Statique des fluides, milieu fluide continu

Modèle continu Nombre de Knudsen

Milieu continu si $\mathcal{K}_n = \frac{lpm}{L} \ll 1$.

Contraintes Un fluide, de volume V et délimité par une surface fermée S_f, est soumis à des forces volumiques dans V mais aussi à des forces surfaciques sur sa surface fermée, proportionnelles à l'élément de surface concerné, on peut les écrire au point M sur l'élément de surface dS_M : $d\vec{F}(M) = \vec{\tau}(M)dS_M$.

$\vec{\tau}(M)$ est la contrainte exercée en M sur l'élément de surface dS_M, homogène à une pression. On peut la décomposer en $\vec{\tau}_n(M)$ et $\vec{\tau}_t(M)$ appelées contrainte normale et contrainte tangentielle. Les contraintes normales sont reliées à la pression. Si $P(M) > 0$, compression et si $P(M) < 0$, traction.

$$d\vec{F}_n(M) = \vec{\tau}_n(M)dS_M = -P(M)\overrightarrow{dS_M}$$

Fluide parfait Les contraintes sont toujours normales, les couches de fluides glissent les unes par rapport aux autres sans frottement. Il n'y a pas de dissipation d'énergie.

Fluide réel En statique, les contraintes sont normales mais quand le fluide est en mouvement, il apparait une composante tangentielle (forces de viscosité surfaciques). Les couches de fluides frottent les unes par rapport aux autres en se déplaçant. Il y a dissipation d'énergie.

Equations générales de la statique des fluides avec la masse volumique μ du fluide et $\vec{f}_v$ la densité volumique de forces (réparties volumiquement) :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}P = \vec{f}_v}$$

Exemples de $\vec{f}_v$: $\vec{f}_v = \mu\vec{g}$ pour la pesanteur ou $\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}$ pour les actions de Laplace ou $\vec{f}_v = \mu\,\omega^2\overrightarrow{HM}$ dans un référentiel non galiléen en rotation uniforme par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen.

La **résultante des forces de pression** appliquées à un solide totalement immergé dans un fluide (ou plusieurs immiscibles) est $\vec{R}_{pression} = -\iiint \overrightarrow{grad}P(M)dV_M$, le tout à l'équilibre.

En **hydrostatique** (fluide incompressible soumis aux seules forces de pesanteur), on l'appelle poussée d'Archimède. Elle s'identifie à l'opposé du poids des fluides déplacés. Démonstration : $\overrightarrow{grad}P = \mu_f\vec{g}$ et

$$\vec{\Pi}_A = -\oiint P(Q)\overrightarrow{dS_Q} = -\iiint \overrightarrow{grad}P(M)dV_M = -M_f\vec{g}$$

On peut tout de même appliquer cette définition pour un solide partiellement immergé ou ayant des mouvements de faible amplitude par rapport au fluide.

N.B : si le référentiel est non galiléen ou s'il y a des forces volumiques autres que la pesanteur, revenir à la définition de la résultante des forces de pression : $\vec{R}_{pression} = -\iiint \overrightarrow{grad}P(M)dV_M$.

Cinématique des fluides

On définit la **particule fluide** de taille mésoscopique c'est à dire de taille L telle que $L_{macro} \gg L \gg lpm$ avec lpm le libre parcours moyen (distance moyenne parcourue par les molécules entre deux collisions). La particule fluide est de masse fixée mais de volume mésoscopique variable donc sa masse volumique varie.

Point de vue de Lagrange et point de vue d'Euler

Lagrange On fait, à l'instant initial, une partition du fluide en particules fluides et on suit chaque particule fluide notée pf dans son mouvement : $\overrightarrow{v}_{pf}(M,t)$ pour une particule fluide pf qui est en M à l'instant t (elle était en M_o à $t=0$).

Euler C'est un point de vue de champ. Soit un observateur au point M fixe, il observe l'évolution temporelle des grandeurs physiques en ce point : $\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{v}_{pf}$ avec pf, la particule fluide qui passe en M à l'instant t.

La dérivée particulaire de la masse volumique (ou de toute autre grandeur scalaire) vaut :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} = lim_{dt\to 0}\frac{\mu(M',t+dt)-\mu(M,t)}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad})\mu}$$

Par définition de l'**accélération de la particule fluide** qui est en M à t et en M' à $t+dt$ (c'est la dérivée particulaire de la vitesse) :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M,t) = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = lim_{dt\to 0}\frac{\overrightarrow{v}_{pf}(M',t+dt)-\overrightarrow{v}_{pf}(M,t)}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}}$$

$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ accélération locale et $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}$ accélération convective.

Débits volumique et massique : $D_v = \int\int \overrightarrow{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$ et $D_m = \int\int \mu(M,t)\overrightarrow{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$

Retenir écoulement permanent : $D_m = Cste$ à travers toute section droite d'un même tube de champ des vitesses appelé aussi tube de courant.

Retenir écoulement incompressible : $D_v = f(t)$ à travers toute section droite d'un même tube de courant.

Conditions aux limites dans les problèmes : la **vitesse** est **continue** quand le **fluide** est **réel**. Mais dans la **modélisation fluide parfait**, seule la **composante normale de la vitesse est continue**.

Les **contraintes** (tangentielles et normales) sont **continues** dans un fluide. Dans un fluide parfait aussi, la contrainte tangentielle est nulle et continue à une interface, la contrainte normale est continue.

Conservation de la masse, pour une masse M(t) dans un volume délimité par une surface fermée :

$$-\frac{dM(t)}{dt} = \oiint \mu\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{dS} = D_m \text{ sortant à travers la surface fermée}$$

Equations locales

Equation locale de la conservation de la masse

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{\partial \mu}{\partial t} + div(\mu \overrightarrow{v}) = 0 \\ \textbf{écoulement permanent} : div(\mu \overrightarrow{v}) = 0 \\ \textbf{écoulement incompressible} : div \overrightarrow{v} = 0\end{array}}$$

Equation d'Euler locale application du principe fondamental de la dynamique à la particule fluide pour un **écoulement parfait** (forces de viscosité négligées) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mu dV \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{grad} P \, dV + \overrightarrow{f}_v \, dV \\ \mu \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{grad} P + \overrightarrow{f}_v\end{array}}$$

On peut linéariser l'équation d'Euler si l'accélération locale est grande devant l'accélération convective ce qui est réalisée quand $v \ll c$ avec c la célérité des ondes sonores dans le fluide. On appelle le nombre de Mach $\mathcal{M} = v/c$.

Viscosité des fluides, aspect mésoscopique

Dans le cadre de la **modélisation du fluide dit Newtonien** et pour un écoulement unidirectionnel de type $\overrightarrow{v}(M,t) = v(y,t)\overrightarrow{u}_x$: la contrainte tangentielle s'écrit $\overrightarrow{\tau}_t(M,t)) = -\eta \frac{\partial v(y,t)}{\partial y} \overrightarrow{u}_x$ avec η le coefficient de viscosité dynamique, qui ne dépend que du fluide (et pas de la contrainte).

Couette plan Ecoulement fluide entre deux plaques infinies ($y = 0$ et $y = a$) dont l'une se déplace à la vitesse $\overrightarrow{U}_o$. Situation de cisaillement.

On calcule la résultante des forces de viscosité sur une particule fluide $dV = Sdy$:

$$+\eta \left(\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}\right)(y+dy)S\overrightarrow{u}_x - \eta \left(\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}\right)(y)S\overrightarrow{u}_x = \eta \left(\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}\right) Sdy\overrightarrow{u}_x$$

L'application du principe fondamental de la dynamique à la particule fluide donne :

$$\mu dV \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{grad} P \, dV + \overrightarrow{f}_v \, dV + \eta \left(\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}\right) dV \overrightarrow{u}_x$$

Si on projette selon $\overrightarrow{u}_x$ (axe horizontal) en remarquant que dans cette géométrie $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$:

$$\mu \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}\right)$$

On reconnait une équation de type diffusif avec $\nu = \frac{\eta}{\mu}$, coefficient de diffusion de la quantité de mouvement ou coefficient de viscosité cinématique.

En régime **permanent**, $v(y) = \alpha y + \beta$. **Conditions aux limites** : la vitesse est continue car le fluide est réel. $v(y) = \frac{U_o \, y}{a}$. $D_v = U_o \frac{S}{2}$ et par définition de la vitesse moyenne $v_m = \frac{D_v}{S} = \frac{U_o}{2}$. Le **profil des vitesses** est **linéaire**.

Poiseuille plan Ecoulement fluide entre deux plaques infinies fixes ($y = 0$ et $y = a$) sous l'action d'un gradient de pression selon $\overrightarrow{u}_x$, gradient constant qu'on note $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} > 0$ avec $\Delta P = P(x = 0) - P(L)$.

Si on projette selon $\overrightarrow{u}_x$ (axe horizontal) :

$$\mu \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} \right)$$

En régime **permanent**, $v(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$. **Conditions aux limites** : la vitesse est continue car le fluide est réel. $v(y) = \frac{\Delta P}{2L\eta} y(a-y)$. $D_v = \frac{a^2 \Delta P}{12L\eta} S$ et par définition de la vitesse moyenne $v_m = \frac{a^2 \Delta P}{12L\eta}$. Le **profil des vitesses** est **parabolique**.

Dans le cas de la **symétrie cylindrique** **Poiseuille cylindrique** (et Couette cylindrique), cas de la circulation sanguine, montée de la sève des arbres : $\overrightarrow{v}(M,t) = v(r,t)\overrightarrow{u}_z$, la particule fluide a un volume $dV = 2\pi r dr dz$. Pour un fluide newtonien $\overrightarrow{\tau}_t(M,t)) = -\eta \dfrac{\partial v(r,t)}{\partial r} \overrightarrow{u}_z$ et les forces de viscosité sur la particule fluide s'écrivent :

$$+\eta \left(\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right) (r+dr) 2\pi (r+dr) dz \overrightarrow{u}_z - \eta \left(\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right) (r) 2\pi r dz \overrightarrow{u}_x = \eta \left(\frac{\partial (\frac{r \partial v(r,t)}{\partial r})}{r \partial r} \right) dV \overrightarrow{u}_x$$

Dans le cas général, les forces de viscosité sur la particule fluide s'écrivent : $\eta \Delta \overrightarrow{v}\, dV$ donc présentent une densité volumique $\eta \Delta \overrightarrow{v}$ (ce sera donné à l'écrit). En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la particule fluide :

$$\mu dV \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{grad} P\, dV + \overrightarrow{f}_v\, dV + \eta \Delta \overrightarrow{v}\, dV$$

$$\boxed{\mu \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{grad} P + \overrightarrow{f}_v + \eta \Delta \overrightarrow{v}}$$

Cette équation est appelée **équation de Navier-Stokes**.

Nombre de Reynolds, écoulements laminaire et turbulent, écoulements réel et parfait, couche limite

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui compare les phénomènes de transport de quantité de mouvement par convection à ceux par diffusion. Il permet de comparer les effets inertiels ($\mu(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad})\overrightarrow{v}$) aux effets de viscosité. U est un ordre de grandeur typique des vitesses dans l'écoulement et L une échelle spatiale typique de l'écoulement.

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\mu U^2/L}{\eta U/L^2} = \frac{U\ L}{\nu}}$$

Un **écoulement laminaire** est un écoulement ordonné, régulier où les fluctuations de vitesse sont négligeables devant la vitesse moyenne de l'écoulement.

Un **écoulement turbulent** est un écoulement désordonné, chaotique où les fluctuations de vitesse sont du même ordre de grandeur que la vitesse moyenne de l'écoulement.

Un **écoulement parfait** est un écoulement où tous les phénomènes diffusifs peuvent être négligés. Il est considéré isentropique (phénomènes diffusifs irréversibles).

On peut assimiler les écoulements réels à des écoulements parfaits loin des obstacles, c'est à dire en dehors de la **couche limite** d'épaisseur δ où **les forces de viscosité jouent un rôle prépondérant**. La couche limite fait passer la composante tangentielle de la vitesse de sa valeur dans l'écoulement parfait à sa valeur sur l'obstacle. On peut évaluer son épaisseur δ avec $\mu(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} \simeq \eta\Delta\overrightarrow{v}$ à la limite des deux zones d'où $\frac{\mu U^2}{L} \simeq \frac{\eta U}{\delta^2}$ ce qui donne $\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}}$. Cette expression permet d'évaluer l'épaisseur de la couche limite mais n'a de sens que si $\delta \ll L$.

On peut définir un nombre de Reynolds local en prenant pour échelle spatiale typique δ. On trouve $\mathcal{R}_{e\ local} = \sqrt{\mathcal{R}_{e\ global}}$.

Dans les problèmes de concours, une réponse simpliste souvent demandée peut être : laminaire aux petits nombres de Reynolds (petit devant 1000), turbulent aux grands nombres de Reynolds (grand devant 1000). Ecoulement rampant $\mathcal{R}_e \ll 1$.

Traînée, aspect macroscopique de la viscosité

Soit une bille sphérique (de rayon r) en chute verticale dans un fluide (vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport au fluide), elle est soumise à son poids apparent (poids + poussée d'Archimède) et à la résultante des forces de viscosité.

Aux petits nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e < 1$, la traînée est linéaire, la formule de Stokes donne $-6\pi\eta r\overrightarrow{v}$. Ecoulement laminaire dominé par les effets de viscosité..
Aux grands nombres de Reynolds $\mathcal{R}_c < \mathcal{R}_e < 10^5$, la traînée est quadratique $-\frac{C\mu}{2}\pi r^2 v(\overrightarrow{v})$ et l'écoulement est turbulent.
Pour $1 < \mathcal{R}_e < \mathcal{R}_c$, écoulement laminaire dominé par les effets inertiels.

On peut généraliser à un **solide de forme quelconque** (taille typique L) et de section S perpendiculaire à l'écoulement. Le nombre de Reynolds critique $\mathcal{R}_c$ dépend de la forme du solide et de la rugosité de sa surface.

Aux petits nombres de Reynolds, la traînée est linéaire, la formule de Stokes donne $-\alpha\eta L\overrightarrow{v}$. Aux grands nombres de Reynolds, la traînée est quadratique $-\frac{C\mu}{2}Sv(\overrightarrow{v})$.

Pour $\mathcal{R}_e > 10^5$ environ, crise de la traînée, la couche limite laminaire devient turbulente. Décollement possible de la couche limite.

La constante C est appelée le C_x pour une voiture ou avion qui se déplace dans un fluide initialement au repos, $-\frac{\mu}{2}\ C_x S v^2(\overrightarrow{v}/v)$ avec S, la surface du véhicule dans la direction perpendiculaire à la vitesse d'écoulement. Tout se passe, dans le référentiel du véhicule, comme si le fluide s'écoulait autour d'un obstacle fixe. La résultante des actions exercées par le fluide en écoulement sur le véhicule se décompose en la traînée (colinéaire à la vitesse d'écoulement et s'y opposant) et la portance perpendiculaire à la vitesse d'écoulement.
On peut aussi définir le C_z, la portance est égale à $-\frac{\mu}{2}\ C_z S v^2$.

Il faut connaître l'allure de la courbe $C_x = f(\mathcal{R}_e)$ en diagramme log-log.
Crise de la traînée : la couche limite laminaire devient turbulente, la traînée chute et cela correspond aussi à une chute de la portance.
Pour l'aile d'avion profilée, la chute de la portance a lieu pour une inclinaison de l'aile d'environ 15° à 20°.

Dynamique des fluides. Théorèmes de Bernoulli

Les théorèmes de Bernoulli sont obtenus en intégrant, à t fixé, l'équation d'Euler locale le long d'une ligne de courant qui doit exister ! !

L'énoncé le plus utile est, pour un **écoulement parfait, incompressible, permanent, le long d'une même ligne de courant** qui va de A vers B :

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{\mu v^2}{2} + P + \mu g z = Cste \\ \dfrac{\mu v_A^2}{2} + P_A + \mu g z_A = \dfrac{\mu v_B^2}{2} + P_B + \mu g z_B\end{array}}$$

NB : Pour un **écoulement parfait, incompressible, permanent et irrotationnel**, $\dfrac{\mu v^2}{2} + P + \mu g z = Cste$ dans tout le volume de l'écoulement mais c'est plus restrictif.

Il faut savoir redémontrer les variantes vues en cours mais retenir la méthode plus que les résultats. Par exemple, pour un écoulement parfait, incompressible, non permanent et dans un tube de section constante, il faut d'abord démontrer que v ne dépend que du temps donc est uniforme ($D_v = f(t)$ et section constante).

Il faut connaître l'effet Venturi, la loi de Torricelli, le tube de Pitot, l'effet Magnus ... mais quand les conséquences de Bernoulli ne sont pas en accord avec l'expérience, il faut remettre en cause l'hypothèse écoulement parfait surtout si l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de la taille du tube ou de l'obstacle.

Bilans macroscopiques

Tous les théorèmes applicables à un système matériel Σ fermé sont valables pour un système fluide fermé (ou un système mixte fermé (solide + fluide)), il faut **utiliser impérativement la notation de dérivée globale** et définir proprement le système (à t et à t+dt) avec dessin à l'appui avant d'énoncer tout théorème.

$$\left(\frac{D\overrightarrow{P}(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = lim_{dt->0}\left(\frac{\overrightarrow{P}(\Sigma)(t+dt) - \overrightarrow{P}(\Sigma)(t)}{dt}\right)$$

Les théorèmes de la dynamique dans un référentiel galiléen

$$\left(\frac{D\overrightarrow{P}(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}$$

$$\left(\frac{D\overrightarrow{L}_A(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = \overrightarrow{M}_{\text{A ext}} \text{ avec A fixe dans R galiléen}$$

$$\left(\frac{DL_\Delta(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = M_{\Delta\text{ext}} \text{ avec l'axe fixe dans R galiléen}$$

$$\left(\frac{DE_c(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

$P_{\text{int}} = 0$ pour un écoulement parfait ET incompressible.

Le premier principe peut s'écrire :

$$\left(\frac{D(U+E_{c\ macro})(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = P_{\text{thermique}} + P_{\text{macro}}$$

On peut démontrer de manière énergétique le théorème de Bernoulli.

Exemple de bilan de quantité de mouvement, en régime permanent, avec une seule entrée et une seule sortie.

$$\left(\frac{D\overrightarrow{P}(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = D_m(\overrightarrow{v}_s - \overrightarrow{v}_e)$$

Pour un **système propulsif** en régime non permanent, **poussée** (pas d'entrée, une sortie de débit massique D_m à la vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport au véhicule de vitesse $\overrightarrow{V}$) :

$$\left(\frac{D\overrightarrow{P}(\Sigma/R)}{Dt}\right)_R = \left(\frac{\partial\overrightarrow{P}(\Sigma)}{\partial t}\right) + D_m\overrightarrow{v}_s = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}$$

$$M_\Sigma(t)\frac{\partial\overrightarrow{V}(\Sigma)}{\partial t} = \overrightarrow{R}_{\text{ext}} - D_m\overrightarrow{u}$$

Exemple de bilan de moment cinétique scalaire du **tourniquet hydraulique** en régime permanent (une entrée D_m, deux sorties à la vitesse $\overrightarrow{v}_e$ par les becs d'éjection inclinés d'un angle α par rapport aux bras pour pouvoir emporter du moment cinétique et faire tourner le tourniquet) avec une liaison pivot parfaite :

$$\left(\frac{DL_\Delta(\Sigma)}{Dt}\right) = D_m(R^2\omega - Rv_e\sin\alpha) = M_{\Delta\text{ext}} = 0$$

$$\omega = \frac{v_e\sin\alpha}{R}$$

En **CONCLUSION**, selon les questions posées, il faut s'orienter soit sur l'écriture d'équations locales, soit sur celle du théorème de Bernoulli soit sur celle d'un bilan macroscopique. Une équation locale ne permettra jamais de calculer une force sur un système macroscopique Σ ! Si on veut relier la pression ou la vitesse en un point de l'écoulement à celles d'un autre point, il n'y a que Bernoulli. Si on veut des informations sur la dépendance de la vitesse avec les coordonnées spatiales, une équation locale sera appropriée.

Ondes sonores dans l'approximation acoustique

Il faut partir des équations locales : équation d'Euler locale (fluide parfait, on néglige les effets de la pesanteur), équation locale de conservation de la masse et une description thermodynamique de l'évolution du fluide, souvent la donnée de χ_S pour une évolution isentropique.

On linéarise l'équation d'Euler dans le cadre de l'approximation acoustique (infiniments petits du même ordre $\frac{P-P_o}{P_o} = \frac{p}{P_o} \ll 1$, $\frac{v}{c} \ll 1$ et $\frac{\mu-\mu_o}{\mu_o} \ll 1$ ainsi que leurs dérivées partielles), l'accélération convective est un terme d'ordre 2. On obtient à l'ordre 1 :

$$\mu_o\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}p$$

$$\mu_o div\vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_S \simeq \frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\mu_o \frac{\partial \mu}{\partial t}}$$

On obtient une équation de d'Alembert pour la surpression et après démonstration de $\overrightarrow{rot}\vec{v} = 0$, la même équation pour la vitesse avec $c^2 = \frac{1}{\mu_o\ \chi_S}$.

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\Delta}\vec{v} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On en déduit la relation de dispersion pour une Onde Plane Progressive Harmonique (outil de résolution des équations de d'Alembert) de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$ avec $\vec{u}$ direction de propagation de l'onde : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

Onde Plane Progressive Harmonique $\overrightarrow{rot}\vec{v} = 0$ implique que l'**onde sonore** est **longitudinale** d'où $\vec{v} = v\vec{u}$. Ensuite $\mu_o \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}p$ implique que $p = \mu_o c\ v$ donc p et v vibrent en phase.

Pour une propagation selon $-\vec{u}$: $p = -\mu_o c\ v$.

On peut généraliser pour une Onde Plane Progressive (somme sur ω d'Onde Plane Progressive Harmonique). La solution finale dépend des conditions aux limites (et des conditions initiales).

Comme dans tout problème d'ondes dans un milieu parfait (équation de d'Alembert), les conditions aux limites guident votre choix de forme générale pour la solution. S'il y a un noeud de vitesse, on peut chercher sous forme d'ondes stationnaires.

Pour un problème de **changement de milieu**, il faut écrire l'onde incidente, en déduire les ondes réfléchies et transmises pour v et p. A l'interface, le **débit volumique** est toujours **continu**. Quant à la surpression, il faut s'adapter à l'énoncé. Pour deux fluides immiscibles (sans paroi matérielle entre eux), la surpression est continue.

Aspects énergétiques Si on s'intéresse à la propagation d'une onde sonore dans un tuyau de section constante, on peut évaluer la densité volumique d'énergie liée à cette propagation et on démontre que $e = \dfrac{1}{2}\mu_o v^2 + \dfrac{\chi_S}{2}p^2$, le second terme est lié à la compressibilité du fluide. On peut aussi définir un vecteur densité de courant d'énergie sonore $p\vec{v}$.

Intensité acoustique en décibels $I_{dB} = 10log\frac{P_{surfaciquemoyenné}}{P_{ref}}$ avec $P_{ref} = 10^{-12}\ Wm^{-2}$. Pour une onde plane sonore progressive : $I_{dB} = 10log\frac{<pv>}{P_{ref}} = 10log\frac{\mu_o\ c<v^2>}{P_{ref}}$.

Problèmes avec section variable

(dilatation des vaisseaux par exemple ou ondes de surface), il faut écrire la conservation de la masse d'une tranche élémentaire. Dans le cas unidimensionnel (choix variable x), pour une tranche $dV = Sdx$ on peut écrire :

$$-\frac{\partial(\mu S)(x,t)}{\partial t}dx = D_m(x+dx,t) - D_m(x,t) = \frac{\partial(\mu S v)(x,t)}{\partial x}dx$$