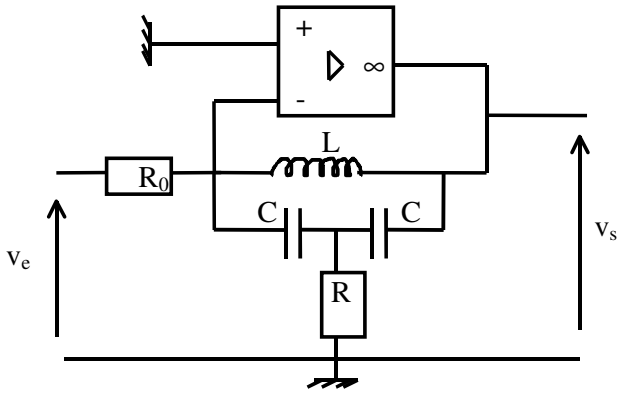
Spé PC*/PC – TP Electricité n°6
Utilisation de l'analyse de Fourier en électronique

I – Mise en évidence des harmoniques d'un signal carré et d'un signal triangulaire

1) Caractéristiques du filtre passe-bande utilisé :

Le filtre actif suivant, réalisé à partir d'un AOP supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire, a été réalisé sur plaquette LAB :



Avec : L= 0,2 mH ; C = 10 nF ; R_0 = 22 kΩ ; R = 10 kΩ.

Quelle est, par une étude purement qualitative, la nature de ce filtre ?

Le générateur BF délivre une tension sinusoïdale de valeur maximale 0,2 V.

Déterminer expérimentalement la fréquence f_0 puis la pulsation ω_0 de résonance de ce filtre.

Quel est le gain du filtre à la résonance ?

Repérer les pulsations de coupure ; en déduire la valeur du coefficient d'amortissement σ du filtre ainsi que la valeur de son facteur de qualité Q.

Le filtre est-il sélectif ?

2) Etude expérimentale :

a) Observation du fondamental :

Le BF délivre désormais une tension créneaux de valeur maximale E = 0,2 V (à valeur minimale nulle) et de fréquence f_0.

* Visualiser expérimentalement à l'oscilloscope la tension du BF et la tension v_s de sortie de l'AOP.

* Déterminer la valeur maximale de v_s. Comparer avec la valeur théorique attendue en utilisant la décomposition en série de Fourier de la tension d'entrée (voir en annexe).

b) Observation des harmoniques :

On diminue lentement la fréquence du signal d'alimentation en gardant la même amplitude (0,2 V). On observe des résonances secondaires pour lesquelles l'intensité dans le circuit est sensiblement sinusoïdale.

Justifier l'existence de ces résonances secondaires et compléter le tableau :

	fondamental	premier harmonique	second harmonique	troisième harmonique
Fréquence f (Hz)				
f / f_0				
$V_{s,max}$ (V) exp				
$V_{s,max}$ (V) théorique				

c) Tension triangulaire :

Reprendre la même démarche lorsque la tension délivrée par le BF est triangulaire.

II – Réponse d'un filtre passe-bas à différentes tensions d'entrée

Un filtre fabriqué à partir d'un circuit série RLC a pour fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\sqrt{5}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

1) Etude théorique :

a) Quelle est la nature du filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ? On donne $\omega_0 = 1{,}2.10^5\ rad.s^{-1}$.

b) Trouver v_s en régime forcé et commenter éventuellement le résultat sachant que v_e vaut successivement : (tensions exprimées en V)

* $v_e(t) = \cos(\omega_0 t)$
* $v_e(t) = \cos(\omega t)$
* $v_e(t) = \cos(\omega_0 t) + 1$
* $v_e(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t)$
* $v_e(t)$ est un créneau (entre 0 et 1 V) de période $T = 10^{-3}\ s$ (puis $T = 10^{-5}\ s$).

2) Etude expérimentale :

Réaliser expérimentalement le filtre en question et visualiser les différents cas à l'oscilloscope. Comparer avec l'étude théorique.

Annexe : rappels et compléments sur la décomposition en séries de Fourier

I) ASPECT MATHEMATIQUE :

I-1) Décomposition en séries de Fourier :

Une fonction périodique f(t) de période T peut, sous certaines conditions mathématiques qui seront toujours réalisées dans la pratique en physique, se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales de la forme : (décomposition en séries de Fourier)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) \qquad \text{(n entier et } \omega = \frac{2\pi}{T}\text{)}$$

Les coefficients a_0, a_n et b_n sont indépendants du temps et sont donnés par les intégrales suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

On remarque que a_0 est la valeur moyenne de la fonction f(t) : a_0 est donc nul si la fonction f(t) est alternative.

Deux cas particuliers :

*** Si la courbe représentative de la fonction f(t) admet un centre de symétrie situé sur l'axe Ox, alors, en choisissant ce point comme origine des temps :

$$f(-t)=-f(t)$$

La fonction f(t) est une fonction impaire ; son développement en séries de Fourier ne comportera que des termes en sinus (les coefficients a_n sont nuls).

*** Si la courbe représentative de la fonction f(t) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, alors f(-t)=f(t) (fonction paire). Le développement en séries de Fourier ne contient alors que des termes en cosinus ((les coefficients b_n sont nuls).

I-2) Spectre en fréquences :

Le terme général $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ est appelé harmonique de rang n. Il peut être mis sous la forme :

$$a_n \cos n\omega nt + nb_n \sin n\omega t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos n\omega t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin n\omega t\right]$$

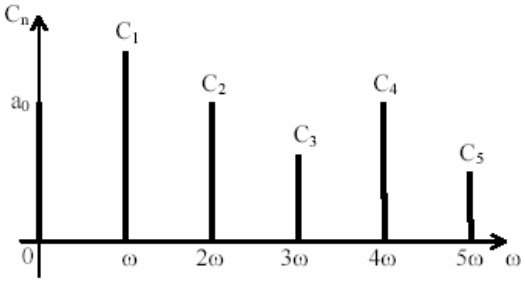
En posant $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$; $\cos\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, il vient :

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = C_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

Et la fonction périodique f(t) peut alors s'écrire : $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$

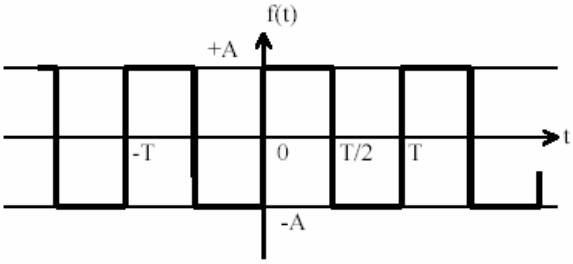
L'harmonique de rang 1 est appelé le fondamental.

On obtient la représentation spectrale de la fonction f(t) en portant en ordonnée l'amplitude des harmoniques (les termes a_n, b_n ou C_n) et en abscisse les pulsations correspondantes, ce qui conduit au diagramme de la figure ci-contre. (avec ici représentés les coefficients C_n)



I-3) Exemples de décomposition en séries de Fourier :

a) Signal carré :

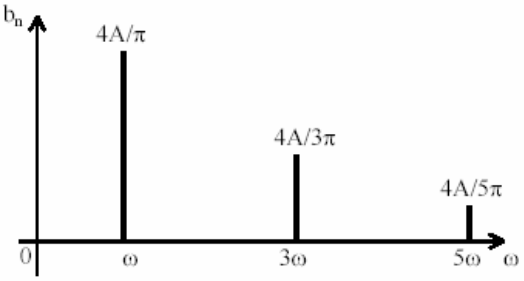


On considère le signal de la figure ci-contre . La fonction f(t) est impaire et sa décomposition ne contiendra que des termes en sinus. On peut calculer :

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t dt = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2A}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Par conséquent, la décomposition ne comprend que des harmoniques d'ordre impair :

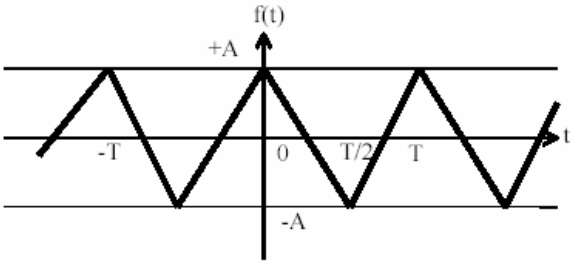


$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right]$$

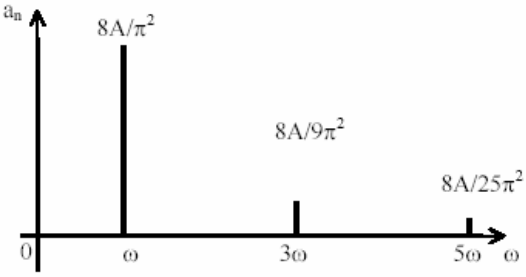
Son spectre est donné sur la figure ci-contre.

b) Signal triangulaire :

On considère le signal triangulaire donné ci-dessous (la fonction f(t) est paire). La décomposition en séries de Fourier s'écrit alors :



Signal triangulaire

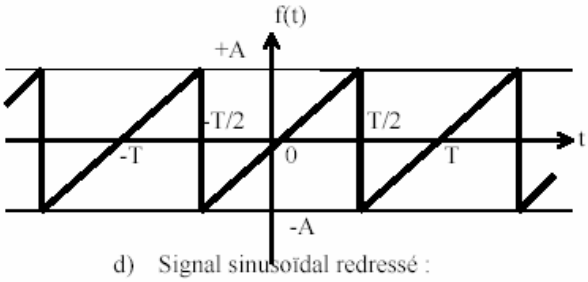


Spectre en fréquences

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + ...\right]$$

On peut remarquer que les harmoniques d'ordre supérieur à 1 sont beaucoup moins importants pour le signal triangulaire que pour le signal carré, ce qui est naturel puisque le signal triangulaire a une forme proche de celle d'un signal sinusoïdal.

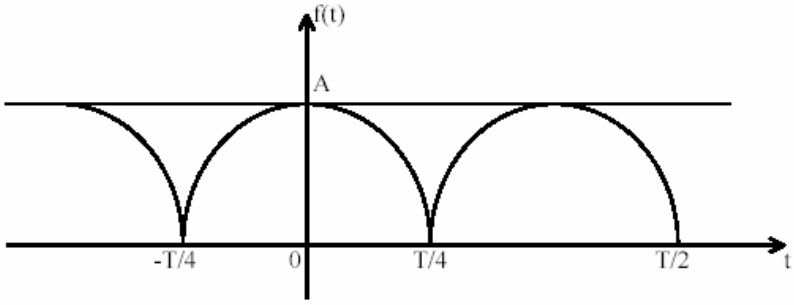
c) Signal en dents de scie :



$$f(t) = \frac{2A}{\pi}\left[\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \frac{1}{4}\sin 4\omega t + ...\right]$$

d) Signal sinusoïdal redressé :

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3.5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5.7}\cos 6\omega t + ...\right]$$



II) Compléments :

1) symétrie de glissement :

On considère une fonction f telle que : (l'alternance négative est identique, au signe près, à l'alternance positive)

$$f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$$

On montre alors, à partir des définitions des coefficients a_n et b_n que (faire un changement de variable) :

* $a_0 = 0$

* $a_{2n} = 0$; $b_{2n} = 0$ (il n'y a pas d'harmoniques de rangs pairs)

* $a_{2n+1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos[(2n+1)\omega t]\,dt$; $b_{2n+1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin[(2n+1)\omega t]\,dt$

2) Valeur moyenne, valeur efficace, formule de Parseval et facteur de forme d'un signal :

Soit un signal s(t) périodique, dont la décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

La valeur moyenne de s(t) est :

$$S_{moy} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = a_0$$

La valeur efficace vaut :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt}$$

En utilisant la décomposition en séries de Fourier :

$$S_{eff}{}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \right]^2 dt$$

Sachant que la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle, que la valeur moyenne d'un produit de deux fonctions sinusoïdales de pulsations différentes est nulle et que la valeur moyenne d'un sinus au carré est 1 / 2, il vient :

$$S_{eff}{}^2 = a_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n{}^2}{2} \qquad \text{(Formule de Parseval)}$$

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme du carré de sa valeur moyenne et des carrés des valeurs efficaces des harmoniques.

Deux cas particuliers :

* Si s(t) est un signal sinusoïdal pur : $S_{eff} = \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}$.

* Si s(t) est un signal sinusoïdal décalé par une composante continue :

$$S_{eff} = \sqrt{a_0{}^2 + \frac{S_{mac}{}^2}{2}}$$

Le facteur de forme (noté f) d'une signal périodique s(t) est le rapport entre la valeur efficace et la valeur moyenne du signal :

$$f = \frac{S_{eff}}{S_{moy}} = \frac{\sqrt{a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n{}^2}}{a_0}$$

Pour un signal continu : f = 1. f n'est pas défini pour un signal périodique de valeur moyenne nulle. Pour un signal sinusoïdal redressé double alternance : $f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$.

3) Distorsion harmonique :

On considère un système électrique non linéaire : lorsque la tension d'entrée est sinusoïdale, la tension de sortie ne l'est pas ou présente une pulsation différente de celle de l'entrée.

On réalise alors une décomposition harmonique du signal de sortie (dans l'hypothèse où celui-ci est périodique) :

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Si le système était rigoureusement linéaire, seuls les coefficients de degré 1 seraient non nuls. Les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 constituent la distorsion harmonique.

On appelle taux de distorsion harmonique, noté DHT et exprimé en dB, le rapport entre la puissance des termes harmoniques et celle du signal total :

$$DHT = 10 \log \frac{\sum_{k=2}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}$$

Pour un système linéaire, DHT tend vers $-\infty$.

Exemple : la sortie est reliée à l'entrée par la relation :

$$s = s_0 + a\, e + b\, e^2 + c\, e^3$$

Avec : $s_0 = 0{,}1\, V$; $a = 10$; $b = 0{,}1\, V^{-1}$ *et* $c = 0{,}01\, V^{-2}$ $(et\ -1\, V \le e \le 1\, V)$.

On suppose l'entrée sinusoïdale : $e(t) = E \cos \omega t$. La sortie devient alors :

$$s = s_0 + a\, (E \cos \omega t) + b\, (E \cos \omega t)^2 + c\, (E \cos \omega t)^3$$

Avec :

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \qquad et \qquad \cos^3 \omega t = \frac{\cos(3\omega t) + 3\cos \omega t}{4}$$

Il vient :

$$s(t) = s_0 + b\frac{E^2}{2} + \left(aE + \frac{3}{4} cE^3 \right) \cos \omega t + b\frac{E^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{4} cE^3 \cos 3\omega t$$

En supposant E = 1 V, on obtient :

$$s(t) = 0{,}15 + 10 \cos \omega t + 0{,}05 \cos 2\omega t + 0{,}0025 \cos 3\omega t$$

Le taux de distorsion harmonique vaut : $DHT = -46\ dB$. Une analyse harmonique (utilisant un analyseur de spectres, par exemple) permettra de mettre en évidence ces non linéarités.