V) Bilans dynamiques et thermodynamiques :

- 1 – Système ouvert, système fermé
- 2 – Bilans d'énergie interne et d'enthalpie
- 3 – Bilans de quantité de mouvement
- 4 – Bilans de moment cinétique (le tourniquet hydraulique)



Mécanique des fluides



La mécanique des fluides est un sous-ensemble de la mécanique des milieux continus. Elle comprend l'étude des gaz et des liquides à l'équilibre et en mouvement, ainsi que l'étude de l'interaction de ces derniers avec les corps solides. Son importance s'explique par le fondement théorique qu'elle offre à de nombreuses disciplines - la météorologie, l'hydrologie, l'aérodynamique, l'étude des plasmas -, ce qui indique l'ampleur de son champ d'investigation.

La maîtrise de l'eau, comme de l'air, a intéressé les hommes depuis la préhistoire, pour résoudre les problèmes d'irrigation et utiliser la force du vent pour propulser les bateaux. C'est Archimède, au III^{ème} siècle av. J.-C., qui a été le véritable initiateur de la "mécanique des fluides" en énonçant le théorème qui porte son nom. Bien qu'ils ne connussent pas les lois de l'hydraulique, les Romains utilisaient ses applications pour la construction de canaux ouverts pour la distribution d'eau. On l'ignore souvent, mais Léonard de Vinci a laissé des notes relatives aux vagues, aux tourbillons, aux corps flottants, aux écoulements dans des tubes et à la machinerie hydraulique. C'est lui qui a conçu, le premier, un parachute, l'anémomètre (pour mesurer la vitesse des vents) et une pompe centrifuge. Au XVII^{ème} siècle, Pascal, à la suite de travaux sur le développement de méthodes de calcul, a donné un nouvel essor à l'hydraulique en expliquant, entre autres, les expériences de son contemporain Torricelli sur les pompes aspirantes. Ses travaux ont été repris durant les siècles suivants avec, en particulier, les innovations de Pitot (rendement des machines hydrauliques, tube de Pitot) et Venturi (travaux hydrauliques, construction d'une tuyère à cônes divergents). Les théoriciens Bernoulli et Euler ont grandement contribué à la formulation des principes de l'hydrodynamique ; de même, les travaux de Navier, en théorie générale de l'élasticité, et de Barré de Saint-Venant, auteur des premières expériences précises sur l'écoulement des gaz à grande vitesse et d'études théoriques complétées par Stokes, ont fait avancer de manière décisive la mécanique des fluides. Mais il a fallu attendre le XX^{ème} siècle, avec la convergence de connaissances mathématiques et expérimentales et l'utilisation de calculateurs de plus en plus puissants, pour que soient véritablement abordés des problèmes aussi complexes que les écoulements de fluides visqueux dans des tuyaux cylindriques, et que soient expliquées les différences entre les écoulements laminaires - étudiés par Poiseuille au milieu du XIX^{ème} siècle - et turbulents, par les travaux de Reynolds, notamment. Ces domaines d'études, ainsi que les problèmes de couche limite développés par Prandtl ou ceux d'écoulements turbulents traités par Karman, font, aujourd'hui encore, l'objet de recherches poussées.

L'étude des fluides au repos dans un repère donné constitue la statique des fluides. Elle comprend la statique des liquides (ou hydrostatique) et la statique des gaz (ou aérostatique). La dynamique des fluides étudie, pour sa part, les fluides en mouvement. On distingue la dynamique des liquides (ou hydrodynamique) et la dynamique des gaz (ou aérodynamique). En outre, la dynamique des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétiques constitue un domaine à part, que l'on nomme magnétohydrodynamique. Les diverses branches de la mécanique des fluides jouent un grand rôle dans de nombreux domaines, tant dans l'industrie que dans la recherche.

L'hydrodynamique est nécessaire à la compréhension du fonctionnement de nombreux engins (pompes, moteurs, échangeurs de chaleur...) dans lesquels interviennent des écoulements de fluides dans des conduites. Elle est également à la base de la construction navale, de l'hydrologie, de l'océanographie.

L'aérodynamique permet de concevoir avions, fusées, navettes spatiales... Sa connaissance contribue à la diminution de la consommation d'énergie des véhicules, en préconisant pour ceux-ci des formes "aérodynamiques", qui réduisent l'effet de la résistance de l'air à l'avancement. L'aérodynamique est également à la base de la météorologie et de l'étude de l'atmosphère des autres planètes.

La magnétohydrodynamique joue un rôle essentiel en astrophysique (modèles d'étoiles, dynamique de la matière interstellaire). Elle intervient également dans l'étude des gaz ionisés, ou plasmas (décharges électriques dans les gaz, confinement des plasmas par champs magnétiques destiné à la production contrôlée d'énergie par fusion thermonucléaire). Elle a aussi permis de réaliser des prototypes de centrales convertissant directement de l'énergie thermique en énergie électrique (convertisseurs magnétohydrodynamiques).

I) Etude phénoménologique des fluides :

1 – L'état fluide :

Un fluide est un système composé de nombreuses particules libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres. Dans un liquide comme dans un gaz, le mouvement des molécules est désordonné : c'est l'agitation thermique.

D'un point de vue quantitatif, on relève les différences suivantes :

- Dans un liquide, les distances intermoléculaires sont de l'ordre de grandeur des dimensions moléculaires, alors que dans un gaz, elles sont beaucoup plus grandes. Les forces d'interaction entre molécules (forces de Van der Waals en $1/r^7$) jouent un rôle beaucoup plus important dans les liquides que dans les gaz.
- Aux pressions usuelles, la densité particulière des liquides est de l'ordre de 1 000 fois celle des gaz.
- Le coefficient de compressibilité χ d'un gaz est très supérieur à celui d'un liquide : dans la plupart des problèmes, les liquides pourront être considérés comme incompressibles.

Selon la définition élémentaire, un liquide a "un volume propre, mais pas de forme propre", alors qu'un gaz n'a pas de "volume propre mais tend à occuper tout l'espace qui lui est offert". En réalité, la distinction entre liquide et gaz n'est pas toujours évidente : en effet, le passage de la phase gazeuse à la phase liquide peut se faire sans transition (on parle alors de continuité de l'état fluide). Toutefois, dans les conditions normales de pression et de température, la phase liquide et la phase gazeuse se différencient très nettement.

Dans un liquide comme dans un gaz, les molécules sont animées de mouvements désordonnés. Cependant, dans un liquide, les molécules sont distantes les unes des autres d'une longueur correspondant environ à leur taille, alors que dans un gaz les distances entre molécules sont très grandes par rapport à leur dimension. Les forces dites d'interaction moléculaire jouent donc un rôle important dans l'état liquide alors qu'elles n'interviennent que très peu dans l'état gazeux. Le modèle de gaz parfait, qui suppose que les molécules n'interagissent pas entre elles, rend compte assez convenablement des propriétés de la plupart des gaz.

Les liquides et les gaz se distinguent par leur compressibilité. On appelle coefficient de compressibilité le rapport de la diminution relative de volume à l'augmentation de pression, et ce à température constante. Ce paramètre a donc la dimension de l'inverse d'une pression. Les liquides ont des compressibilités très faibles (celle de l'eau, à une température de 20 °C, est de $4,4 \cdot 10^{-10}$), qui varient peu avec la pression et la température. Ainsi, un accroissement de pression de $2 \cdot 10^{15}$ Pa se traduit par une diminution de volume de l'eau égale à un dix millième du volume initial, soit, pour donner un ordre d'idée, $0,1 \text{ cm}^3$ pour 1 L. Pour les gaz, le coefficient de compressibilité varie plus : à une pression voisine de la pression atmosphérique normale, la compressibilité de l'air est 20 000 fois plus grande que celle de l'eau.

Admettre qu'un fluide est incompressible revient à dire que sa masse volumique est constante. Le plus souvent, les liquides sont considérés comme des fluides incompressibles. En revanche, l'étude d'un gaz demande de prendre en compte sa compressibilité ; il existe cependant des conditions dans lesquelles un écoulement gazeux peut être assimilé à un écoulement incompressible (lorsque la vitesse de l'écoulement est très petite par rapport à celle du son).

2 – Grandeur moyenne locale, particule fluide :

Une particule de fluide est un élément de volume de fluide de dimension mésoscopique (de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}^3$). Le vecteur vitesse de cette particule est la moyenne statistique des vecteurs vitesses des molécules qui la constituent. Le mouvement du fluide dans un référentiel (R) est alors décrit par l'ensemble des vecteurs vitesses de ses particules.

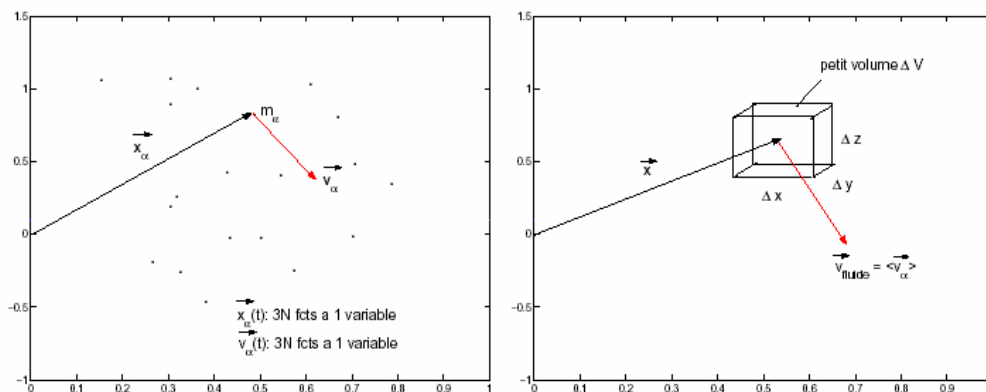
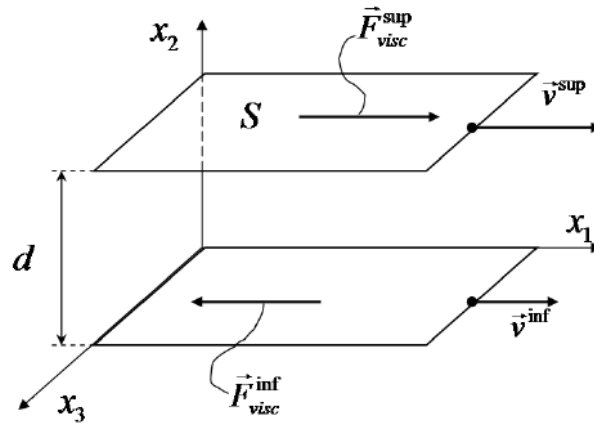


Figure 1: Du monde des particules (à gauche) au monde fluide (à droite).

3 – Contraintes dans les fluides :

Les diverses couches d'un fluide en mouvement ne peuvent pas glisser librement les unes sur les autres : tout se passe comme si des frottements au sein du fluide s'opposaient aux mouvements relatifs des lignes de courant voisines. Cette résistance au glissement ou à la déformation caractérise la viscosité d'un fluide ; elle est la propriété inverse de la fluidité. Cette viscosité, dite dynamique, s'exprime comme le quotient d'une masse par une vitesse (l'unité est le poiseuille) ; en règle générale, elle dépend fortement de la température - celle des liquides diminue avec la température, alors que celle des gaz croît - et elle se révèle très peu sensible à la pression. On mesure la viscosité dynamique d'un fluide, généralement liquide, à l'aide d'un viscosimètre. Le principe consiste en une comparaison entre le temps mis par le fluide pour s'écouler dans un tuyau vertical sur une distance donnée et celui mis par un fluide de référence (l'eau par exemple). Connaissant la densité des deux fluides, on en déduit la viscosité.

On appelle fluide non visqueux, ou fluide parfait, un fluide dont l'écoulement se fait "sans frottements internes " d'aucune sorte. Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci. Une des caractéristiques principales de la mécanique des fluides apparaît ici : pour représenter des faits ou des observations, elle fait appel à des modèles, dont le degré de raffinement est variable. En raison de l'extrême complexité des phénomènes qu'elle tente de décrire, elle ne peut se passer de tests expérimentaux (réalisation de maquettes, testées dans un bassin, qui serviront à la conception des navires ; essais en soufflerie pour la construction aéronautique, etc.).



Fluide entre deux plaques parallèles en mouvement uniforme.

On résume tout ceci dans l'expression de la force (appliquée *sur* le fluide):

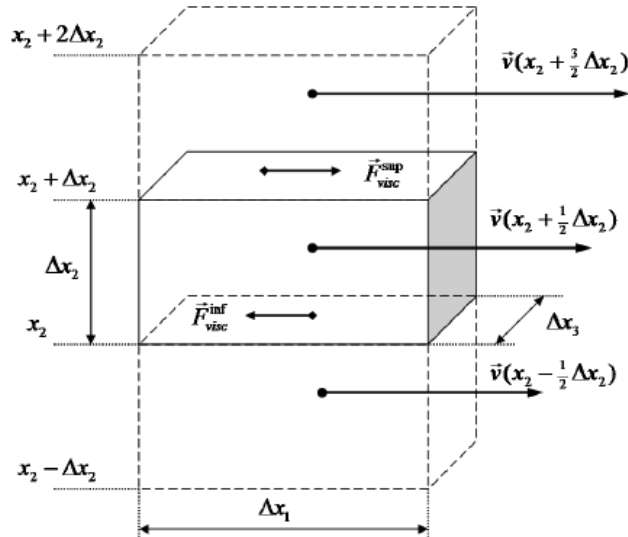
$$\vec{F}_{visc}^{sup} = \eta \frac{S(\vec{v}^{sup} - \vec{v}^{inf})}{d},$$

où η ("eta") est appelé **coefficient de viscosité**. Il a pour unité $kg\,m^{-1}s^{-1}$, appelée "Poiseuille". En faisant la limite $d \rightarrow 0$, on obtient:

$$\vec{F}_{visc}^{sup} = \eta S \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \vec{e}_1. \quad (66)$$

L'unité pour le coefficient de viscosité est le poiseuille (symbole Pl). Quelques exemples :

Corps pur	Eau	Air	Glycérine
Viscosité	$1,0 \cdot 10^{-3}$ Pl	$1,0 \cdot 10^{-5}$ Pl	1,4 Pl



Forces de viscosité s'exerçant sur une particule fluide.

Autre démonstration (équivalent volumique des forces de viscosité) :

On considère un « pavé » de fluide de volume $dx \cdot dy \cdot dz$. On suppose que le champ des vitesses peut encore s'écrire sous la forme :

$$\vec{v} = v(y, t) \vec{u}_x$$

Pour un tel champ, les forces de viscosité sont portées par l'axe (Ox) et seules les faces y et y + dy sont concernées. On peut écrire, en appliquant le principe de l'action et de la réaction :

$$d\vec{F}_{vis} = d\vec{F}_{vis}(y + dy) + d\vec{F}_{vis}(y) = \eta \frac{\partial v(y + dy, t)}{\partial y} dx dz \vec{u}_x - \eta \frac{\partial v(y, t)}{\partial y} dx dz \vec{u}_x$$

Soit :

$$d\vec{F}_{vis} = \eta \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} dx dy dz \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad \vec{f}_{vis} = \frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

Pour un champ des vitesses quelconque, ce résultat se généralise sous la forme :

$$\vec{f}_{vis} = \frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta \Delta \vec{v}$$

Remarque : $\vec{f}_{vis}$ est la densité volumique des forces de viscosité ; elle n'est qu'un équivalent mathématique car ces forces ne s'appliquent qu'à la surface d'un système.

II) Champ des vitesses dans un fluide :

1 – Description lagrangienne, description eulérienne :

- Description lagrangienne :

A un instant initial t_0 , on découpe le fluide en particules de fluides élémentaires centrées sur un ensemble de points courants M_0 et on suit le mouvement de ces particules au cours du temps dans le référentiel (R). A un instant t, on peut ainsi définir le vecteur vitesse $\vec{v}(M_0, t)$ de la

particule qui était en M_0 à l'instant t_0 . On définit naturellement la trajectoire d'une particule de fluide, lieu des positions successives de cette particule au cours du temps.

Dans ce point de vue, un observateur est lié à chaque particule de fluide. Ce type de description est utile lorsqu'on veut étudier les phénomènes d'advection de contaminants, comme des éléments radioactifs disséminés dans des écoulements et qui suivent les trajectoires des particules de fluides.

En guise d'illustration, un policier qui veut vérifier qu'une voiture particulière ne commet pas d'excès de vitesse choisira de suivre cette voiture et d'en mesurer la vitesse avec un radar embarqué. Si le policier est plutôt préoccupé par le respect de la limitation de vitesse à un carrefour dangereux, il y posera son radar et contrôlera la vitesse de toutes les voitures qui passeront à cet endroit : c'est l'approche eulérienne d'un écoulement.

- Description eulérienne :

Plutôt que de décrire la vitesse d'une particule de fluide, ce qui fournit des caractéristiques de l'écoulement en fonction mais jamais aux mêmes endroits (la position de la particule ne cesse de varier), la description eulérienne consiste à étudier le mouvement du fluide à des endroits fixes. Il existe de nombreuses techniques expérimentales permettant de mesurer la vitesse d'un fluide en une position donnée (comme le « fil chaud » qui permet d'obtenir la vitesse du fluide en mesurant le refroidissement d'un fil chauffé, ou l'anémomètre constitué d'une hélice dont la vitesse de rotation donne la vitesse du vent, ...). Ainsi, on peut suivre l'évolution temporelle de la vitesse en un point M fixe : on obtient la vitesse de la particule de fluide qui se trouve en M à l'instant t de la mesure ; il s'agit donc à chaque fois d'une particule différente.

La description eulérienne est particulièrement adaptée dans le cas des écoulements stationnaires. Un écoulement stationnaire (ou écoulement en régime permanent) est un écoulement pour lequel la vitesse en tout point M est indépendante du temps :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M) = \vec{0}$$

Dans un écoulement stationnaire, la vitesse est constante en tout point fixe mais la vitesse des particules de fluide varie sauf exception toujours avec le temps. Ainsi, un écoulement stationnaire eulérien n'est pas un écoulement stationnaire lagrangien.

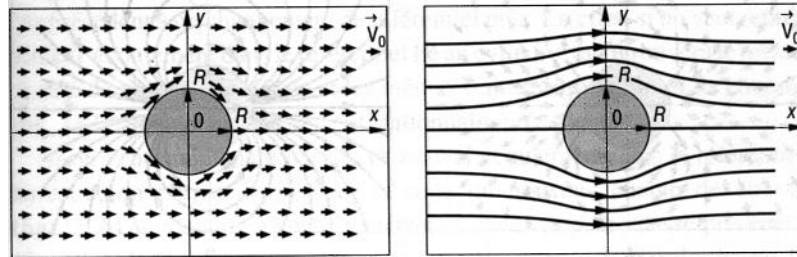
Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel choisi. Prenons le cas du sillage d'un canard à la surface d'une rivière : ce sillage, qui donne l'impression de suivre le canard est stationnaire dans le référentiel lié au canard mais n'est pas stationnaire dans le référentiel lié à la berge.

2 – Champ de vitesse, lignes de courant et trajectoires :

La carte du champ des vitesses donne une représentation graphique d'un écoulement. Cette carte est le tracé du vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ en tout point M à un instant donné t . A titre d'exemple, on considère l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe, de rayon R , infini dans la direction (Oz) perpendiculaire au plan de la feuille, d'un fluide parfait (viscosité nulle) ayant une vitesse uniforme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ loin du cylindre. Le calcul du vecteur vitesse $\vec{v}(x, y) = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ conduit à :

$$v_x = \left[1 + \frac{(y^2 - x^2) R^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] v_0 \quad ; \quad v_y = -2 \frac{xy R^2}{(x^2 + y^2)^2} v_0$$

Une représentation de l'écoulement souvent utilisée est celle des lignes de courants : ces lignes sont les courbes tangentes au vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ en chacun de leurs points M , à l'instant considéré. L'équation d'une ligne de courant (comparable à une ligne de champ en électrostatique) s'obtient en écrivant que tout vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long de la ligne est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$, soit $\vec{v}(M,t) \wedge d\vec{r} = \vec{0}$.



Cylindre fixe : champ des vitesses (à gauche) et lignes de courants (à droite), confondues avec les trajectoires des particules de fluide.

Dans le cadre de la description lagrangienne, on obtient directement les trajectoires des particules de fluide ; expérimentalement, on obtient ces trajectoires en suivant le déplacement de traceurs. Mathématiquement, une trajectoire s'obtient par l'intégration (avec des CI : M_0 et t_0) de l'équation $d\vec{r} = \vec{v}(M,t) dt$.

On peut remarquer que cette équation implique $d\vec{r} \wedge \vec{v}(M,t) = \vec{0}$. Dans le cas des écoulements stationnaires, $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(M)$ et cette relation donne également la forme des lignes de courant.

En conclusion : **trajectoires et lignes de courant sont identiques pour les écoulements stationnaires.** (c'est le cas dans la figure précédente).

3 – Dérivée particulaire du champ des vitesses :

Comment calculer l'accélération d'une particule de fluide ? La différentielle de la vitesse d'une particule de fluide (toujours la même) vaut :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

Pendant l'intervalle de temps dt , la particule de fluide s'est déplacée de :

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

D'où :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z dt$$

Et l'accélération de la particule de fluide devient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

Soit encore :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

En toute rigueur, $\vec{v}$ dans le membre de gauche désigne la vitesse de la particule fluide (et d/dt est appelée dérivée particulaire, encore notée D/Dt) alors que dans les autres termes, $\vec{v}$ désigne

le champ des vitesses dans tout le fluide. Enfin, le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ permet de rendre compte que, même dans un écoulement stationnaire (dans le sens eulérien du terme), aux variations spatiales de la vitesse correspondent des accélérations pour les particules.

Généralisation :

« La dérivée particulière d'une grandeur vectorielle $\vec{G}$ est donnée par :

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G}$$

Cette dérivée particulière se décompose en deux termes :

* $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G}$: la dérivée convective, qui indique un caractère non uniforme de $\vec{G}$.

* $\frac{\partial \vec{G}}{\partial t}$: la dérivée locale, qui indique un caractère non permanent de $\vec{G}$.

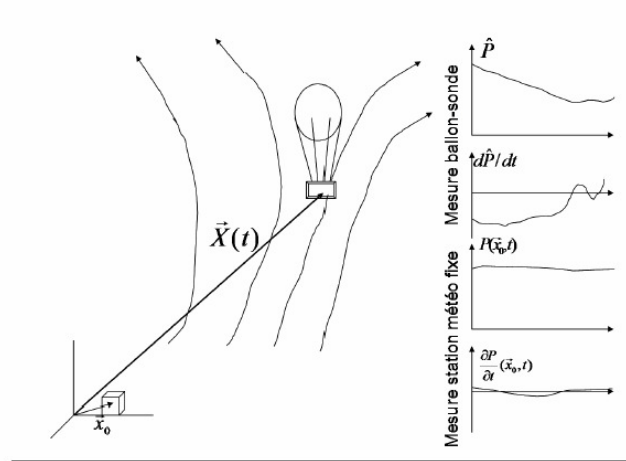


Figure 5: Pression mesurée par une station météo fixe, $P(\vec{x} = \vec{x}_0, t)$, pression mesurée par un ballon-sonde emporté par le vent, $\hat{P}(t) = P(\vec{x} = \vec{X}(t), t)$, et leurs variations temporelles respectives, $\frac{\partial P}{\partial t} \neq \frac{dP}{dt}$.

Remarque : on peut montrer que (se placer en coordonnées cartésiennes) :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

On définit alors le vecteur tourbillon par :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$$

Un écoulement est dit non tourbillonnaire (ou irrotationnel) si le vecteur tourbillon est nul en tout point. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit tourbillonnaire.

Il ne faut pas confondre turbulences et tourbillons. Un champ de la forme $\vec{v} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_\theta$ est tourbillonnaire (comme on peut le vérifier en coordonnées cylindriques), mais il ne s'agit pas d'une turbulence. La fonction mathématique qui le décrit est « simple ». En pratique, les turbulences sont constituées de tourbillons de taille et de forme variables, qui se font et se défont constamment.

4 – Equation locale de conservation de la masse et conséquences :

a) Débit volumique, débit massique :

On appelle débit volumique D_v à travers une surface (S) orientée, le volume de fluide qui traverse (S) par unité de temps, compté positivement dans le sens du vecteur normal à la surface et négativement dans le cas contraire.

Ce débit vaut :

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

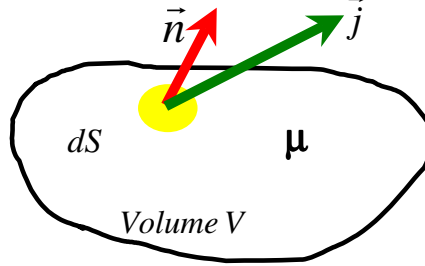
Le débit massique D_m correspond à la masse de fluide qui traverse (S) par unité de temps, compté positivement dans le sens du vecteur normal à la surface et négativement dans le cas contraire :

$$D_m = \iint_{(S)} \mu \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

avec $\vec{j} = \mu \vec{v}$ (vecteur densité de courant ou vecteur densité de flux de masse de l'écoulement).

b) Equation locale de conservation de la masse :

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).



Soit μ la masse volumique du fluide. La masse totale $M(t)$ comprise dans le volume à l'instant t vaut : $M(t) = \iiint_{(V)} \mu \, d\tau$

La conservation de la masse permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \mu(M, t) \, d\tau \right) = - \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \mu(M, t) \, d\tau \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} \, d\tau$$

Finalement, le principe de conservation de la masse conduit à $\iiint_{(V)} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} \, d\tau = - \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} \, d\tau = - \iiint_{(V)} \text{div} \vec{j} \, d\tau \quad \text{soit} \quad \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right) \, d\tau = 0$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V), il vient :

$$\frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

C'est l'équation locale de conservation de la masse.

Conséquences pour les écoulements stationnaires : le flux de $\vec{j}$ est conservatif ($\text{div} \vec{j} = 0$).

5 – Cas des écoulements incompressibles :

On peut écrire l'équation locale de conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu = 0$$

Soit, en faisant apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique :

$$\mu \text{div}(\vec{v}) + \frac{D\mu}{Dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt}$$

Soit une particule de fluide située au point M à l'instant t et m sa masse. Soient V(t) et V(t + dt) son volume aux instants t et t + dt. Alors, avec $\mu = m/V$:

$$\text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt} = -\frac{V}{m} \frac{D}{Dt} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{V(t+dt) - V(t)}{V(t) dt}$$

On voit ainsi l'interprétation de $\text{div}(\vec{v})$: c'est une mesure en chaque point du taux d'accroissement relatif du volume de la particule de fluide au cours du temps.

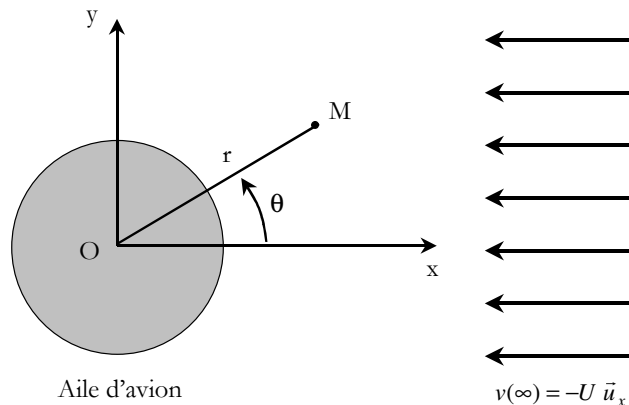
Pour un écoulement incompressible, $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ et ainsi $\text{div}(\vec{v}) = 0$. On en déduit que le débit volumique se conserve dans un tube de champ et donc concrètement dans une canalisation. En particulier, si la vitesse est constante sur une section de la canalisation : $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Ainsi, lorsque les lignes de champ d'un écoulement se resserrent, la norme du vecteur vitesse augmente.

6 – Exemple : écoulement autour d'une aile d'avion :

On considère une aile d'avion cylindrique d'axe horizontal (Oz) et de rayon R, en mouvement rectiligne uniforme à vitesse $U \vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre (R_0). Loin de l'aile, l'air est au repos et la pression est constante (notée P_∞).

Il est commode pour exprimer les conditions aux limites sur l'aile de traiter le problème dans le référentiel (R) lié à l'avion, où l'on note $\vec{v}$ le champ eulérien des vitesses. Loin de l'aile, la loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{v}(\infty) = v_0(\infty) - \vec{v}_e = \vec{0} - U \vec{u}_x = -U \vec{u}_x$$



Hypothèses :

- L'écoulement est stationnaire.
- L'écoulement est incompressible ; ce choix est convenable bien que l'air soit un fluide compressible si l'on suppose que l'avion est subsonique.
- L'écoulement est irrotationnel.
- L'écoulement est plan et invariant par translation le long de l'axe de l'aile (on néglige les effets de bords) et on écrit $\vec{v}(M) = v_r(r, \theta) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$.

Recherche du champ des vitesses :

L'écoulement étant irrotationnel ($\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0}$), il existe un potentiel des vitesses Φ tel que :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad} \Phi$$

L'écoulement étant incompressible, $div \vec{v} = 0$, soit $\Delta \Phi = 0$: le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace. Etant donné l'invariance par translation selon (Oz), le potentiel des vitesses est de la forme $\Phi(r, \theta)$. La solution générale de l'équation de Laplace est dans ce cas :

$$\Phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin(n\theta)$$

où les $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n sont des constantes quelconques. On reconnaît dans cette expression un développement en série de Fourier du potentiel des vitesses à r fixé.

Le problème étant symétrique par rapport au plan médiateur de l'aile $y = 0$, ce développement est pair en θ et les termes en sinus sont nuls :

$$\Phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta)$$

A l'infini, $\vec{v} = -U \vec{u}_x = \overrightarrow{grad}(-Ux) = \overrightarrow{grad}(-Ur \cos \theta)$, soit $\Phi = -Ur \cos \theta$. On en déduit :

$$\alpha_1 = -U \quad ; \quad \beta_0 = 0 \quad ; \quad \alpha_n = 0 \quad (\text{pour tout } n \neq 1)$$

Ainsi :

$$\Phi(r, \theta) = -Ur \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n r^{-n}) \cos(n\theta)$$

Sur l'aile, la coordonnée normale (la vitesse radiale) de la vitesse doit s'annuler :

$$v_r(R, \theta) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{(R, \theta)} = 0$$

Or :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -U \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (-n \beta_n r^{-n-1}) \cos(n\theta)$$

Par conséquent :

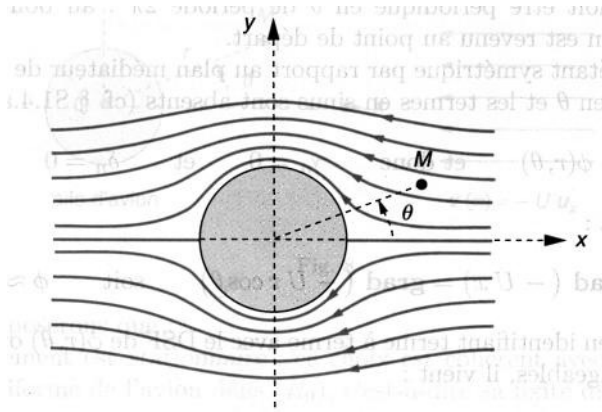
$$-\left(U + \frac{\beta_1}{R^2} \right) \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} n \beta_n R^{-n-1} \cos(n\theta) = 0$$

D'où :

$$\beta_1 = -UR^2 \quad \text{et} \quad \beta_{n>2} = 0$$

Finalement :

$$\Phi(r, \theta) = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$$



On en déduit les coordonnées du champ des vitesses :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad ; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

III) Equations dynamiques locales des fluides parfaits :

1 – Forces volumiques, forces massiques :

Dans l'hypothèse du fluide parfait, on néglige les forces de viscosité. Un élément de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm est soumis à des forces de représentation massique ou volumique selon l'expression :

$$d\vec{f} = \vec{f}_m dm = \vec{f}_v d\tau \quad (\text{avec : } \vec{f}_v = \mu \vec{f}_m)$$

Exemples :

- Forces de pesanteur :

$$\vec{f}_m = \vec{g} \quad ; \quad \vec{f}_v = \mu \vec{g}$$

- Forces de pression :

$$d\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}P} d\tau \quad ; \quad \vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}P} \quad ; \quad \vec{f}_m = -\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}P}$$

2 – Equation d'Euler, applications :

Dans un référentiel galiléen (R), la relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse dm dont on suit le mouvement et soumise aux forces $d\vec{F}$ s'écrit :

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}$$

Or :

- $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$
- $d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau + \vec{f}_v d\tau$
- $dm = \mu d\tau$

D'où l'équation d'Euler :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v$$

Ou encore :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v$$

Applications :

- Exemple des écoulements géostrophiques :
- Oscillations d'un fluide dans un tube en U :

3 – Relations de Bernoulli, applications :

On suppose dans la suite que la seule force volumique (autre que les forces de pression) est le poids).

- Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène :

L'équation d'Euler devient :

$$\mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g}$$

En notant $\mu \vec{g} = -\mu \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$ (l'axe (Oz) est orienté vers le haut), alors :

$$\mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P - \mu \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

D'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P \right) = \vec{0}$$

Un champ scalaire dont le gradient est nul est indépendant du point M ; c'est une fonction du temps uniquement f(t). Comme l'écoulement est stationnaire, cette fonction est constante :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz + P = C \quad (\text{Théorème de Bernoulli})$$

Ainsi, le théorème de Bernoulli affirme que la quantité $\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz + P$ reste en tout point égale à une même constante.

Remarque : dans le CP où $v = 0$, on retrouve la relation fondamentale de l'hydrostatique des fluides ($\mu gz + P = C$).

- Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène :

On renonce à l'hypothèse « irrotationnel ». Alors :

$$\mu (\overrightarrow{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}) = -\overrightarrow{grad} \left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P \right)$$

Afin d'éliminer le terme en rotationnel, on multiplie scalairement par $d\vec{r}$ et on intègre le long d'une ligne de courant entre deux points A et B :

$$\int_A^B \mu (\overrightarrow{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \overrightarrow{grad} \left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P \right) \cdot d\vec{r}$$

En tout point, $d\vec{r}$ est parallèle au champ des vitesses : le terme $(\overrightarrow{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{r}$ est donc nul. Ainsi :

$$\int_A^B \overrightarrow{grad} \left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P \right) \cdot d\vec{r} = 0$$

Soit :

$$\frac{1}{2} \mu v_A^2 + \mu gz_A + P_A = \frac{1}{2} \mu v_B^2 + \mu gz_B + P_B$$

Ainsi, l'abandon de l'hypothèse « irrotationnel » restreint le théorème de Bernoulli aux points A et B d'une même ligne de courant.

- Cas d'un écoulement parfait, non stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène :

L'équation d'Euler devient :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{grad} P - \mu \overrightarrow{grad} (gz)$$

Soit :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + P + \mu gz \right)$$

Comme $\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0}$, on peut définir un potentiel des vitesses tel que $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \Phi$. Alors, avec :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{grad} \Phi) = \overrightarrow{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

Il vient :

$$\overrightarrow{grad} \left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu v^2 + P + \mu gz \right) = 0$$

Soit une généralisation du théorème de Bernoulli dans le cas non stationnaire :

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu v^2 + P + \mu gz = f(t) \quad (\text{fonction du temps uniquement})$$

- Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli :

On se place dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène. Alors :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz + P = C$$

En multipliant par le volume $d\tau$ d'une particule de fluide :

$$\frac{1}{2} \mu d\tau v^2 + \mu d\tau gz + P d\tau = Cste$$

On reconnaît :

- $\mu d\tau gz$: énergie potentielle de pesanteur de la particule de fluide.
- $\frac{1}{2} \mu d\tau v^2$: énergie cinétique de la particule de fluide.
- $P d\tau$: énergie potentielle associée aux forces de pression.

Le théorème de Bernoulli, plus général que la simple conservation de l'énergie mécanique d'un point matériel dans un milieu non continu, est un cas particulier du 1^{er} principe :

$$d(U + E_{c,macro} + E_{p,macro}) = -P d\tau + \delta Q$$

Avec $dU = \delta Q = 0$: les hypothèses implicites de l'application du théorème de Bernoulli sont les aspects isothermes et adiabatiques de l'évolution. En effet, pour un fluide parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température ; par ailleurs, l'aspect adiabatique de la transformation ne pose pas de problème particulier ; en l'absence de transfert thermique en provenance de l'extérieur du fluide, il n'y a pas de production de chaleur au sein même d'un fluide non visqueux.

Applications :

- Ecoulement permanent et lent d'un fluide compressible :

Peut-on appliquer le théorème de Bernoulli sous sa forme la plus simple à un fluide compressible comme l'air ? On rappelle la définition du coefficient de compressibilité :

$$\chi = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP}$$

On suppose qu'il est possible de négliger les variations de μ pour un écoulement permanent où la vitesse varie entre 0 et v_{max} . D'après le théorème de Bernoulli, la pression varierait entre P_{min} et P_{max} avec :

$$P_{max} = P_{min} + \Delta P = P_{min} + \mu \frac{v_{max}^2}{2}$$

Une telle variation de pression est compatible avec l'hypothèse si la variation de μ qui lui est liée est faible en valeur relative, soit si :

$$\Delta\mu \approx \chi \mu \Delta P \ll \mu \quad \text{soit} \quad v_{max}^2 \ll \frac{2}{\chi \mu}$$

Or, $c = \sqrt{\frac{1}{\mu\chi}}$ correspond à l'ordre de grandeur de la vitesse du son dans le fluide, par conséquent :

$$v_{\max} \ll c$$

Il est donc possible d'appliquer la relation de Bernoulli la plus simple :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz + P = C$$

à un fluide compressible, dans la mesure où la vitesse d'écoulement reste très inférieure à la vitesse de propagation du son dans ce fluide.

- Jet homocinétique à l'air libre :

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible sous forme :

- * d'un jet libre, c'est-à-dire sans aucun contact avec une surface rigide ou un autre fluide ;
- * de vitesse constante $\vec{v} = v \vec{u}_x$.

Ce jet est dit homocinétique.

On suppose que les seules forces intervenant sont les forces de pression ; la relation de Bernoulli s'écrit, dans tout le jet :

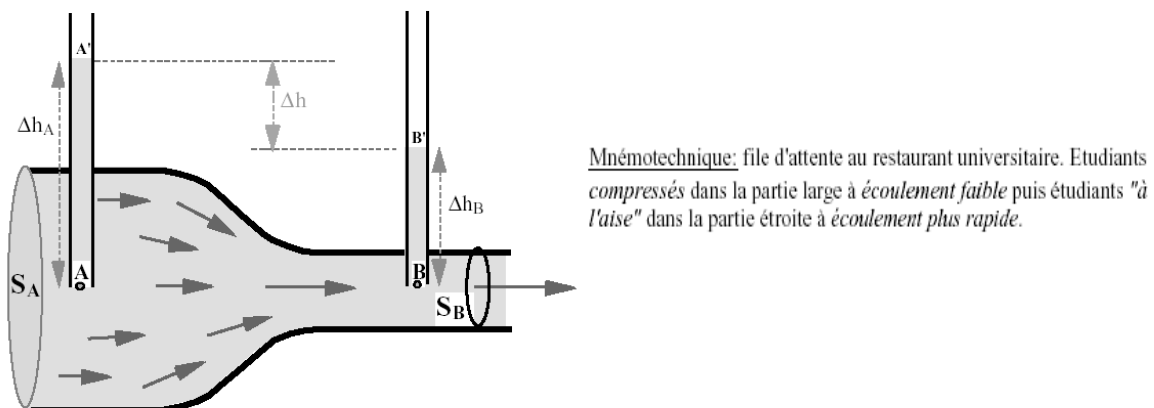
$$\frac{1}{2} \mu v^2 + P = cste$$

La vitesse étant la même en tout point du jet, il en est de même de la pression. Aux bords du jet, au contact de l'atmosphère, la pression vaut P_0 . C'est donc la pression en tout point du jet.

« Dans un jet homocinétique à l'air libre, la pression est uniforme et égale à celle existant dans le milieu extérieur. On admettra ce résultat pour tout jet à l'air libre. »

- Le phénomène de Venturi :

Un écoulement stationnaire homogène incompressible, soumis aux seules forces de pression, est limité par une conduite de section variable. Le problème est unidimensionnel : toutes les grandeurs ont une valeur uniforme sur une section droite de la conduite.



La conservation du débit volumique entre les deux sections d'aires S_A et S_B donne :

$$v_A S_A = v_B S_B \quad \text{soit} \quad v_A < v_B$$

L'application du théorème de Bernoulli entre deux points A et B situés sur une même horizontale donne :

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_B$$

On en déduit que $P_A > P_B$: les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont aussi des régions de basse pression (effet Venturi).

Dans les tubes verticaux, le fluide est immobile et les hauteurs de liquide mesurent les pressions P_A et P_B :

$$P_A = P_{atm} + \rho g h_A \quad \text{et} \quad P_B = P_{atm} + \rho g h_B$$

On en déduit la différence de pression :

$$P_A - P_B = \rho g (h_A - h_B)$$

On peut ensuite en déduire le débit volumique dans le conduit, en calculant préalablement v_A :

$$v_A^2 - v_B^2 = v_A^2 - \left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 v_A^2 = -\rho g (h_A - h_B) \quad \text{d'où} \quad v_A = \sqrt{\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} \rho g (h_A - h_B)}$$

Et le débit D_v vaut :

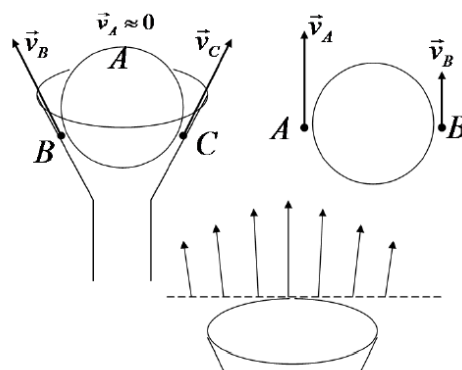
$$D_v = S_A v_A = S_A \sqrt{\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} \rho g (h_A - h_B)}$$

Le tube de Venturi peut ainsi servir de débitmètre.

Remarque : l'effet Venturi reste bien vérifié par un gaz compressible comme l'air, tant que sa vitesse reste inférieure à la vitesse de propagation du son.

Autre conséquence de l'effet Venturi (balle de ping-pong dans un flux d'air) :

Dans le cas où la balle est tout près de l'entonnoir, la vitesse de l'air au voisinage des points proches (B et C sur la Figure 13) est supérieure à la vitesse au sommet de la balle (p.ex. point A). Par Bernoulli, la pression en B et C est inférieure à la pression en A. La résultante des forces de pression sera dirigée vers le bas, et aura donc tendance à "plaquer" la balle contre l'entonnoir.



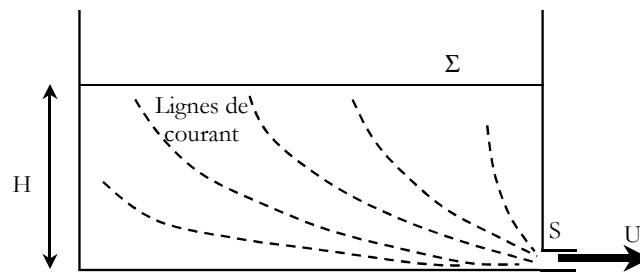
Balle de ping-pong dans un jet d'air.

Dans le cas où la balle est loin de l'entonnoir, il y a un profil des vitesses: la vitesse de l'écoulement est plus élevée au centre du jet d'air qu'aux bords, et donc si la balle est décentrée par rapport au jet d'air, la pression du côté du centre (A) est plus faible que du côté du bord (B). La résultante des forces de pression est dirigée de B vers A, donc aura tendance à ramener la balle au centre du jet d'air. Elle agit comme une force de rappel. La balle semble attirée par les régions de l'écoulement où la vitesse est la plus rapide.

Autre conséquence de l'effet Venturi (effet de sol pour un véhicule de compétition) :

- Vidange d'un réservoir ; formule de Torricelli (voir également l'exercice n°23) :

En étudiant l'écoulement de l'eau par un orifice de surface S percé dans le bas d'une cuve, Torricelli observa que le jet sortait perpendiculairement à la surface S , avec un débit $D_v(t)$ proportionnel à S et à la racine carrée de la hauteur d'eau $H(t)$ dans la cuve.



Comment interpréter ce résultat ? La conservation du débit donne :

$$D_v(t) = SU(t) = -\Sigma \frac{dH}{dt}$$

où $U(t)$ est la vitesse de sortie dans le jet et Σ la section de la cuve. Comme $S \ll \Sigma$, on en déduit que $\left| \frac{dH}{dt} \right| \ll U$: on peut se placer en régime quasi-stationnaire en supposant $H \approx cste$ et utiliser la relation de Bernoulli en régime stationnaire.

On se place sur une ligne de courant (voir figure). Le jet d'eau étant à l'air libre, sa pression est celle du gaz qui l'entoure, c'est-à-dire la pression atmosphérique P_0 . Il en est de même pour la surface libre dans la cuve. Le théorème de Bernoulli donne alors :

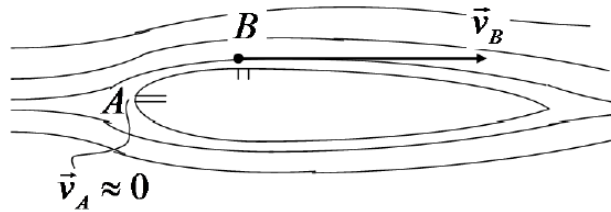
$$P_0 + \mu g H = P_0 + \frac{1}{2} \mu U^2$$

Par conséquent : $U = \sqrt{2gH}$.

On obtient une loi analogue à la loi de la chute libre dans le champ de pesanteur. Ensuite, le jet suit une loi de chute libre avec la vitesse U horizontale, d'où la forme parabolique du jet.

- Le tube de Pitot :

On place un obstacle dans un écoulement d'air (voir Figure 14). On mesure la pression en un point A situé face à l'écoulement et en un point B situé sur le côté (B). De Bernoulli, négligeant $\rho g z$, on a



Tube de Pitot pour la mesure de la vitesse d'un écoulement.

$$\rho \frac{v_A^2}{2} + P_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B$$

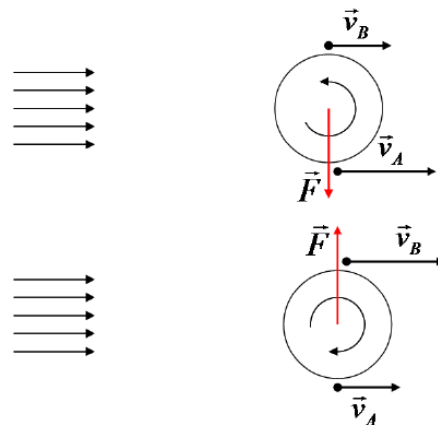
Or, la vitesse en A est nulle, et donc on obtient

$$v_B = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}$$

Ainsi, la mesure statique de la différence de pressions ($P_A - P_B$) permet d'accéder à la mesure de la vitesse au point B.

- Effet Magnus et application aux effets dans les balles de tennis et les ballons de foot :

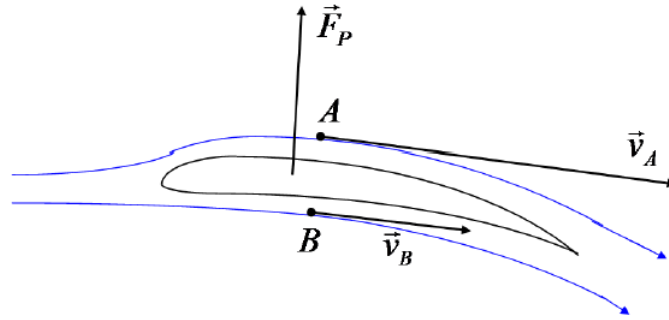
Cas du dessin du haut (effet lifté) : en B, la vitesse est inférieure à la vitesse en A (le point B « lutte » contre le fluide) ; par conséquent, d'après le théorème de Bernoulli, $P_B > P_A$. Il apparaît ainsi une résultante des forces de pression verticale et dirigée vers le bas. C'est l'effet Magnus. La balle va descendre plus rapidement qu'en l'absence d'effet.



Dessin du haut : lift – Dessin du bas : slice
(attention, les figures sont tracées dans le référentiel barycentrique de la balle).

Dans le cas de l'effet slicé, c'est le contraire : la force résultante est vers le haut et la balle aura tendance à aller plus loin qu'en l'absence d'effet.

- Portance des avions :



Force de portance d'une aile.

$$\vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_y \vec{e}_y \quad (64)$$

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_x \vec{e}_x \quad (65)$$

IV) Ecoulements d'un fluide réel ; viscosité d'un fluide et nombre de Reynolds :

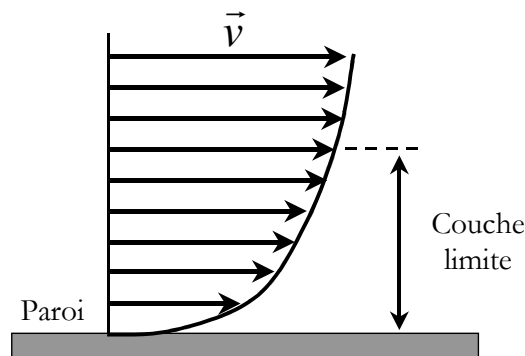
1 – Constatations expérimentales :

Complément sur la couche limite :

Dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de condition aux limites particulière pour la vitesse tangentielle d'une particule de fluide sur une paroi solide : elle peut, en particulier, être différente de 0 (la composante normale sera toujours nulle).

- Pour un fluide visqueux, on prendra toujours au contact d'un solide :

$$\vec{v}_{\text{tan}}(\text{fluide} / \text{paroi}) = \vec{0} \quad (\text{Vitesse tangentielle})$$

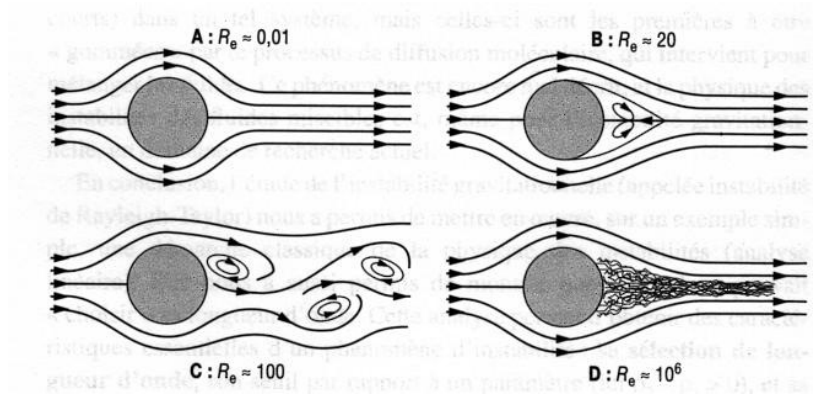


- Finalement, la différence essentielle entre fluide parfait et fluide visqueux apparaît dans l'existence de « couches limites » (plus ou moins épaisses) au contact des parois solides. A l'intérieur de ces couches, la vitesse tangentielle d'un fluide visqueux passe progressivement d'une valeur nulle (sur la paroi) à une valeur prédite de manière acceptable par le modèle du fluide parfait.

En fonction de la portion de paroi considérée, ces couches limites peuvent être laminaires ou turbulentes, avec des transitions de l'une à l'autre en des points particuliers. L'importance de la traînée dépend fortement de la structure de la couche limite.

Écoulement laminaire et écoulement turbulent :

Lorsque le vecteur vitesse d'un écoulement $\vec{v}(r,t)$ varie erratiquement (d'un point à l'autre à t fixé, ou en un point donné en fonction du temps), on dit que l'écoulement est turbulent.



Exemples d'écoulements laminaires et turbulents.

Dans le cas contraire, l'écoulement est qualifié de laminaire : il peut être décrit comme un ensemble de lames ou de couches glissant les unes sur les autres.

2 – Equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible (équation de Navier-Stokes) :

En écrivant $m\vec{a} = \vec{F}$ pour une particule fluide, en procédant de même qu'à la section 3.1, en rajoutant, par rapport au cas du fluide parfait, (Eq.(45)), la force de viscosité par unité de volume, on obtient:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}, \forall \vec{x}, \forall t. \quad (71)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes incompressible. On a aussi les équations

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (72)$$

$$\rho = \text{const}. \quad (73)$$

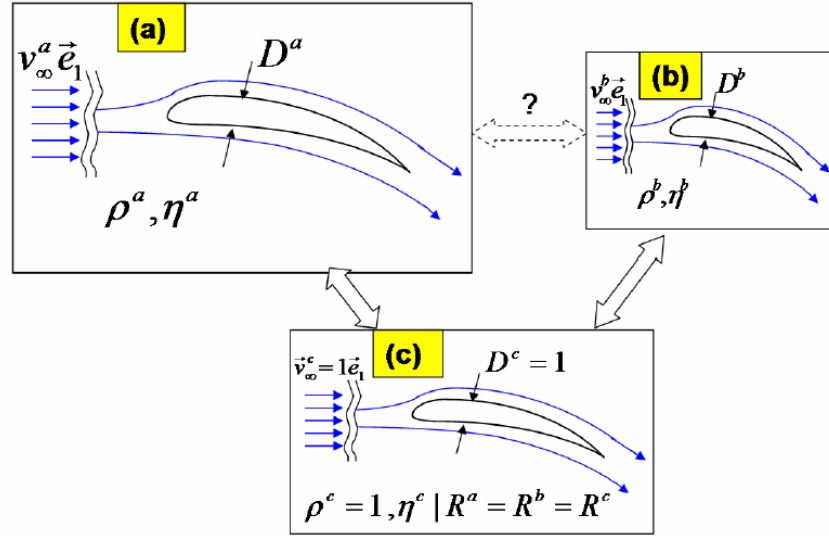
La condition aux limites (interface fluide-solide) est:

$$\vec{v} - \vec{v}_{solide} = 0. \quad (74)$$

3 – Exemples de résolution de l'équation de Navier-Stokes :

4 – Similarité et nombre de Reynolds

- Introduction :
- Equations normalisées et nombre de Reynolds :
- Écoulements similaires :



Ecoulement autour d'une aile grandeur nature (a) ; écoulement autour d'une aile modèle réduit (b) ; écoulement dans l'espace normalisés (c). Les écoulements sont similaires s'ils ont le même nombre de Reynolds.

5 - Interprétation du nombre de Reynolds (ou autre définition) :

La complexité de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}, \forall \vec{x}, \forall t. \quad (71)$$

est due essentiellement à deux termes :

- Le terme de convection de quantité de mouvement $\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$, qui rend l'équation non linéaire.
- Le terme de diffusion visqueuse $\eta \Delta \vec{v}$, qui introduit des dérivées du second ordre.

On considère un écoulement dont les paramètres sont v_∞ (vitesse du fluide loin de l'obstacle) et D la taille. L'ordre de grandeur du rapport du terme convectif sur le terme de diffusion vaut :

$$\frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \approx \frac{\rho \frac{v_\infty^2}{D}}{\eta \frac{v_\infty}{D^2}} = \frac{\rho D v_\infty}{\eta}$$

Avec $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (viscosité cinématique du fluide) :

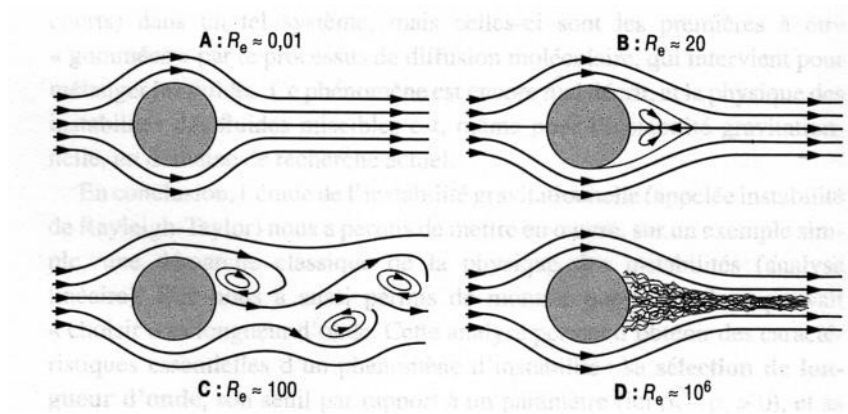
$$\frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \approx \frac{D v_\infty}{\nu}$$

On retrouve l'expression du nombre de Reynolds R défini précédemment.

L'expérience montre que si $R < 2\,000$, l'écoulement est laminaire alors que si $R_e > 2\,000$, il devient facilement turbulent.

A nombre de Reynolds élevé, les transferts de quantité de mouvement par convection sont plus importants que ceux par diffusion ; cela signifie que le temps caractéristique associé à ces transferts par convection est plus court que celui par diffusion. Tout se passe comme si la viscosité du fluide était nulle. Le fluide a un comportement de fluide parfait et son mouvement est régi par l'équation d'Euler :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{f}_v$$



Exemples d'écoulements laminaires ou turbulents selon la valeur du nombre de Reynolds.

A nombre de Reynolds faible, les transferts de quantité de mouvement par diffusion sont plus importants que ceux par convection ; le temps caractéristique associé à ces transferts par diffusion est plus court que par convection. L'équation de Navier-Stokes devient alors :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{f}_v + \eta \Delta \vec{v}$$

Les écoulements dominés par la viscosité sont toujours des écoulements très lents avec une longueur caractéristique très courte (sève dans les pores des arbres) ou impliquant des fluides très visqueux (écoulements de lave).

V) Bilans dynamiques et thermodynamiques :

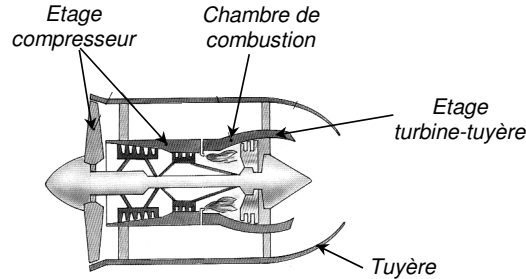
1 – Système fermé, système ouvert :

- Système fermé : il est constitué d'une quantité de matière déterminée que l'on suit dans son mouvement ; la surface (S) qui le délimite peut se déformer et se déplacer dans le référentiel d'étude.
- Système ouvert : on raisonne sur des « surfaces de contrôle » (S), délimitant des volumes de contrôles (V), fixes dans le référentiel choisi ; il peut alors y avoir un flux de matière à travers la frontière du système entre l'intérieur et l'extérieur. Ces systèmes sont bien adaptés à la méthode eulérienne.

2 – Bilans d'énergie interne et d'enthalpie (exemple du moteur à réaction) :

Dans un moteur à réaction, un gaz (assimilé à l'air supposé parfait) parcourt un cycle que l'on considérera tout d'abord comme étant réversible. Il pénètre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2 et la température vaut alors T_2 (état (2)). Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3 , la pression restant égale à P_2 (la sortie de la chambre de combustion

est représentée par l'état (3)). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2). Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)). Le gaz est rejeté avec la vitesse c (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1 . On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.



Données numériques : $T_1 = 290 \text{ K}$, $P_1 = 1 \text{ bar}$, $P_2 / P_1 = 5$. La température du gaz à l'entrée de la turbine est $T_3 = 1300 \text{ K}$. L'air est considéré comme étant un gaz diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. La constante R des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Les applications numériques demandées sont relatives à l'unité de masse (ici, 1 kg) et les grandeurs extensives correspondantes seront notées par des lettres minuscules (s_m pour l'entropie, h_m pour l'enthalpie, e_{cm} pour l'énergie cinétique macroscopique, ...).

L'unité de masse d'air qui rentre dans le compresseur ne reçoit, de la part de celui-ci, qu'un travail mécanique noté w_m (avec $w_m > 0$).

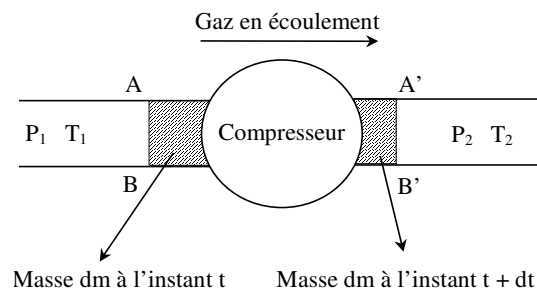
On considère à l'instant t le système fermé constitué du gaz compris dans le compresseur et de la masse dm de gaz (dans l'état P_1 et T_1) qui va rentrer, pendant l'intervalle de temps dt , dans le compresseur. A l'instant $t + dt$, ce système est constitué de la même quantité de gaz comprise dans le compresseur et de la même masse dm de gaz qui est sortie, étant désormais dans les conditions P_2 et T_2 .

Le 1^{er} principe appliqué à ce système (en négligeant l'énergie cinétique macroscopique) s'écrit :

$$\begin{aligned} & (U_{\text{gaz dans le compresseur}} + (dm)u_{m,2}) - (U_{\text{gaz dans le compresseur}} + (dm)u_{m,1}) \\ & = P_1(dm v_{m,1}) - P_2(dm v_{m,2}) + (dm)w_m \end{aligned}$$

Avec :

- $U_{\text{gaz dans le compresseur}}$, l'énergie interne du gaz constamment contenu dans le compresseur ; elle est constante en régime stationnaire.



- $u_{m,1}$ et $u_{m,2}$ désignent les énergies internes massiques et $v_{m,1}$ et $v_{m,2}$ les volumes massiques de l'air dans les états (1) et (2) respectivement.

• la quantité $P_1(dm v_{m,1}) - P_2(dm v_{m,2})$ représente le travail des forces de pressions extérieures au système, à l'entrée et à la sortie de la machine (encore appelé travail de transvasement).

• Enfin, le transfert thermique reçu par le système est nul puisque, d'une part, le compresseur est calorifugé et, d'autre part, il n'y a pas de transfert de chaleur par conduction entre la masse qui rentre ou qui sort de la machine et son environnement immédiat puisque les températures sont identiques (et égales à T_1 ou T_2).

En remarquant que $h_m = u_m + Pv_m$ représente l'enthalpie massique, on aboutit finalement au bilan énergétique suivant :

$$h_{m,2} - h_{m,1} = w_m$$

Le bilan énergétique dans la tuyère s'écrit maintenant, puisque l'énergie cinétique macroscopique en sortie $e_{cm,5}$ n'est plus négligeable (et avec des notations semblables à celles de la question (2)) :

$$\begin{aligned} (U_{\text{gaz dans la tuyère}} + (dm)u_{m,5} + (dm)e_{cm,5}) - (U_{\text{gaz dans la tuyère}} + (dm)u_{m,4}) \\ = P_4(dm v_{m,4}) - P_1(dm v_{m,5}) \end{aligned}$$

Soit, finalement :

$$(h_{m,5} - h_{m,4}) + e_{cm,5} = 0 \quad \text{d'où} \quad e_{cm,5} = -(h_{m,5} - h_{m,4}) = -\frac{7}{2}r(T_5 - T_4)$$

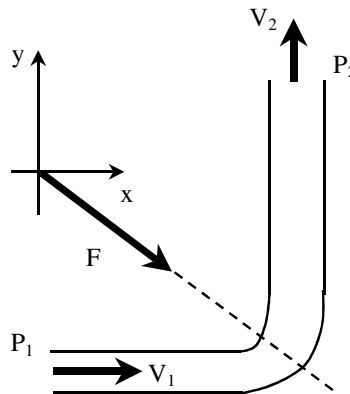
D'une manière générale (en régime permanent) :

$$\Delta h_m + \Delta e_{c,macro} + \Delta e_{p,ext} = w_m + q_{th}$$

3 – Bilans de quantité de mouvement :

a) Force subie par un coude de canalisation :

De l'eau de masse volumique μ coule en régime stationnaire avec un débit massique D_m dans une canalisation horizontale de section constante S faisant un coude d'angle droit. On néglige la pesanteur et l'écoulement est supposé parfait. Loin du coude en amont, la pression est uniforme et vaut P_1 et l'écoulement est unidimensionnel de vitesse $v_1 \vec{u}_x$. Loin du coude en aval, la pression uniforme vaut P_2 et la vitesse $v_2 \vec{u}_y$.



- Calculs de v_2 et de P_2 :

On raisonne sur le système fermé suivant : le contenu de tube coudé et une masse δm_1 qui rentre en amont entre les instants t et $t + dt$. La conservation de la masse donne :

$$m(t) + \delta m_1 = m(t + dt) + \delta m_2$$

où $m(t)$ et $m(t + dt)$ désignent la masse de fluide dans le tube aux instants t et $t + dt$.

Par ailleurs, $\delta m_1 = \mu S v_1 dt$ et $\delta m_2 = \mu S v_2 dt$, ainsi :

$$m(t + dt) - m(t) = \mu S (v_1 - v_2) dt$$

L'écoulement est ici stationnaire ($m(t + dt) = m(t)$), par conséquent :

$$\mu S (v_1 - v_2) dt = 0 \quad \text{soit} \quad v_1 = v_2$$

Le théorème de Bernoulli (valable ici car l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible, homogène) donne (le tube est horizontal !) :

$$\frac{1}{2} \mu v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} \mu v_2^2 + P_2 \quad \text{soit} \quad P_1 = P_2 = P_0$$

- Calcul de la force subie par la canalisation (bilan de quantité de mouvement) :

La force $\vec{F}$ exercée par l'eau sur la canalisation est égale à l'opposée $-\vec{F}$ de la force exercée par la canalisation sur l'eau. En l'absence de viscosité, il s'agit aussi de la résultante des forces de pression sur la paroi latérale (I) de la canalisation. Un bilan de quantité de mouvement sur l'eau contenue dans la canalisation permet de calculer cette force.

On considère le même système fermé que précédemment, entre les instants t et $t + dt$.

La variation de quantité de mouvement de ce système vaut :

$$D\vec{p} = [\vec{p}(t + dt) + (\delta m_2) v_2 \vec{u}_y] - [\vec{p}(t) + (\delta m_1) v_1 \vec{u}_x]$$

En régime stationnaire, $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$ et $\delta m_1 = \delta m_2 = \mu S v dt$ ($v = v_1 = v_2$), par conséquent :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \mu S v^2 (\vec{u}_y - \vec{u}_x)$$

Le fluide est soumis aux forces : le poids (négligé), à la force $-\vec{F}$ et aux forces de pression à l'entrée ($P_0 S \vec{u}_x$) et à la sortie ($-P_0 S \vec{u}_y$) du tube.

Le théorème de la résultante cinétique donne :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \mu S v^2 (\vec{u}_y - \vec{u}_x) = -\vec{F} + P_0 S (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$$

On en déduit la force exercée par l'eau sur la canalisation :

$$\vec{F} = (P_0 S + \mu S v^2) (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$$

La direction de la force était attendue ; cette force est la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur la canalisation. Sa direction et son sens montrent qu'au voisinage du coude, il existe une surpression sur le bord extérieur de la canalisation par rapport au bord intérieur

b) Poussée d'une fusée et chariot qui perd son chargement :

Voir exercices (voir également l'exercice : « Il pleut sur un chariot »).

4 – Bilans de moment cinétique (le tourniquet hydraulique) :

Voir exercice.



Mécanique des fluides

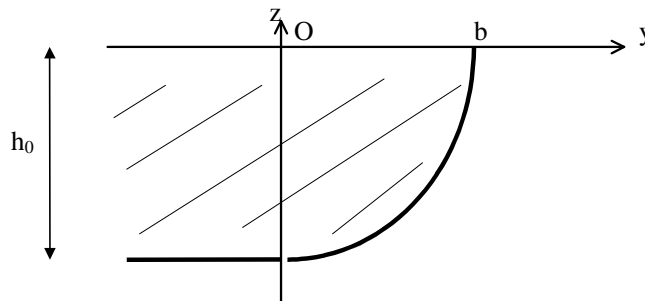
Exercices



1) Etude de l'atmosphère : on suppose que la masse volumique de l'air reste constante lorsque l'altitude varie. Justifier cette hypothèse. Etablir l'évolution de la pression et de la température en fonction de z . A quelle altitude $P = P_0 / 2$, où P_0 est la pression au sol. Quelle est alors la température ? Comparer à l'atmosphère isotherme. ($z = 4,2$ km).

On suppose désormais que la température varie avec l'altitude : $T(z) = T_0 - kz$. Donner des ordres de grandeur corrects pour T_0 et k . Déterminer la pression et la masse volumique de l'air en fonction de z .

2) Barrage à profil parabolique : un barrage, de largeur $a=15$ m, a un profil parabolique d'équation : $z / h_0 = (y / b)^2 - 1$ (avec : $h_0 = 12$ m et $b = 4$ m)



Calculer la résultante des forces exercées par l'eau (on déterminera les composantes verticale et horizontale).

Solution :

En omettant la contribution atmosphérique, on sait que les composantes horizontale et verticale de la somme des forces de pression sont données par :

$$F_h = \int_{-h_0}^0 -\rho g z a \, dz = \rho g a \frac{h_0^2}{2}.$$

et

$$F_v = \int_{-h_0}^0 -\rho g z a \, dy = -\rho g a h_0 \int_0^b \left[\left(\frac{y}{b} \right)^2 - 1 \right] dy = \frac{2}{3} \rho g a h_0 b.$$

A.N : $F_h = 10,6$ MN et $F_v = 4,7$ MN.

3) Equilibre d'une sphère flottant sur un liquide : une sphère pleine, homogène, de rayon R et de masse volumique μ_s , peut flotter dans un liquide de masse volumique μ_l . On note X la partie du diamètre vertical immergé et on pose $\alpha = \mu_s / \mu_l$.

a) Pour quelles valeurs de α y-a-t-il immersion totale ? $1/2$ immersion ?

b) Montrer que l'équilibre de la sphère se traduit par une relation de la forme $b - X = c / X^2$. Donner b et c en fonction de R et de α .

c) La sphère est en équilibre avec $0 < X < 2R$. On l'enfonce légèrement et on l'abandonne. Quel est son mouvement ?

Solution :

1) L'immersion est totale si : $\frac{4}{3}\pi\rho_s R^3 - \frac{4}{3}\pi\rho_l R^3 \geq 0$ soit $\alpha = \frac{\rho_s}{\rho_l} \geq 1$.

Il y a demi-immersion si : $\frac{4}{3}\pi\rho_s R^3 - \frac{2}{3}\pi\rho_l R^3 = 0$ soit $\frac{\rho_s}{\rho_l} = 0,5$.

2) La sphère est en équilibre si : $\frac{4}{3}\pi\rho_s R^3 - \rho_l V_i = 0$. Le volume immergé V_i vaut :

$$V_i = 2\pi \int_{R-X}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r dr = \pi \int_{R-X}^R dx (R^2 - x^2) = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)_{R-X}^R.$$

Donc : $V_i = \pi X^2 \left(R - \frac{X}{3} \right)$. On en déduit l'équation $4\rho_s R^3 = X^2(3R - X)\rho_l$ soit $3R - X = 4\alpha R^3/X^2$.

En identifiant avec $b - X = c/X^2$, on trouve $b = 3R$ et $c = 4\alpha R^3$.

3) La loi fondamentale donne : $\frac{4}{3}\pi\rho_s R^3 a_c = F$ où F est la poussée d'Archimède lorsque C se déplace de x autour de la position d'équilibre : $a_c = \ddot{x}e_x$ et $F = -\rho_l \Delta V_{im} g e_x$.

Comme $\Delta V_{im} = \pi(2XR - X^2)\Delta X = \pi X(2R - X)x$, il vient :

$$\frac{4\pi}{3}\rho_s R^3 \ddot{x} = -\rho_l x \pi X(2R - X)g \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}.$$

La sphère oscille donc avec la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

4) Forme de la Terre ; ellipsoïde et géoïde : au milieu du XVIII^e siècle, le mathématicien Clairaut démontre que la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire d'un corps dont les rayons équatoriaux et polaire n'ont pas la même longueur. En effet, du fait de sa rotation propre et de l'existence de la force centrifuge plus forte à l'équateur que dans les régions polaires, la Terre se déforme ; elle n'est plus sphérique mais est aplatie aux pôles.

Pour tenter de voir l'influence de la rotation de la Terre sur sa propre forme, on adopte le modèle suivant : la déformation de la Terre, liée à sa rotation propre, est suffisamment petite pour admettre que le champ de gravitation en un point M situé à la distance r du centre O de la Terre reste celui de la Terre sphérique et homogène (de masse volumique constante ρ , de masse M_T et de rayon moyen R_T). De plus, on admettra qu'en première approximation, on peut trouver la forme de la Terre en considérant qu'elle se comporte comme un corps fluide.

Données : $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6400 \text{ km}$ et $G = 6,67.10^{-11} \text{ SI}$ (constante de la gravitation universelle).

On admettra dans la suite des calculs que le référentiel géocentrique est galiléen et on se placera dans le référentiel terrestre. La forme de la Terre possède la symétrie de révolution (voir figure suivante) autour de l'axe de rotation (Oz). On considérera alors dans la suite uniquement un

point M intérieur à la Terre et placé dans un plan quelconque (Oyz) contenant (Oz). On note $P(y,z)$ la pression qui règne au point M.

a) Quelles sont les forces agissant sur un volume $d\tau$ centré en M ? On exprimera le résultat en fonction des coordonnées cartésiennes y et z de M et de $r = OM$.

b) Déterminer la pression $P(y,z)$ qui règne au point M en fonction de y et z. On note P_0 la pression au centre O. Soit P_a la pression atmosphérique en tout point de la surface terrestre. Montrer que la ligne isobare à la surface de la Terre dans le plan (Oyz) est une ellipse d'équation :

$$y^2 / a^2 + z^2 / c^2 = 1$$

Déterminer littéralement a et c.

c) En faisant des approximations légitimes, calculer $\Delta = a - c$ en fonction de R_T , M_T , G et la vitesse angulaire Ω de rotation propre de la Terre, puis l'aplatissement $f = (a - c) / c$. (On donne le volume de l'ellipsoïde terrestre : $4\pi a^2 c / 3$).

Solution :

a) On se limite à l'étude d'un volume élémentaire situé dans le plan (Oyz). Ce volume $d\tau$, de masse $\rho d\tau$, est soumis dans le référentiel terrestre aux trois forces :

- $-\frac{G(\rho d\tau)M_T}{R_T^3} \vec{r}$, qui représente la force gravitationnelle exercée par le reste de la Terre (supposée ici

sphérique et homogène) sur la masse $\rho d\tau$ (voir la justification de de cette force dans l'exercice intitulé « Modèle atomique de Thomson », en page 253).

- La force d'inertie centrifuge due au mouvement de rotation propre de la Terre, qui peut s'écrire $(\rho d\tau)\Omega^2 y \vec{u}_y$.

- La force résultante de pression, qui vaut $-(\text{grad } P) d\tau$.

b) La masse $\rho d\tau$ est à l'équilibre dans le référentiel terrestre, par conséquent :

$$-\frac{G(\rho d\tau)M_T}{R_T^3} \vec{r} + (\rho d\tau)\Omega^2 y \vec{u}_y + \left[-(\text{grad } P) d\tau \right] = \vec{0}$$

Soit :

$$\text{grad } P = -\frac{G\rho M_T}{R_T^3} \vec{r} + \rho\Omega^2 y \vec{u}_y$$

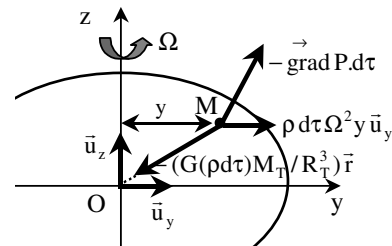
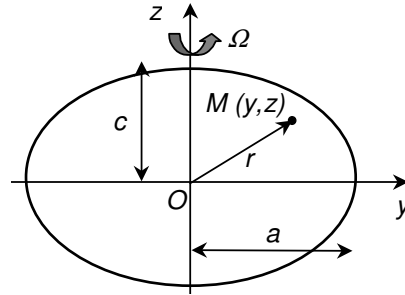
Dans le plan (Oyz), $\text{grad } P = \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$ et $\vec{r} = y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$. Il vient, en projection :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{G\rho M_T}{R_T^3} y + \rho\Omega^2 y = -\rho \left(\frac{GM_T}{R_T^3} - \Omega^2 \right) y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{G\rho M_T}{R_T^3} z$$

Soit encore :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} z$$

La 1^{ère} équation donne, par intégration :



$$P(y, z) = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \frac{1}{2} y^2 + f(z)$$

où $f(z)$ désigne une fonction inconnue de la seule variable z ; en dérivant partiellement par rapport à z l'expression précédente et en l'identifiant avec l'expression de $\partial P / \partial z$ ci-dessus, il vient :

$$f'(z) = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} z \quad \text{d'où} \quad f(z) = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} \frac{1}{2} z^2 + K \quad (\text{où } K \text{ est une constante})$$

Par conséquent, la pression $P(y, z)$ devient :

$$P(y, z) = -\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y^2 - \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} z^2 + K$$

En notant $P_0 = P(0, 0)$ la pression au centre de la Terre, $K = P_0$ et ainsi :

$$P(y, z) = -\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y^2 - \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} z^2 + P_0$$

La ligne isobare à la surface de la Terre, sur laquelle la pression est constante et égale à P_a , vérifie ainsi l'équation en coordonnées cartésiennes :

$$\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y^2 + \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} z^2 = P_0 - P_a$$

Ou encore :

$$\frac{y^2}{(P_0 - P_a) / \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)} + \frac{z^2}{(P_0 - P_a) / \rho \frac{GM_T}{2R_T^3}} = 1$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'une ellipse de centre O, d'axe focal (Oy) et dont les longueurs a et c du demi grand-axe et demi petit-axe vérifient respectivement :

$$a^2 = (P_0 - P_a) / \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \quad \text{et} \quad c^2 = (P_0 - P_a) / \rho \frac{GM_T}{2R_T^3}$$

Par symétrie autour de l'axe (Oz), on déduit que le volume d'équilibre de la Terre est un ellipsoïde de rayons équatoriaux tous deux égaux à a et de rayon polaire c .

c) La masse de la Terre ne doit pas dépendre du modèle géométrique choisi pour décrire le globe terrestre ; par conséquent, puisque la masse volumique terrestre est supposée constante, il y a égalité entre le volume d'une sphère de rayon R_T et le volume de l'ellipsoïde obtenu à la question précédente, soit :

$$\frac{4}{3} \pi R_T^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 c \quad \text{ou encore} \quad R_T^6 = a^4 c^2$$

En utilisant les expressions précédentes de a^2 et de c^2 , on obtient :

$$(P_0 - P_a)^3 = \left(\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \right)^3 \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^2 R_T^6$$

D'où l'expression suivante de $(P_0 - P_a)$:

$$(P_0 - P_a) = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^{2/3} \rho \frac{GM_T}{2R_T}$$

qui permet alors d'obtenir les relations suivantes pour a et c :

$$a = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right)^{-1/6} R_T \quad \text{et} \quad c = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right)^{1/3} R_T$$

Le rapport $R_T^3 \Omega^2 / GM_T$ (ordre de grandeur du rapport de la force centrifuge sur la force gravitationnelle) est petit devant 1 (il vaut $3,5 \cdot 10^{-3}$), par conséquent :

$$\left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right)^{-1/6} \approx 1 + \frac{1}{6} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right)^{1/3} \approx 1 - \frac{1}{3} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}$$

L'expression de a , puis celle de c , deviennent finalement :

$$a \approx R_T \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right) \quad \text{et} \quad c \approx R_T \left(1 - \frac{1}{3} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right) \quad (\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T})$$

Δ et l'aplatissement f s'en déduisent :

$$\Delta = a - c \approx \frac{1}{2} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} R_T \quad \text{et} \quad f = \frac{a - c}{c} \approx \frac{1}{2} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \quad (\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T})$$

Numériquement : $\Delta \approx 11,1 \text{ km}$ et $f \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \approx 1/580$.

Par rotation autour de l'axe (Oz), on génère un ellipsoïde de révolution, légèrement aplati aux pôles ($c < R_T$) et renflé au niveau de l'équateur ($a > R_T$). Des calculs plus complexes, prenant en compte notamment la dépendance de la force de gravitation avec la latitude, sont néanmoins nécessaires pour aboutir à l'expression théorique de « l'ellipsoïde de référence » qui est la forme théorique du globe terrestre qui épouse le plus parfaitement possible la forme réelle de la Terre. Cet ellipsoïde est défini par :

- son rayon équatorial, noté a : $a = 6\,378,160 \text{ km}$.
- son aplatissement, noté f , défini par : $f = (a - c)/c = 1/298,247$, où c est le rayon polaire.

Le rayon polaire c est de l'ordre de $c = 6\,357 \text{ km}$, ce qui correspond à une différence de 21 km entre le rayon polaire et le rayon équatorial (soit une différence relative de $0,3\%$). La forme mathématique qui se rapproche au mieux de la forme de la Terre n'est pas une sphère mais n'en est pas très éloignée !

5) Compressibilité de l'eau :

- En supposant l'eau incompressible, déterminer la pression au fond d'une fosse océanique de profondeur 1 km .
- Le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau vaut $\chi_T = 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. Reprendre le calcul précédent en tenant compte de la compressibilité de l'eau.

6) Equilibres relatifs d'un liquide en rotation en vase ouvert : un récipient cylindrique ouvert, de hauteur $H = 90 \text{ cm}$ et de fond horizontal de centre O et de rayon $a = 25 \text{ cm}$, contient $V = 140 \text{ L}$ d'eau (de masse volumique $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$). Il tourne à raison de $60 \text{ tours.min}^{-1}$ autour de son axe vertical Oz.

- Exprimer la pression $P(r,z)$ en tout point M du liquide en équilibre relatif, de côte z et à la distance r de l'axe de rotation. En déduire la forme de la surface libre du liquide.
- De quelle hauteur Δh remonte le milieu de la surface libre si on arrête la rotation du vase ?
- Calculer la pression de l'eau en O , puis la pression maximale de l'eau sur le fond du vase.

d) Quelle est la fréquence de rotation maximale (en tours.min⁻¹) pour que l'eau ne déborde pas ?

7) Equilibre d'un fluide à symétrie sphérique. Modélisation du Soleil : la Terre décrit autour du Soleil, assimilé à une sphère de centre O et de rayon R_s et vu depuis la Terre sous un diamètre angulaire $2\alpha_s = 32'$, une orbite pratiquement circulaire de rayon $D = 149,5$ millions de km en 1 an. Le Soleil est modélisé par un fluide gazeux, supposé parfait, de masse volumique constante μ_s .

Données :

*** Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI

*** Constante des gaz parfaits : $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}$

*** Masse molaire du fluide solaire : $M = 1,25 \text{ g}$

a) Calculer le rayon R_s du Soleil et sa masse volumique moyenne μ_s .

b) Calculer le gradient dP / dr de la pression du fluide solaire en tout point M à la distance r du centre du Soleil, à l'aide des constantes μ_s et G .

c) Etablir la loi des pressions $P(r)$ en M en supposant nulle la pression au bord du Soleil. Calculer la pression P_0 et la température T_0 au centre du Soleil.

d) Calculer l'énergie potentielle de gravitation du Soleil, en fonction de G , μ_s et R_s , puis en fonction de la masse M_s et du rayon R_s du Soleil.

Solution :

On considère le Soleil, formé d'un gaz supposé parfait et à l'équilibre; on suppose qu'il est à symétrie sphérique et l'on notera respectivement $P(r), T(r)$ et $\rho(r)$ la pression, la température et la masse volumique à la distance r du centre O du Soleil.

1) Déterminer 2 équations liant les grandeurs $P(r), T(r)$ et $\rho(r)$.

2) Pour une évaluation rapide, on suppose que $\rho(r) = \rho_0 = \text{cste}$; calculer $P(O)$ et $T(O)$.

On donne : $M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ = masse du Soleil ; $R_s = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ = rayon du Soleil ;

Le Soleil sera supposé constitué d'hydrogène de masse molaire $M = 1 \text{ g.mol}^{-1}$;

On rappelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I}$ = constante universelle de la gravitation et :

$R \approx 8,32 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ = constante des gaz parfaits.

1) On applique la relation de statique des fluides dans le champ de gravitation seul :

$\overrightarrow{\text{grad}P(r)} = \rho(r)\vec{g}(r) \Rightarrow \frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r)$ (coordonnées sphériques et $g(r) > 0$ = norme du champ de gravitation du Soleil à la distance r de son centre).

• Le calcul de $g(r)$ se fait facilement par le théorème de Gauss de la gravitation ; on choisit comme « surface de Gauss » un sphère de rayon r sur laquelle $\vec{g}$ et $d\vec{S}$ ont même direction mais des sens contraires, d'où :

$$\oint_{\text{sphère}} \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}} \Rightarrow -4\pi r^2 \times g(r) = -4\pi G m_{\text{int}} = -4\pi G \times \int_0^r \rho(x) 4\pi x^2 dx$$

(en intégrant les masses élémentaires de « coques sphériques » d'épaisseur dx)

$$\text{Il vient donc : } g(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \times \int_0^r \rho(x) x^2 dx \Rightarrow \boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{4\pi G \rho(r)}{r^2} \times \int_0^r \rho(x) x^2 dx} \quad (1)$$

- La loi de Mariotte fournit la deuxième relation : $PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \boxed{P(r) = \frac{R}{M} \rho(r)T(r)} \quad (2)$

2) On peut déterminer la masse volumique moyenne $\rho_0 = \frac{M_s}{4/3\pi R_s^3}$; on en déduit :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{9GM_s^2}{4\pi R_s^6} \times \frac{1}{r^2} \times \int_0^r x^2 dx = -\frac{3GM_s^2}{4\pi R_s^6} \times r \Rightarrow P(r) = -\frac{3GM_s^2}{8\pi R_s^6} (r^2 - R_s^2) \quad (\text{avec } P(R_s) = 0)$$

On en tire : $\boxed{P(O) = \frac{3GM_s^2}{8\pi R_s^4}}$ puis, grâce à la relation (2) : $\boxed{T(O) = \frac{GM_s M}{2RR_s}}$

Application numérique : $\boxed{P(O) = 1,33 \cdot 10^9 \text{ bars}}$ et : $\boxed{T(O) = 1,15 \cdot 10^7 \text{ K}}$

Rq : des mesures faites par le satellite Soho permettent d'évaluer la température centrale du Soleil à $\approx 1,5 \cdot 10^7 \text{ K} \Rightarrow$ le modèle précédent est loin d'être ridicule...

8) Equilibre d'un tronc d'arbre flottant sur l'eau : un tronc d'arbre cylindrique flotte sur l'eau. On l'assimile à un cylindre plein homogène de rayon $R = 1 \text{ m}$. Il s'enfonce dans l'eau de $h = 87 \text{ cm}$. Quelle est sa masse volumique ?

Solution :

Le tronc d'arbre de masse volumique ρ_a inférieure à celle (ρ_e) de l'eau flotte. Il est en équilibre sous l'action de son poids et de la poussée exercée par l'eau :

$$0 = mg + F_p \quad \text{soit} \quad 0 = -\rho_a \pi R^2 \ell g + \rho_e S_i \ell g,$$

en projetant suivant la verticale ascendante et en désignant par S_i la surface de la section immergée ; $S_i = R^2[\theta - (\sin 2\theta)/2]$, θ étant l'angle qui définit l'immersion : $h = R(1 - \cos \theta)$. On a donc :

$$\frac{\rho_a}{\rho_e} = \frac{1}{2\pi} (2\theta - \sin 2\theta).$$

À partir de $h = 0,87 \text{ m}$, on déduit $\theta = 82,5^\circ$. D'où :

$$\rho_a = \frac{1000}{2\pi} \left(2 \frac{\pi}{180} \times \theta - \sin 2\theta \right) = 417 \text{ kg/m}^3.$$

9) Bilan énergétique de l'écoulement d'un fluide ; applications : un fluide pénètre par l'entrée (1) du volume de contrôle (Σ) à la vitesse $\mathbf{v}_1$, à l'altitude z_1 par rapport au sol et sort du volume (Σ) en (2) à la vitesse $\mathbf{v}_2$, à l'altitude z_2 . On désigne par u , h , V et p respectivement l'énergie interne massique, l'enthalpie massique, le volume massique et la pression du fluide, affectés de l'indice 1 à l'entrée de (Σ) et de l'indice 2 à la sortie de (Σ).

a) Entre les instants voisins t et $t+dt$, il pénètre dans (Σ) une masse dm_1 de fluide, il sort de (Σ) une masse dm_2 de fluide et le volume de contrôle (Σ) reçoit du milieu extérieur un transfert thermique δQ_e et un travail δW_e^* en dehors de celui des forces de pression. Effectuer un bilan énergétique et exprimer l'énergie dE accumulée dans le volume de contrôle (Σ) entre les instants t et $t+dt$.

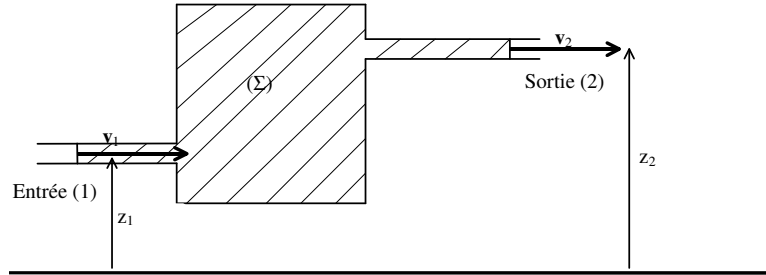
b) En déduire qu'en régime permanent, et si l'écoulement ne reçoit ni transfert thermique (parois de (Σ) calorifugées) ni travail autre que celui des forces de pression, on a :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

c) Applications : déduire de cette dernière relation :

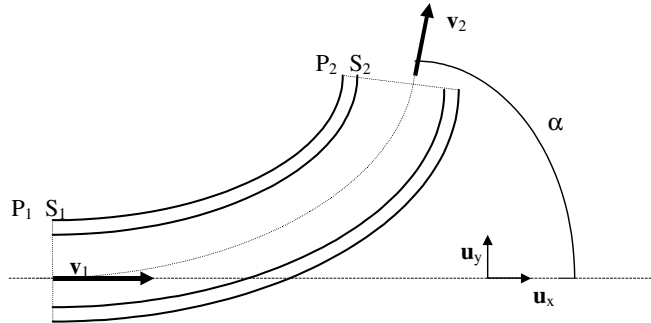
* L'équation de Bernoulli, en régime permanent d'un fluide parfait incompressible de masse volumique μ .

* Le caractère isenthalpique de la détente de Joule-Thomson d'un gaz.



* La vitesse v d'écoulement d'un gaz parfait à la sortie d'un mince tube horizontal, sachant que ce gaz de vitesse initiale négligeable et de température initiale $T_1 = 300$ K a subi une détente isentropique dans la tuyère où il sort à la température $T_2 = 295$ K. On donne : masse molaire du gaz $M = 28$ g.mol⁻¹, rapport des chaleurs massiques $\gamma = 7 / 5$.

10) Force exercée sur un coude d'une canalisation : on considère un écoulement unidimensionnel et permanent de débit de masse D à l'intérieur d'une conduite courbe.



Déterminer les coordonnées F_x et F_y de la force exercée par le fluide sur la canalisation entre les sections 1 et 2 caractérisées par les aires S_1 et S_2 , les pressions P_1 et P_2 et les vitesses $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{u}_x$ et $\mathbf{v}_2 = v_2 (\cos \alpha \mathbf{u}_x + \sin \alpha \mathbf{u}_y)$.

Solution :

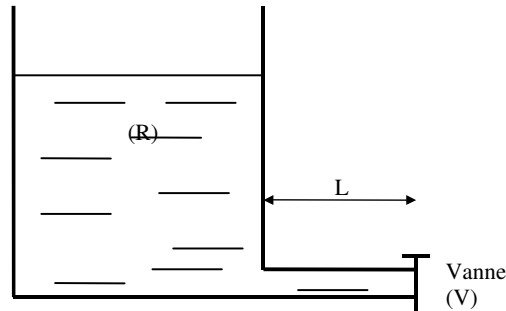
$$F_x = D(v_1 - v_2 \cos \alpha) + P_1 S_1 - P_2 S_2 \cos \alpha$$

$$F_y = -\sin \alpha (D v_2 + P_2 S_2)$$

11) Coup de béliet : une conduite cylindrique horizontale de longueur L et de section droite d'aire S est en communication avec un réservoir R de très grande capacité et de niveau d'eau que l'on peut considérer comme invariable. La conduite est commandée à son extrémité par une vanne (V). On néglige la viscosité de l'eau.

La vanne est ouverte et le régime stationnaire d'écoulement de débit volumique D_v est établi dans la conduite. L'écoulement est supposé incompressible et la vitesse moyenne d'écoulement est notée v_m .

On ferme alors la vanne. La durée de fermeture est τ . En exprimant un bilan de quantité de mouvement, évaluer la force moyenne en retour F_m (coup de bélier) exercée par la vanne sur le liquide.



Evaluer la surpression correspondante ΔP . AN : $L=200$ m ; $S=0,30$ m² ; $D_v=150$ L.s⁻¹.

Connaissez-vous des exemples de ce phénomène ?

Solution :

$$F_m = \frac{\mu S L v_m}{\tau} = 6.10^3 \text{ N} \quad ; \quad \Delta p = \frac{\mu L v_m}{\tau} = \frac{\mu L D}{S \tau} = 2.10^4 \text{ Pa}$$

Exemple : ouverture de robinets.

12) Ecoulement à lignes parallèles :

a) pour un écoulement permanent et à lignes parallèles d'un fluide parfait, justifier l'affirmation suivante :

" Dans une direction perpendiculaire aux lignes de courant, la pression varie selon les lois de l'hydrostatique "

b) Si le fluide est plus incompressible, montrer qu'il ne peut pas exister de gradient de pression le long de l'écoulement si la direction de celui-ci est horizontale.

Solution :

a) En régime permanent, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et l'accélération du fluide se réduit à :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

Si les lignes sont parallèles ($\vec{v} = v \vec{u}_x$) :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = v \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \vec{a} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{u}_x$$

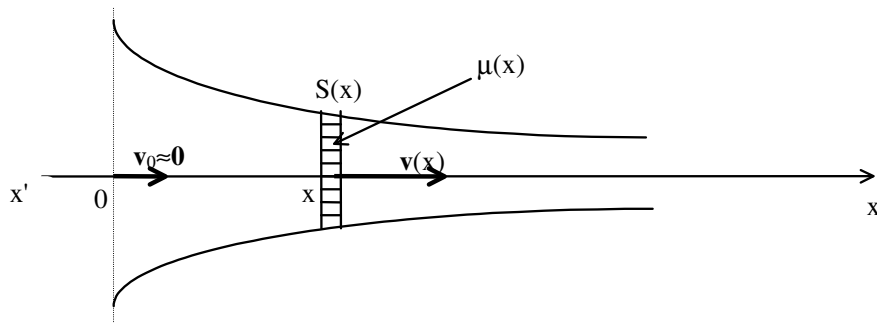
L'équation d'Euler est alors :

$$\vec{a} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g} + \vec{f}_v$$

Selon les directions (Oy) et (Oz) : $\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu \vec{g} + \vec{f}_v$, comme en statique des fluides.

b) Pour un fluide incompressible, $\text{div}(\vec{v}) = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$. Si les lignes sont horizontales et si les forces volumiques autres que le poids sont nulles, alors $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$: il n'existe pas de gradient de pression le long de l'écoulement si la direction de celui-ci est horizontale

13) Ecoulement permanent adiabatique d'un gaz compressible dans une tuyère ; nombre de Mach : de l'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g}$ et de $\gamma = 7 / 5$, en écoulement permanent, se détend de façon isentropique dans une tuyère de révolution autour d'un axe horizontal ($x'Ox$) en prenant de la vitesse. On note respectivement $\mu(x)$, $P(x)$, $v(x)$, $T(x)$ et $S(x)$ la masse volumique, la pression, la vitesse d'écoulement, la température du gaz et la section de la tuyère à l'abscisse x ; ces mêmes grandeurs seront notées μ_0 , P_0 , v_0 , T_0 et S_0 à l'entrée ($x = 0$) de la tuyère et μ_1 , P_1 , v_1 , T_1 et S_1 à la sortie ($x=L$) ; on admettra $v_0 = 0$. On admettra que la célérité locale du son dans le tuyau à l'abscisse x est donnée par $c(x) = \sqrt{\gamma R T(x) / M}$.



a) Exprimer la masse volumique $\mu(x)$ d'une tranche de gaz d'abscisse x en fonction de sa pression $P(x)$ et des données γ , M , P_0 , R et T_0 .

b) Etablir, à partir de l'équation d'Euler, l'équation différentielle qui lie $P(x)$, $v(x)$ et les constantes γ , P_0 , R et T_0 . Exprimer la vitesse $v(x)$ du gaz en fonction de γ , M , R , T_0 et du paramètre $a(x) = P(x)/P_0$. On donne $T_0 = 320 \text{ K}$, $P_0 = 3 \text{ bar}$ et $P_1 = 1 \text{ bar}$. Calculer les grandeurs v_1 , μ_1 et T_1 à la sortie de la tuyère.

c) Etudier la variation et tracer le graphe du débit massique D_1 du gaz à la sortie de la tuyère, en fonction du rapport $a_1 = P_1 / P_0$ dans l'intervalle $0 < a_1 < 1$. Pour quelle valeur a_{1c} du rapport P_1 / P_0 le débit massique est-il maximal ? Calculer $D_{1\text{max}}$ sachant que $S_1 = 0,10 \text{ m}^2$. Comparer la vitesse v_1^* des gaz à la sortie et la célérité du son à la sortie si $D_1 = D_{1\text{max}}$.

d) On introduit le nombre de Mach $M = v(x) / c(x)$. Montrer que l'on a :

$$\frac{dS(x)}{S(x)} = \frac{dv(x)}{v(x)} f(M)$$

où $f(M)$ est une fonction du nombre de Mach qu'on explicitera. Que peut-on conclure sur la forme géométrique que doit avoir la tuyère pour obtenir à la sortie :

*** des vitesses d'éjection subsoniques ($v < c$) ?

*** des vitesses d'éjection supersoniques ($v > c$) ?

14) Ecoulement à faible vitesse : la vitesse en tout point d'un écoulement est décrite (ω et k étant des constantes) par l'expression : $\mathbf{x} = v_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_x$.

- a) Quel est le phénomène représenté par une telle expression ?
 b) Un tel phénomène peut-il s'observer dans un fluide incompressible ?
 c) Montrer que l'on peut, pour un tel écoulement, négliger le terme d'origine convective dans l'expression de l'accélération, à condition que v_0 soit "suffisamment faible" (à préciser).

Solution :

- a) Onde plane progressive se propageant dans la direction $\vec{u}_x$ avec la célérité ω/k .
 b) Le champ de vitesse proposé, ayant une divergence non nulle, ne peut correspondre à un écoulement incompressible.
 c) En calculant les termes $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$, on voit que le second terme peut bien être négligé devant le premier si l'amplitude v_0 des variations de la vitesse est petite devant la célérité de l'onde ω/k .

15) Ecoulement de Poiseuille : un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique μ s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe (Oz), de longueur L et de rayon R. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ de vitesses de la forme $\mathbf{v}(\mathbf{M}) = v_z(r,z)\mathbf{u}_z$ et un champ de pression $P(\mathbf{M}) = P(r,z)$.

- a) En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que $v_z(r,z)$ ne dépend pas de z.
 b) Montrer que le champ des accélérations $\mathbf{a}(\mathbf{M})$ est nul. En appliquant le théorème de la résultante dynamique à une particule de fluide, établir l'équation différentielle dont est solution $v_z(r)$ et l'intégrer en tenant compte des conditions aux limites sur la paroi de la conduite.
 c) En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des pressions $P(z=0) = P_1$ à l'entrée et $P(z=L) = P_2$ à la sortie de la conduite. Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique.

Application numérique : calculer la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1$ m, de rayon $R = 0,5$ cm, où le débit volumique $D_v = 80 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, sachant que la viscosité du sang vaut $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$. Commenter sachant que le cœur maintient une différence de pression ΔP qui, symbolisée par « 12-8 » en médecine vaut $\Delta P = 12 - 8 = 4 \text{ cm Hg}$.

On rappelle que pour un champ scalaire $f(r)$:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{df}{dr} \right]$$

La grandeur $p_2 - p_1$, négative, est appelée *perte de charge* : la perte de charge est proportionnelle à la longueur L de la conduite; elle est d'autant plus importante en valeur absolue que le rayon R de la conduite est petit, que le débit volumique D_v est important et que le fluide est plus visqueux.

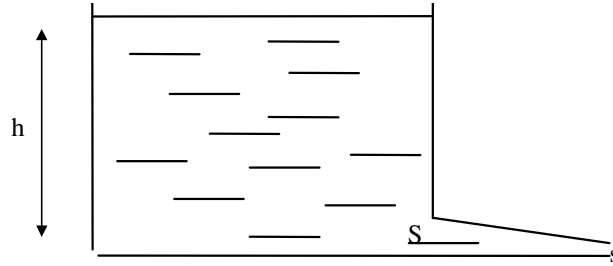
16) Expansion uniforme d'un fluide : un fluide remplit tout l'espace. O étant un point fixe, à l'instant $t = 0$, on communique aux particules de fluide une vitesse radiale v_0 proportionnelle à leur distance au point O ; pour une particule située à $t = 0$ au point de vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, on écrit : $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_0 / \tau$, τ étant une constante donnée positive. On suppose que, pour $t > 0$, chaque particule de fluide conserve sa vitesse initiale.

- a) Etablir l'expression du champ des vitesses $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ au sens d'Euler.
 b) Calculer l'accélération $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ de la particule qui passe au point de position $\mathbf{r}$ à l'instant t par deux méthodes.

c) Montrer que cet écoulement est compatible avec une répartition homogène de la masse. Comment évolue la masse volumique $\mu(t)$ connaissant $\mu(0)$?

17) Force s'exerçant sur un tuyau d'évacuation : à la base de la paroi verticale d'un récipient rempli de liquide sur une hauteur h est percé un petit orifice de section S sur lequel est emmanché un tuyau horizontal conique dont l'autre extrémité a une section $s = \alpha S$ (avec $\alpha < 1$). En précisant les hypothèses adoptées :

a) Calculer la pression P au niveau de la section S . Examiner les cas limites $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

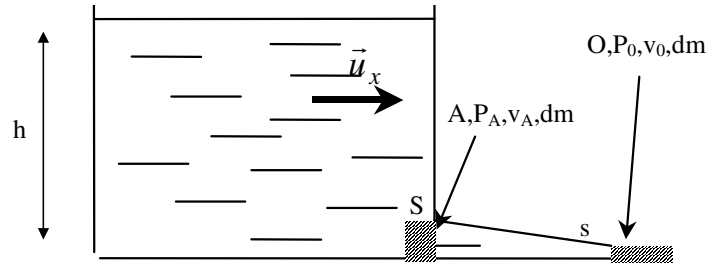


b) Exprimer en fonction de α , h et S la force F qui tend à arracher le tube.

Solution :

a) On fait l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire (h varie lentement). Le théorème de Bernoulli donne alors en A et en B :

$$P_0 + \mu gh = P_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 = P_0 + \frac{1}{2} \mu v_0^2$$



Ainsi :

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{et} \quad P_A = P_0 + \frac{1}{2} \mu (v_0^2 - v_A^2)$$

La conservation du débit massique entre A et O donne :

$$S v_A = s v_0 = \alpha S v_0 \quad \text{soit} \quad v_A = \alpha v_0 = \alpha \sqrt{2gh}$$

D'où la pression en A :

$$P_A = P_0 + \mu gh (1 - \alpha^2)$$

Si $\alpha = 0$: $P_A = P_0 + \mu gh$ (hydrostatique). Si $\alpha = 1$: $P_A = P_0$ (pression uniforme dans le tube).

b) On raisonne sur le système fermé suivant : le contenu du tube et une masse dm qui va entrer à travers S entre les instants t et $t + dt$. En régime quasi-stationnaire, la même masse dm va sortir à travers la section s pendant dt . On a bien sur :

$$dm = \mu v_A S dt = \mu v_0 s dt$$

Ce système fermé est soumis aux forces extérieures :

- Son poids $m\vec{g}$
- Les forces de pression à l'entrée et à la sortie : $P_A S \vec{u}_x$ et $-P_0 s \vec{u}_x$
- La force exercée par le tube sur l'eau, égale à l'opposée de la force exercée par l'eau sur le tube (qui est celle que l'on cherche) notée ainsi $-\vec{F}$.

Le théorème de la résultante cinétique donne :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = m\vec{g} + P_A S \vec{u}_x - P_0 s \vec{u}_x - \vec{F}$$

Or :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{dm}{dt} (v_0 - v_A) \vec{u}_x = \mu v_A S (v_0 - v_A) \vec{u}_x = 2\mu gh S \alpha (1-\alpha) \vec{u}_x$$

$$P_A S \vec{u}_x - P_0 s \vec{u}_x = [P_0 S + \mu gh(1-\alpha^2)S - P_0 \alpha S] \vec{u}_x = [P_0 + \mu gh(1+\alpha)](1-\alpha)S \vec{u}_x$$

D'où l'expression de la force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = [P_0 + \mu gh(1+\alpha)](1-\alpha)S \vec{u}_x - 2\mu gh S \alpha (1-\alpha) \vec{u}_x + m\vec{g}$$

$$\vec{F} = P_0 (1-\alpha)S \vec{u}_x + \mu gh S (1-\alpha)^2 \vec{u}_x + m\vec{g}$$

On obtient une force qui a tendance à arracher le tube vers la droite.

Si $\alpha = 0$: on retrouve encore les lois de l'hydrostatique. Si $\alpha = 1$, la force est nulle.

18) Oscillations dans un tube en U : étudier les oscillations d'un fluide incompressible dans un tube en U de faible section en appliquant le théorème de Bernoulli en régime dépendant du temps ou en effectuant un bilan énergétique. On suppose que les surfaces libres restent dans les parties rectilignes et verticales du tube.

Déterminer ensuite la période des petites oscillations du fluide lorsque celui-ci reste dans la partie semi-circulaire du tube.

19) Systèmes à masse variable : on étudie une benne de masse m_0 à vide pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal. Elle est, à $t = 0$, remplie d'une masse m_1 de sable. Percée d'un petit trou, elle perd régulièrement son chargement avec un taux $\alpha = -dm/dt$ constant (où m est la masse totale de la benne à l'instant t). On exerce, pour $t > 0$, une force horizontale constante $\vec{F}$ parallèle au plan.

Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la benne puis de sa position $x(t)$ pour $t > 0$.

Solution :

La méthode classique vue pour les systèmes de masse variable donne ici :

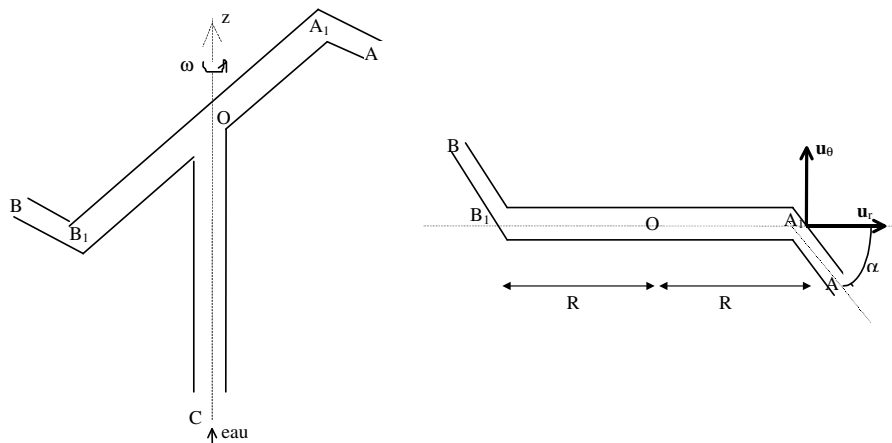
$$m(t) \frac{dv}{dt} = F \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m_0 + m_1 - \alpha t}$$

20) Tornado : une tornade est modélisée par un écoulement incompressible dont le vecteur tourbillon est donné en coordonnées cylindriques par :

Pour $r < a$: $\Omega_0 \mathbf{u}_z$ Pour $r > a$: $\mathbf{0}$ (où a et Ω_0 sont des constantes.)

- En exploitant l'analogie formelle avec un problème de magnétostatique à préciser, écrire l'expression intégrale du champ des vitesses $\mathbf{v}(\mathbf{M})$. En exploitant les symétries du problème, montrer sans calcul que le champ des vitesses est de la forme $\mathbf{v}(\mathbf{M}) = v_\square(r) \mathbf{u}_\square$.
- Ecrire l'analogie du théorème d'Ampère pour $\mathbf{v}$ et en déduire l'expression de $\mathbf{v}$ en tout point de l'espace.
- On définit un *vortex* comme l'écoulement limite obtenu quand a tend vers zéro, Ω_0 tend vers l'infini, le produit $2\Omega_0 \pi a^2$ restant égal à une constante C . Quel est l'analogie de ce modèle en magnétostatique ? Exprimer $\mathbf{v}$ en tout point de l'espace. Est-il possible de trouver un potentiel des vitesses Φ valable dans tout l'espace ?

21) Etude d'un tourniquet hydraulique : le tourniquet hydraulique représenté sur la figure ci-dessous possède deux bras OA_1 et OB_1 identiques de longueur R munis de becs d'éjection tête-bêche A_1A et B_1B faisant avec les rayons vecteurs $\mathbf{OA}_1$ et $\mathbf{OB}_1$ le même angle α . Il est alimenté avec un débit volumique D_v constant à la base C de son axe de rotation vertical Oz . On note ω la vitesse angulaire prise par le tourniquet à l'instant t et J désigne son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz . v' est la vitesse d'éjection de l'eau dans le référentiel du tourniquet.



- En raisonnant sur un système fermé, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$.
- Sachant que $\omega(0)=0$, déterminer la fonction $\omega(t)$.

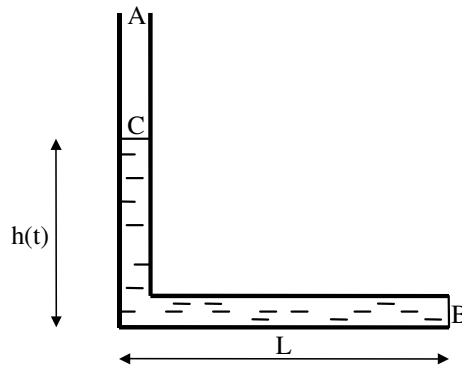
22) Vent solaire : on étudie ici un modèle très simplifié du flux de particules émis par le Soleil et appelé *vent solaire*. On assimile le vent solaire à un gaz parfait constitué de particules neutres de masse m , de température T uniforme, de densité particulaire $n(r)$ et de pression $P(r)$ isotropes. Le mouvement est décrit par un champ des vitesses stationnaires isotropes : $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\mathbf{u}_r$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il est possible d'obtenir des vitesses très élevées loin du Soleil, malgré des vitesses d'émission faibles.

- Le Soleil est assimilé à un astre sphérique de rayon r_0 et de masse M . Rétablir rapidement l'expression classique (calculée dans le vide) de la vitesse de libération U à partir de sa surface en fonction de M , r_0 et de la constante G de la gravitation.
- Montrer que la quantité $nvr^2 = n(r)v(r)r^2$ est constante. En déduire comment doit varier $n(r)$ pour que $v(r)$ puisse être croissante.

c) On suppose que le seul champ de force volumique est dû à l'attraction du Soleil. Ecrire l'équation d'Euler et éliminer la pression pour obtenir l'équation différentielle du premier ordre dont est solution $v(r)$. On introduira la vitesse de libération U et on posera $C = (k_B T / m)^{1/2}$.

d) Sans intégrer d'équation différentielle, en déduire une condition pour que les particules émises à la surface du Soleil avec une vitesse très petite devant C puissent atteindre des vitesses très supérieures à C . Cette condition sera exprimée sous la forme d'une relation entre la vitesse de libération U et la vitesse quadratique moyenne V et commentée qualitativement.

24) Vidange d'un tuyau : on considère le tuyau de la figure ci-dessous, de section constante S , formant un coude AOB dont les bras AO vertical et OB horizontal ont même longueur L . A l'instant $t = 0$, le tube est rempli d'eau au repos. A un instant t ultérieur, le tube se vide et on note C le point situé à la surface libre de l'eau dans le bras vertical et $h(t)$ sa cote. On suppose l'écoulement parfait, incompressible et homogène de masse volumique μ , unidimensionnel, décrit par le champ de pression $P(s, t)$ et le champ des vitesses $\mathbf{v}(M) = v(s, t) \mathbf{u}$ où s est l'abscisse curviligne mesurée à partir de C le long de la ligne de courant moyenne (C) et $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire tangent à (C) .



a) Montrer que $v(s, t)$ est indépendant de s et l'exprimer en fonction de dh / dt .

b) Etablir l'équation différentielle (E) du second ordre dont $h(t)$ est solution.

c) Obtenir une intégrale première temporelle de (E) et en déduire la vitesse de l'écoulement au moment où le bras vertical est vidé.

26) Goutte d'eau qui tombe dans un nuage :

A $t = 0$, une goutte d'eau sphérique de rayon r_0 , animée d'une vitesse v_0 tombe dans un nuage. L'humidité du milieu fait croître le rayon $r(t)$ de la goutte lors de la chute. La croissance du rayon est modélisée par $r(t) = r_0(1 + at)$, avec $a > 0$. La masse volumique de l'eau est notée μ et la masse de la goutte $m(t)$.

a) Déterminer l'expression de dm / dt en fonction de la surface $s(t)$ de la goutte, de μ , a et r_0 .

b) Déterminer en fonction de $v(t)$ l'équation du mouvement de la goutte. En déduire $v(t)$.

c) Reprendre l'étude précédent en tenant compte d'une force de frottement de type visqueux $(-\beta m(t) \vec{v}(t))$.

Solution :

a) La masse de la goutte est $m(t) = \frac{4}{3} \pi \mu r_0^3 (1 + at)^3$. D'où :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{4}{3} \pi \mu r_0^3 3a(1+at)^2 = a\mu r_0 s(t)$$

b) La goutte constitue un système de masse variable. A l'instant t : $p(t) = m(t)v(t)$. A l'instant $t + dt$, $p(t + dt) = m(t + dt)v(t + dt)$. Le théorème du CI donne (axe vertical descendant) :

$$p(t + dt) - p(t) = m(t)g dt$$

Soit :

$$[m(t) + dm][v(t) + dv] - m(t)v(t) = m(t)g dt$$

$$m(t)dv + dm v(t) = m(t)g dt$$

D'où :

$$\frac{1}{m(t)} \frac{dm}{dt} v(t) + \frac{dv(t)}{dt} = g$$

Soit :

$$\frac{3a}{1+at} v(t) + \frac{dv(t)}{dt} = g$$

On obtient une équation linéaire avec second membre, dont la solution générale est celle de l'ESSM ajoutée à une SP de l'équation globale. Pour déterminer la solution générale de l'ESSM, on sépare les variables :

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{3a}{1+at} v(t) \quad d'où \quad \frac{dv}{v} = -\frac{3a}{1+at} dt$$

Soit :

$$\ln(v) = -3 \ln(1+at) + K \quad ou \quad v = \frac{K}{(1+at)^3}$$

On cherche une solution particulière de la forme $v_p = b + ct$:

$$\frac{3a}{1+at}(b+ct) + c = g \quad soit \quad 3a(b+ct) = (1+at)(-c+g) = 0$$

Par identification :

$$3ab = -c + g \quad ; \quad 3ac = a(-c + g)$$

Soit :

$$c = \frac{g}{4} \quad ; \quad b = \frac{g}{4a} \quad ; \quad v_p = \frac{g}{4a}(1+at)$$

La solution complète est alors :

$$v = \frac{K}{(1+at)^3} + \frac{g}{4a}(1+at)$$

A $t = 0$, la vitesse étant nulle, on déduit finalement :

$$v = \frac{v_0 - \frac{g}{4a}}{(1+at)^3} + \frac{g}{4a}(1+at)$$

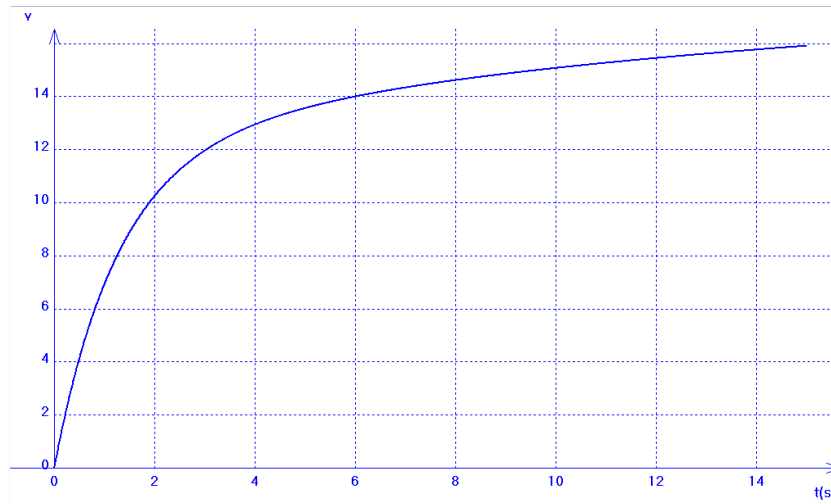
c) De la même manière, on obtient :

$$\frac{3a}{1+at} v(t) + \beta v(t) + \frac{dv(t)}{dt} = g$$

Résolutions numériques avec Regressi et MAPLE :

La courbe suivante a été tracée (avec Regressi) avec les valeurs numériques suivantes (dans le SI) :

$a = 0,1$; $g = 10$; $\beta = 0,5$; vitesse initiale v_0 nulle



Résolution avec MAPLE :

