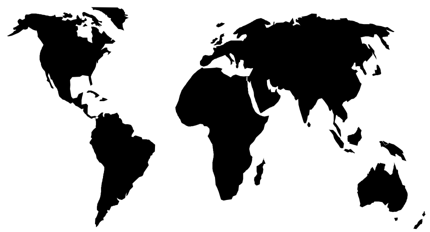
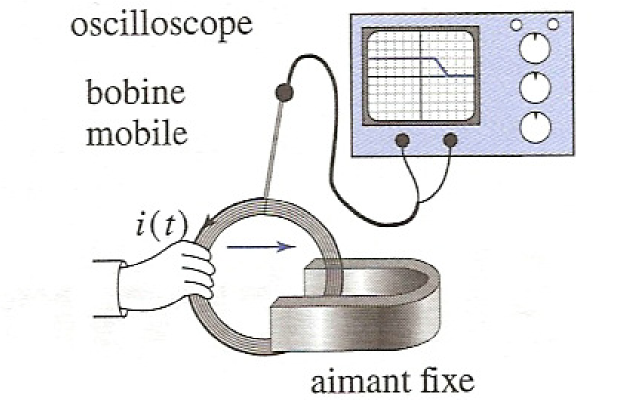
Induction électromagnétique

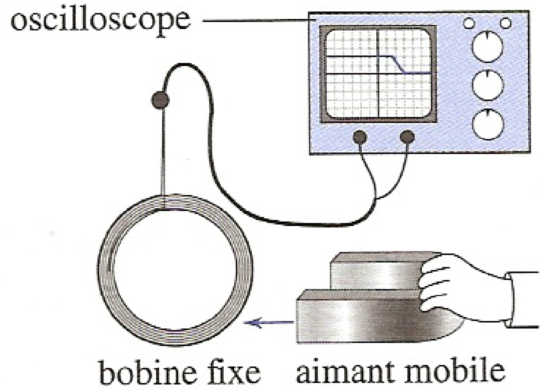


Induction électromagnétique

Présentation qualitative du phénomène d'induction électromagnétique



La bobine mobile (déplacée par l'observateur) se comporte comme un générateur.



La bobine fixe se comporte comme un générateur si l'aimant se déplace.

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur électrocinétique : il est le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors d'induction de Lorentz.

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors de phénomène d'induction de Neumann.

Dans le 1er cas, le déplacement du circuit à vitesse $\vec{v}_e$ (dans le référentiel du laboratoire) dans le champ permanent $\vec{B}_0$ de l'aimant entraîne l'apparition d'une force magnétique $q\,\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$ susceptible de faire circuler les charges de conduction du circuit.

Dans le 2ème cas, le circuit, fixe dans le référentiel du laboratoire, voit apparaître un champ magnétique variable créé par l'aimant. L'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

montre l'apparition d'un champ électrique induit capable de mettre en mouvement les charges du circuit

Rappels d'électromagnétisme (« Equations locales de l'EM »)

Rappels sur les équations de Maxwell et le potentiel vecteur :

Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ EM $(\vec{E}, \vec{B})$ et ses sources $(\rho, \vec{j})$:

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad (Equation\ du\ flux\ magnétique - Flux)$$

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Gauss - MG)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Faraday - MF)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Ampère\ - MA)$$

Définition des potentiels ($\vec{A}$,V) :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans le cas du régime permanent $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$, on retrouve l'expression classique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$.

Potentiels permanents :

En régime permanent, les équations de Poisson se réécrivent sous la forme :

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \qquad \text{et} \qquad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette dernière équation a pour solution la solution bien connue (loi de Coulomb pour le potentiel électrostatique) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S)}{SM} d\tau$$

(On note M le point où l'on calcule le potentiel, S un point source de la distribution (D) de charges, r = SM et $\vec{r} = \overrightarrow{SM} = r\,\vec{u}$).

Chaque composante A_x, A_y et A_z vérifient la même équation que V ; par conséquent :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S)}{SM} d\tau$$

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

- Nature de l'approximation :

Cette approximation consiste à négliger les retards qui interviennent dans les expressions des potentiels retardés, c'est-à-dire à utiliser en régime non permanent les potentiels instantanés suivants :

$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)}{SM} \, d\tau$$

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t)}{SM} \, d\tau$$

Cette approximation est justifiée si tous les retards $\Delta t = \frac{SM}{c}$ sont négligeables vis-à-vis d'un temps T caractéristique de l'évolution de la distribution de charges et de courants. Si on suppose cette évolution périodique, T représente alors la période.

L'ARQS néglige les phénomènes de propagation.

Si l'on note $\lambda = cT$ la longueur d'onde du phénomène dans le vide, on a alors :

$$\Delta t = \frac{SM}{c} << T = \frac{\lambda}{c} \qquad soit \qquad SM << \lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

Ainsi, l'ARQS décrit convenablement le champ EM d'une distribution (D) en des points dont les distances SM aux éléments de (D) sont faibles devant la longueur d'onde $\lambda = cT$.

Détermination du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le cadre de l'ARQS :

Dans le cadre de l'ARQS, on peut donc calculer les potentiels à l'aide des mêmes formules qu'en régime stationnaire, valables à chaque instant :

$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)}{SM} \, d\tau$$

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t)}{SM} \, d\tau$$

L'expression du champ EM $(\vec{E}, \vec{B})$ se déduit de ces deux expressions grâce aux relations :

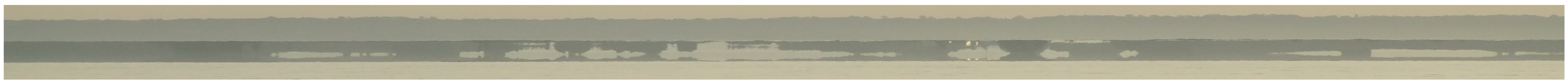
$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\, \vec{A} \qquad et \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On note que la relation entre $\vec{B}$ et $\vec{A}$ est la même qu'en régime stationnaire puisqu'elle ne fait pas intervenir de dérivation par rapport au temps (mais seulement des dérivées d'espace). Par conséquent, la loi de Biot et Savart sera encore valable dans le cadre de l'ARQS.

En revanche, le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ne s'identifie pas, même dans l'ARQS, à un champ de Coulomb instantané du type :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)\,d\tau}{SM^2}\,\vec{u}$$

En raison du terme d'induction $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (champ électromoteur de Neumann).



Loi d’Ohm dans les conducteurs ohmique dans le cadre de l’ARQS :

La loi d’Ohm : pour un conducteur comme le cuivre par exemple, le temps de relaxation (« durée » de collision des porteurs de charges) est de l’ordre de $\tau \approx 10^{-14}\, s$.

Or on sait que, dans un conducteur, la loi d’Ohm est satisfaite si le temps caractéristique d’évolution du système T vérifie $T >> \tau$.

Dans le cadre de l’ARQS, cette condition sera bien vérifiée.

Ainsi, dans le cadre de l’ARQS, la loi d’Ohm locale sera valable :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\left(\overrightarrow{grad}\, V + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

- **Courant de déplacement dans un conducteur ohmique :**

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, compte tenu de la loi d'Ohm locale :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On note T le temps d'évolution caractéristique de la distribution (D) (sa période d'évolution).

On peut comparer le courant de conduction avec le courant de déplacement :

$$\frac{\left|\sigma \vec{E}\right|}{\left|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|} \approx \frac{\sigma E}{\varepsilon_0 \dfrac{E}{T}} = \frac{\sigma T}{\varepsilon_0}$$

Pour le cuivre de conductivité $\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de $10^{18}\,T$ (avec T en s). Ainsi, même si T est de l'ordre de $10^{-10}\ s$ (soit une fréquence de 10 GHz) :

$$\frac{\left|\sigma\vec{E}\right|}{\left|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|} \approx 10^8$$

Par conséquent, pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

Equations de Maxwell dans un conducteur :

Finalement, dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes :

$$div\ \vec{B} = 0$$

$$div\ \vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma\ \vec{E}$$

Ainsi, dans un conducteur, l'ARQS ne diffère des régimes stationnaires que par la prise en compte des phénomènes d'induction (équation de Maxwell-Faraday).

*** Changement de référentiel :**

Formule de changement de référentiel :

Soit $\vec{v}$ la vitesse d'une particule de charge q dans un référentiel (R) et soit $\vec{v}'$ sa vitesse dans un référentiel (R') animé de la vitesse $\vec{v}_e$ par rapport à (R).

On est amené à poser : (expressions de changement de référentiels galiléens du champ EM)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \qquad et \qquad \vec{B} = \vec{B}'$$

A - Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

(Cas de Neumann)

I) Circulation du champ électrique, loi de Faraday, loi de Lenz, définitions des coefficients d'inductance propre L et mutuelle M de deux circuits filiformes :

1 – Circulation du champ électrique :

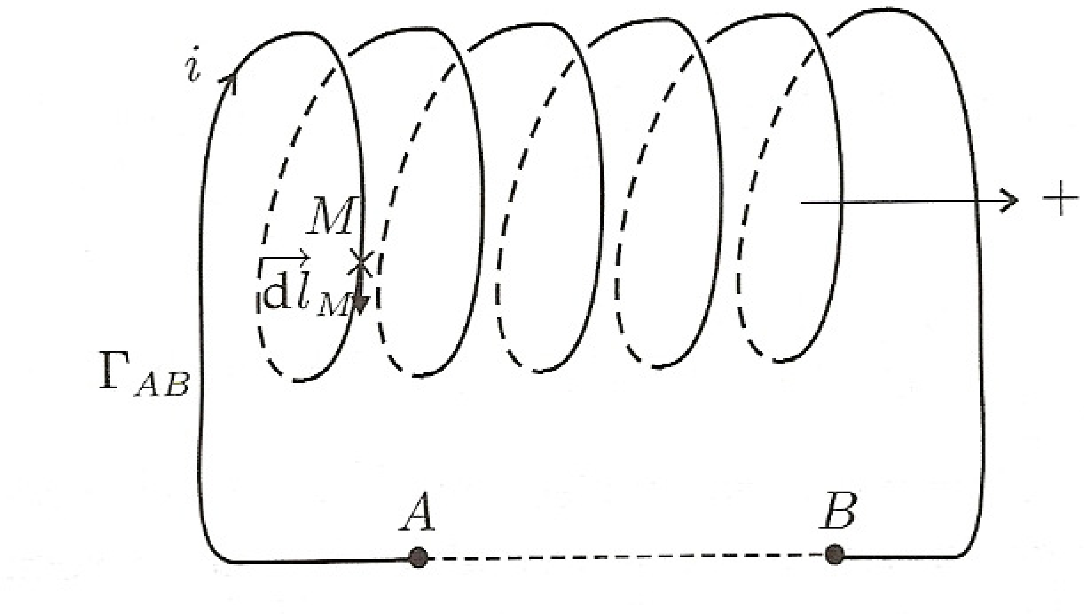
On se place dans le référentiel du laboratoire. Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On considère un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité i. La loi d'Ohm permet d'écrire que :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad et \qquad dR = \frac{d\ell}{\sigma\, S}$$

dR étant la résistance d'une longueur $d\ell$ de conducteur. Par ailleurs, $i = jS$.



On calcule la circulation du champ électrique le long d'une portion de conducteur allant de A à B :

$$\int_{(C_{AB})} \vec{E}.d\vec{\ell} = -(V_B - V_A) + \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) . d\vec{\ell}$$

Or :

$$\int_{(C_{AB})} \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_{(C_{AB})} \frac{\vec{j}}{\sigma}.d\vec{\ell} = \int_{(C_{AB})} \frac{i}{\sigma\, S}.d\ell = \int_{(C_{AB})} i\; dR = R_{AB}i$$

Par conséquent :

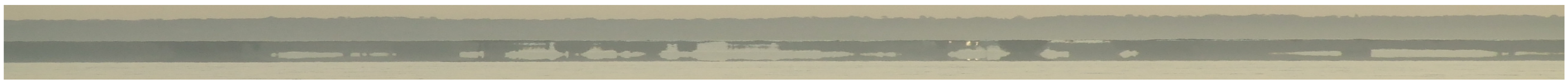
$$R_{AB}i = (\,V_A - V_B\,) + \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell}$$

Dans la suite, on note e_{AB} la circulation du champ électromoteur de Neumann $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ le long du circuit de A à B :

$$e_{AB} = \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell}$$

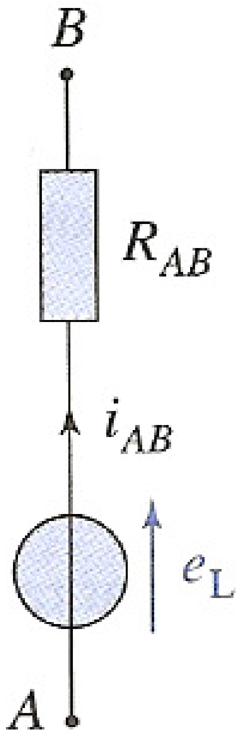
Ainsi :

$$V_A - V_B = R_{AB}i - e_{AB}$$



On comprend alors que le champ magnétique dépendant du temps, source du champ électromoteur de Neumann, puisse créer une fém d'induction e_{AB} et mettre ainsi en mouvement les charges de conduction du circuit.

$$V_A - V_B = R_{AB} i - e_{AB}$$



(Schéma équivalent)

Cas particuliers :

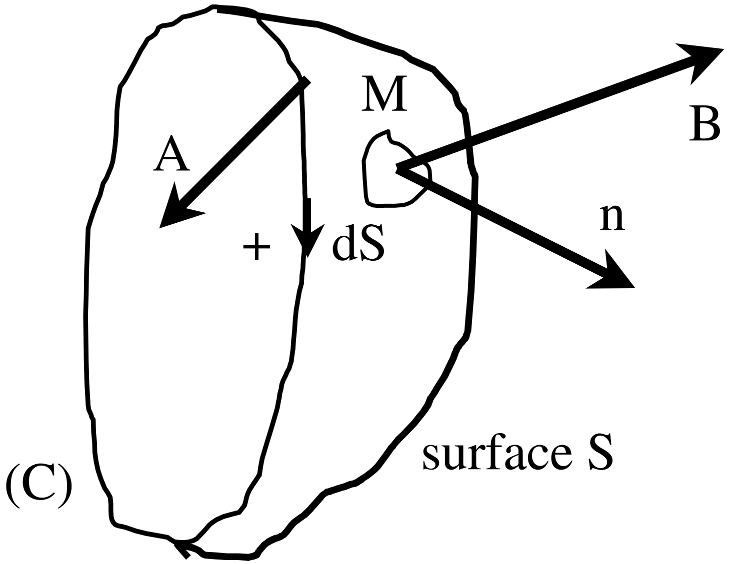
- En circuit ouvert (i = 0) : alors $V_A - V_B = -e_{AB}$.

Le phénomène d'induction se traduit par l'apparition d'une ddp aux bornes du circuit ouvert.

- Le long d'un circuit fermé : $V_A - V_B = 0 \; donc \; e_{AB} = R_{AB} i$.

2 – Loi de Faraday :

On considère le phénomène d'induction le long d'un circuit fermé (C) fixe dans le référentiel du laboratoire.



La circulation du champ électromoteur de Neumann s'écrit, en utilisant le relation de Stockes :

$$e_{AB} = \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) . d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{(C_{AB})} \vec{A}.d\vec{\ell} \right) = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\ \vec{B}.d\vec{S} \right)$$

Soit (loi de Faraday) :

$$e_{AB} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\ \vec{B}.d\vec{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

« La fém induite le long d’un circuit fermé fixe dans le laboratoire galiléen est opposée à la dérivée temporelle du flux magnétique à travers le circuit. »

3 – Loi de Lenz :

Le signe moins de la loi de Faraday résulte des conventions utilisées pour orienter la surface du circuit et définir la fém algébrique et, physiquement, de l'effet modérateur du courant induit.

La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué.

Enoncé de la loi de Lenz :

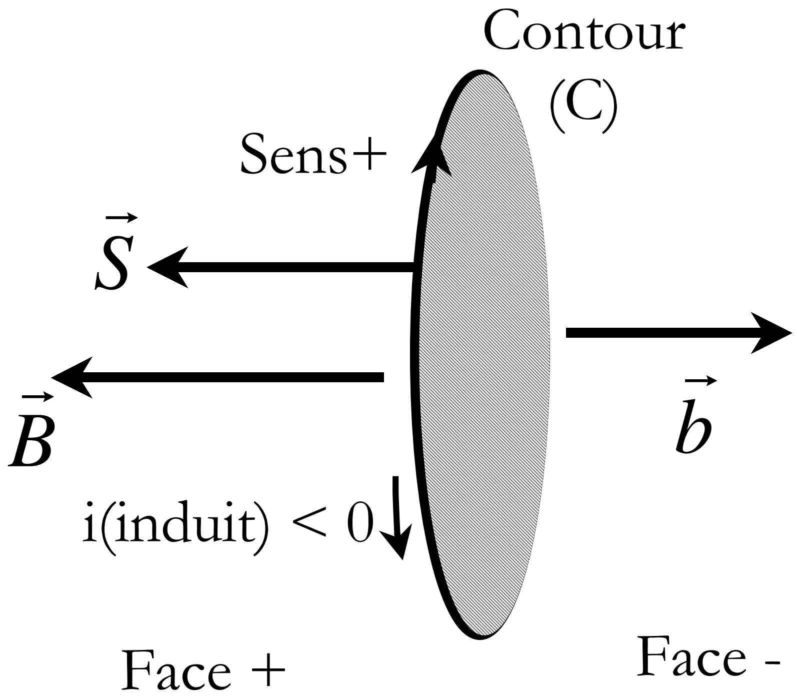
« Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur. »

ou encore :

« La fém induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. »

Exemple ; on considère le système suivant :

La variation du champ magnétique $\vec{B}$ dans le temps est cause d'un flux magnétique variable à travers le circuit, appelé « flux inducteur » et d'une fém induite qui peut débiter un courant dans le circuit (appelé « courant induit »).



Le courant induit créé un champ magnétique propre $\vec{b}$ ou « champ magnétique induit » responsable d'un flux magnétique à travers le circuit appelé « flux induit ».

Si le flux inducteur augmente (la norme du champ $\vec{B}$ augmente), sa dérivée est positive et d'après la loi de Faraday, la fém induite est négative.

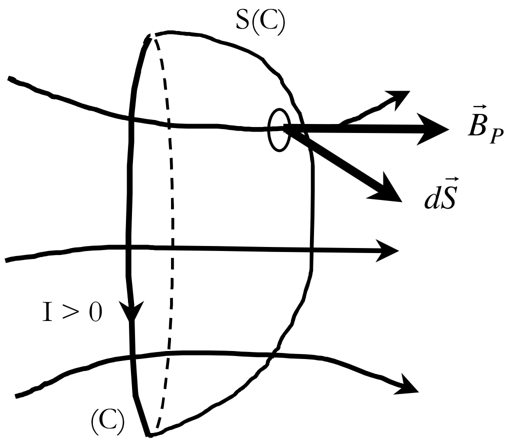
Le courant induit est alors négatif.

Le champ induit $\vec{b}$ s'en déduit (règle de Biot et Savart) et le flux induit est donc négatif quand la variation du flux inducteur est positive : le flux induit s'oppose donc à la variation du flux inducteur, ce qui illustre, sur cet exemple, la loi de Lenz qui apparaît bien comme une loi de modération.

4 - Définitions des coefficients d'inductance propre L et mutuelle M de deux circuits filiformes

a) Inductance propre :

Un circuit fermé filiforme (C) est parcouru par un courant d'intensité I ; son champ magnétique propre $\vec{B}_P(M)$, donné par la loi de Biot et Savart, est proportionnel à I.



Le flux du champ magnétique propre à travers le contour orienté par le sens positif du courant choisi ou « flux propre » est proportionnel à I :

$$\Phi_P = \iint_{(S)} \vec{B}_P . d\vec{S} \propto I \qquad soit \qquad \Phi_P = LI$$

Le coefficient L ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit et s'appelle coefficient d'auto-induction ou d'inductance propre du circuit (C).

Signe de L :

Si $I > 0$, le champ magnétique a le sens représenté sur la figure et le flux est donc positif, donc $L > 0$.

De même, si $I < 0$, le champ magnétique change de sens et le flux devient négatif. Par conséquent, L est un coefficient positif.

Le flux est exprimé en Weber et le coefficient L en Henry.

Exemples :

- Inductance propre d'un solénoïde :

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde « infini » est $\vec{B} = \mu_0 n I \, \vec{u}_z$.

Le flux à travers N spires occupant une longueur L est :

$$\Phi_P = (\mu_0 \frac{N}{\ell} I)\, NS = LI \qquad avec \qquad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

AN : une bobine de longueur 10 cm comportant 100 spires dont le diamètre est de 1 cm a une inductance propre de l'ordre de 0,01 mH : le henry est une assez grande unité.

Des inductances propres plus importantes s'obtiennent avec une bobine à noyau de fer. Mais la relation donnant L est plus compliquée (L dépend non seulement de la géométrie du circuit mais aussi de l'intensité).

- Inductance propre d'une bobine torique de section rectangulaire :

On considère une bobine torique de section rectangulaire de hauteur h et de rayons a et b comportant N spires jointives parcourues par un courant I.

Un plan méridien est plan de symétrie ; en un point de ce plan, en cordonnées cylindriques, le champ propre est orthoradial et dépend *a priori* de r et de z :

$$\vec{B}_P(M) = B_P(r, z)\,\vec{u}_\theta$$

Les lignes de champs sont des cercles d'axe (Oz).

On applique le théorème d'Ampère à la ligne de champ de rayon r :

$$2\pi\, r\, B(r, z) = \mu_0 NI \qquad \textit{soit} \qquad B_P(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Le champ ne dépend finalement pas de la cote z.

Le flux propre à travers les N spires vaut alors :

$$\Phi_P = N\left(\int_a^b B_P(h\,dr)\right) = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On en déduit l'inductance :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Inductance mutuelle, formule de Neumann :

Deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) sont parcourus par des courants d'intensités I_1 et I_2.

Le champ magnétique $\vec{B}_2$ créé par (C_2), donné par la loi de Biot et Savart, est proportionnel à I_2.

Le flux $\Phi_{2\to1}$ de $\vec{B}_2$ à travers le contour fermé (C_1) orienté par le sens positif du courant I_1 est proportionnel à I_2 :

$$\Phi_{2\to1} = M_{2\to1} I_2 \qquad \textit{et de même} \qquad \Phi_{1\to2} = M_{1\to2} I_1$$

Formule de Neumann :

Le flux du champ magnétique à travers une courbe fermée est égal à la circulation du potentiel vecteur dont il dérive :

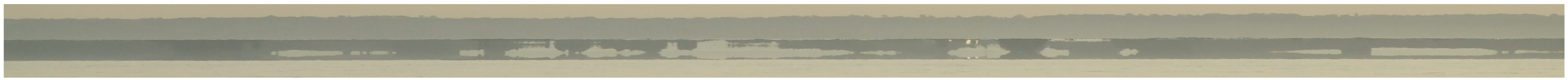
$$\Phi_{2\to1} = \oint_{(C_1)} \vec{A}_2 . d\vec{r}_1 = \oint_{(C_1)} \left[\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2}{S_1 S_2} \right] . d\vec{r}_1 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2 . d\vec{r}_1}{S_1 S_2}$$

Soit :

$$M_{2\to1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2 . d\vec{r}_1}{S_1 S_2}$$

Du fait de la symétrie des indices :

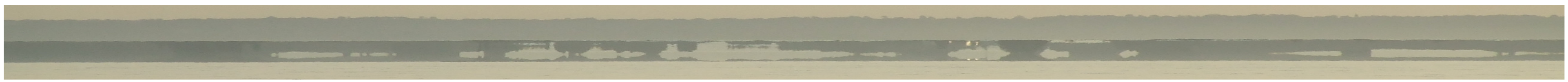
$$M = M_{2\to1} = M_{1\to2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2 . d\vec{r}_1}{S_1 S_2} \qquad \text{(formule de Neumann)}$$



M est appelé coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits (C_1) et (C_2).

Contrairement à l'inductance qui est toujours positive, M est positive ou négative (selon l'orientation des circuits).

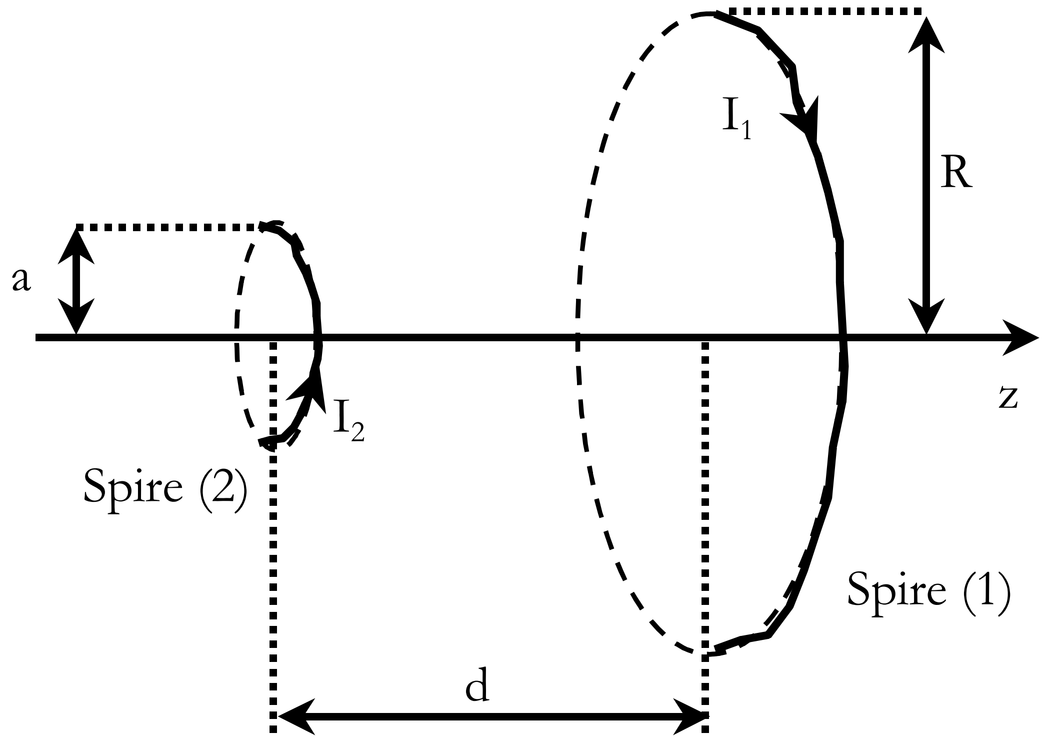
Remarque : si on sait calculer $\Phi_{2\rightarrow 1}$, on en déduit M et $\Phi_{1\rightarrow 2}$. Parfois, le calcul de l'un des deux flux est compliqué alors que le calcul de l'autre est plus simple



Exemple : (inductance mutuelle de deux spires)

Soient deux spires, l'une de rayon R et d'axe (Oz) et une seconde spire de même axe et de rayon a<<R. Ces deux spires sont à une distance d l'une de l'autre.

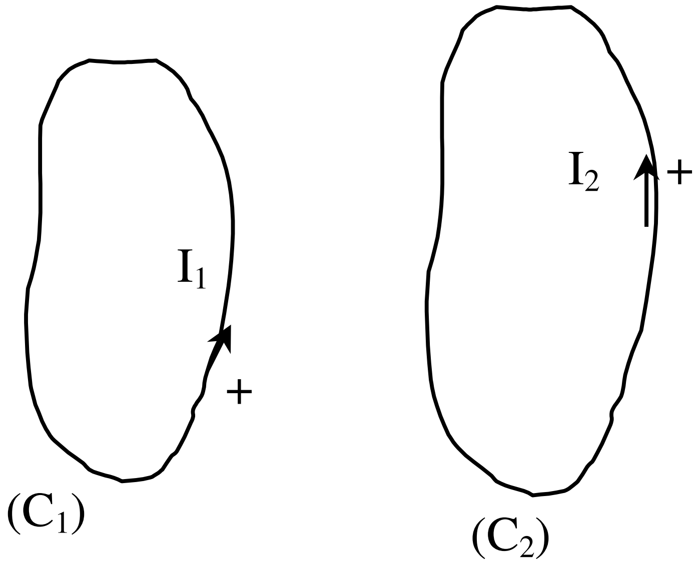
Calculer les coefficients $M_{2\to1}$ *et* $M_{1\to2}$ et montrer qu'ils sont égaux.



II) Bilan énergétique de l'établissement du courant dans un ensemble de deux circuits filiformes indéformables et fixes : énergie magnétique (expression en fonction des courants et des coefficients d'inductance)

1) Loi d'Ohm généralisée :

On considère deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) en couplage mutuel. Alors, en l'absence d'autres sources de champs magnétiques :



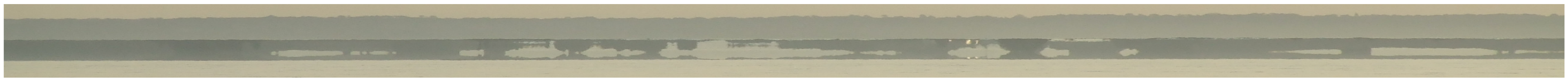
$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \qquad et \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Si les circuits sont rigides et immobiles dans le référentiel du laboratoire, les fém d'induction valent :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \qquad et \qquad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

La ddp aux bornes de chaque circuit est alors :

$$u_1 = R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \qquad et \qquad u_2 = R_2 I_2 - e_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$



2) Energie magnétique d'un système de deux circuits :

La puissance électrique reçue par les deux circuits vaut :

$$P = u_1 I_1 + u_2 I_2$$

Soit :

$$P = \left(R_1 I_1{}^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1{}^2\right) + M I_1 \frac{dI_2}{dt} \right) + \left(R_2 I_2{}^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_2 I_2{}^2\right) + M I_2 \frac{dI_1}{dt} \right)$$

$$P = R_1 I_1{}^2 + R_2 I_2{}^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1{}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_2 I_2{}^2\right) + M \frac{d}{dt}(I_1 I_2)$$

Finalement :

$$P = (R_1 I_1{}^2 + R_2 I_2{}^2) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1{}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2{}^2 + M I_1 I_2\right)$$

On reconnaît d'une part la puissance dissipée par effet Joule et on définit d'autre part :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 I_1{}^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2{}^2 + M I_1 I_2$$

comme étant l'énergie magnétique du système des deux circuits, en l'absence d'autres sources de champs magnétiques et en prenant comme convention que cette énergie est nulle lorsque les courants sont nuls.

Relation entre L_1, L_2 et M :

L'énergie magnétique est nécessairement positive. On pose $x = \frac{I_1}{I_2}$, alors :

$$\frac{E_m}{I_2{}^2} = \frac{1}{2}L_1 x^2 + \frac{1}{2}L_2 + Mx > 0 \qquad soit \qquad L_1 x^2 + 2Mx + L_2 > 0$$ (quel que soit x)

Cette dernière condition est réalisée si le discriminant du polynôme est négatif, soit :

$$\Delta = 4M^2 - 4L_1 L_2 < 0 \qquad soit \qquad M < \sqrt{L_1 L_2}$$

Couplage idéal :

On a vu que $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$. On pose :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

le coefficient de couplage entre les deux circuits.

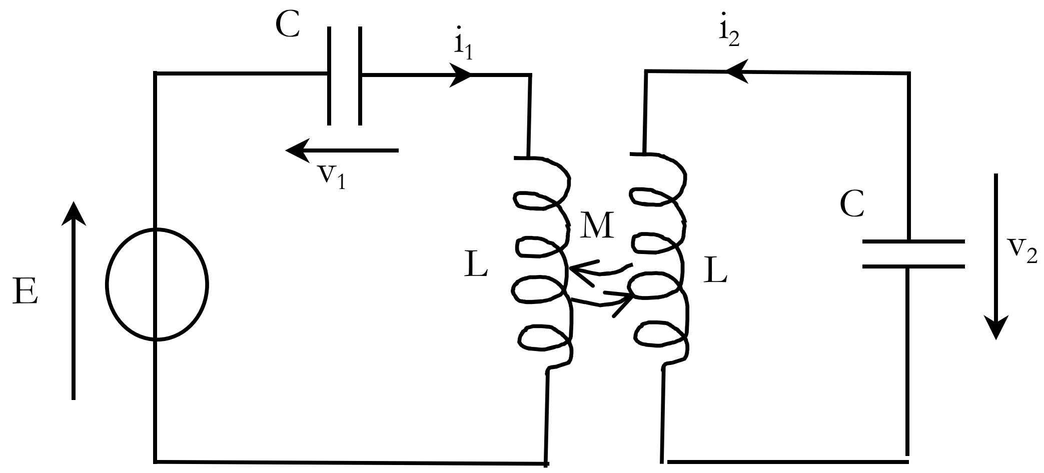
Ce coefficient est compris entre 0 et 1.

Le cas limite k = 1, soit $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ correspond au cas où toutes les lignes de champ du champ magnétique créé par un des deux circuits traversent l'autre circuit.

Il s'agit du cas idéal du couplage parfait.

Exercice sur les circuits couplés :

On considère désormais le circuit suivant :

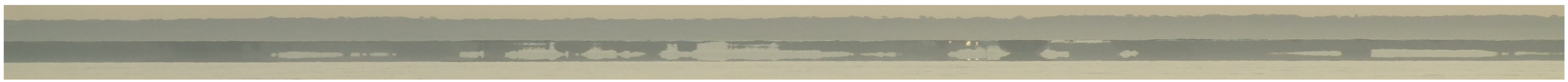


Autre définition de l'inductance propre d'un circuit :

On considère un circuit (filiforme ou non) sans interaction mutuelle avec un autre circuit.

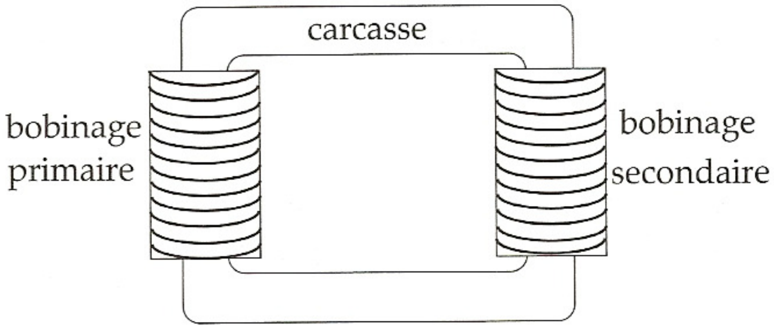
Pour étendre la définition de L, on peut identifier les deux expressions de l'énergie magnétique, soit :

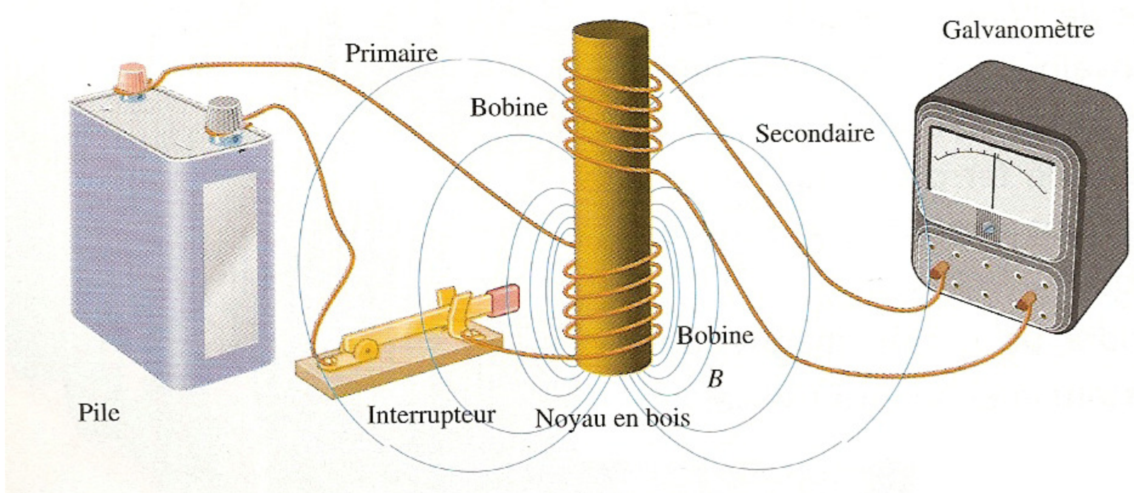
$$\frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{(V)} \frac{B_{propre}^2}{2\mu_0}d\tau$$



Exemple d'application ; le transformateur idéal :

Le couplage entre les deux bobines est augmenté en les reliant les bobines par une carcasse de fer qui canalisent les lignes de champ :





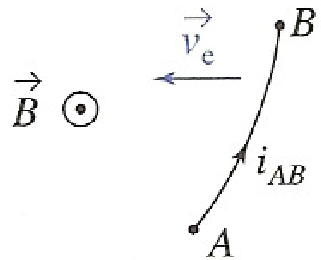
(a)

B - Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

(Cas de Lorentz)

I) Circulation du terme $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$, loi de Faraday :

On considère un conducteur mobile (C). on note $\vec{v}_e$ la vitesse d'un élément du circuit situé au point M par rapport au référentiel du laboratoire et $\vec{v}\,'$ la vitesse des porteurs de charges lorsqu'ils passent au point M.



a. *Portion de fil de résistance ohmique R entre les points A et B en mouvement de vitesse* $\vec{v}_e$ *dans un champ magnétique* $\vec{B}$ *extérieur permanent.*

D'après la loi de composition des vitesses, la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charges au point M, évaluée dans le référentiel du laboratoire est :

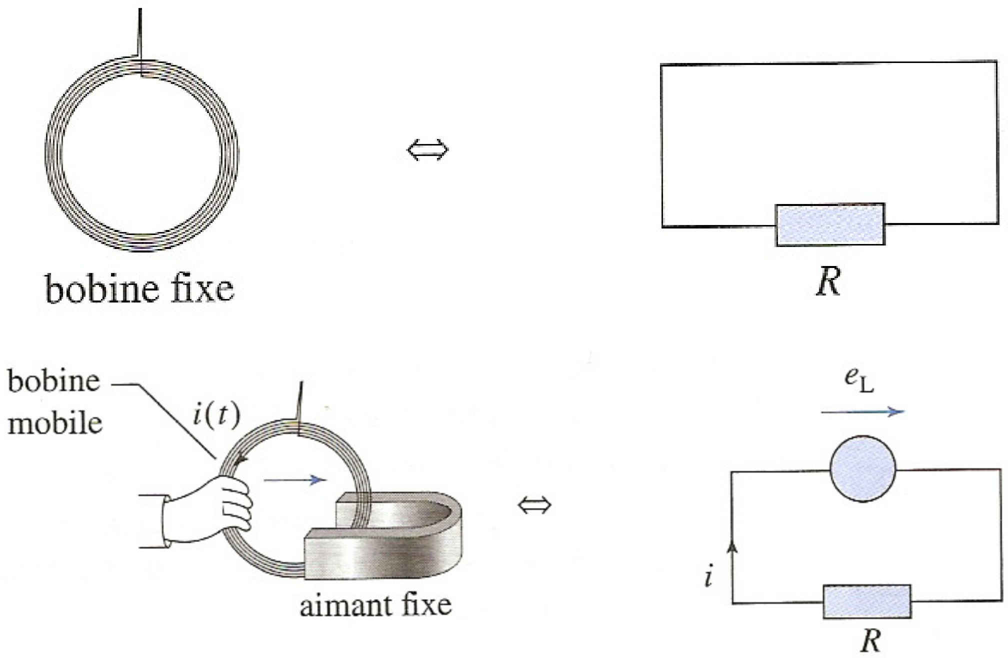
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

On suppose que, dans le référentiel du laboratoire, règne un champ EM dont la composante magnétique est permanente, de telle sorte que $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$ et donc :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

Le champ EM dans le référentiel du conducteur est alors, en utilisant les relations de transformations des champs :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \qquad et \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$



Ainsi, dans le référentiel du conducteur, apparaît un champ électromoteur $\vec{E}_m$ à circulation non conservative, susceptible de mettre en mouvement relatif les porteurs de charges :

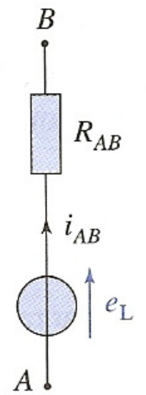
$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Entre A et B, la circulation de ce champ donnera la fém induite entre ces deux points :

$$e_{AB} = \int_{(C_{AB})} \vec{E}_m.d\vec{\ell} = \int_{(C_{AB})} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{\ell}$$

Pour un circuit mobile fermé :

$$e = \oint_{(C_{AB})} \vec{E}_m.d\vec{\ell} = \oint_{(C_{AB})} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{\ell}$$



b. *Circuit électrique équivalent avec*

$$e_L = \int_A^B \vec{v}_e \wedge \vec{B} \,.\, d\vec{\ell} \quad et$$

$$V_A - V_B + e_L = R_{AB}\, i_{AB}$$

Équivalence électrocinétique d'une portion de conducteur.

Remarque :

On peut montrer que, pour un champ magnétique permanent, la loi de Faraday est valable :

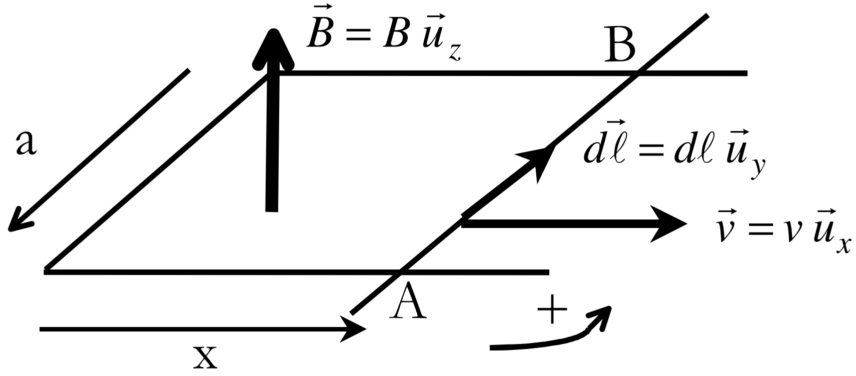
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où $d\Phi$ représente la variation du flux du champ magnétique à travers le circuit lors du déplacement du circuit pendant l'intervalle de temps dt.

II) Exemple : barre lancée sur des rails

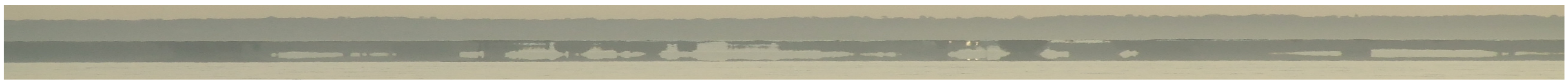
La barre (AB), de longueur a et de masse m, de centre de masse d'abscisse x(t) et de vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ (avec $v = \dot{x}$) est lancée avec une vitesse initiale v_0 sur des rails métalliques sur lesquels elle glisse sans frottement.

Elle constitue avec les rails de résistance négligeable un circuit rectangulaire (C) de résistance R constante et d'inductance négligeable et dont la surface à l'instant t est $S(t) = ax(t)$.



Ce circuit est placé dans un champ magnétique permanent $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ d'origine extérieure à (C).

On souhaite déterminer la fém induite et la loi de vitesse de la barre.



- **Détermination de la fém induite :**

1$^{\text{ère}}$ méthode de calcul (utilisation de la loi de Faraday) :

Pendant l'intervalle de temps dt, la variation du flux magnétique est :

$$d\Phi = Ba\ dx = Bav\ dt$$

La fém induite vaut donc :

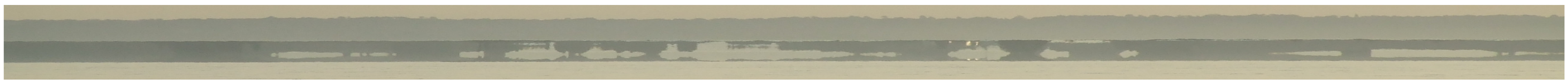
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav$$

2$^{\text{ème}}$ méthode de calcul (circulation du champ électromoteur) :

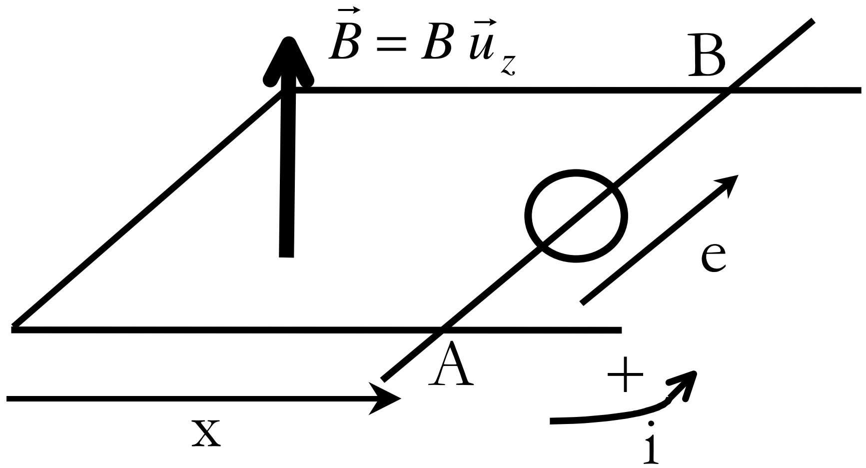
La circulation du champ électromoteur entre A et B vaut (elle est nulle le long du reste du circuit qui, lui, est immobile) :

$$e = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}).d\vec{\ell} = \int_A^B (v\ u_x \wedge B\vec{u}_z).d\ell\ \vec{u}_y = -\int_A^B vB\ d\ell = -Bav$$

On retrouve bien évidemment le même résultat.



Le circuit peut alors être modélisé par :



L'intensité qui traverse le circuit se calcule par la loi de Pouillet :

$$e = Ri \qquad soit \qquad i = -\frac{Bav}{R}$$

Ainsi, pour v > 0, on en tire i < 0 : ce résultat pouvait être prévu à l'aide de la loi de Lenz. En effet, lorsque la tige se déplace vers la droite, le flux inducteur (positif) augmente. Par conséquent, le flux induit doit être négatif, ce qui correspond bien à un courant induit dans le sens négatif.

- **Loi de vitesse v(t) :**

La barre est soumise (horizontalement du moins) à la force de Laplace :

$$\vec{F} = i\ a\ \vec{u}_y \wedge B\ \vec{u}_z = iaB\ \vec{u}_x = F\ \vec{u}_x$$

Ainsi, pour i < 0, F < 0 : ce résultat peut là encore être prévu par la loi de Lenz.

En effet, l'apparition d'une force de freinage négative est bien un effet modérateur tendant à s'opposer à la mise en mouvement de la barre.

Le théorème du CI appliqué à la barre donne enfin :

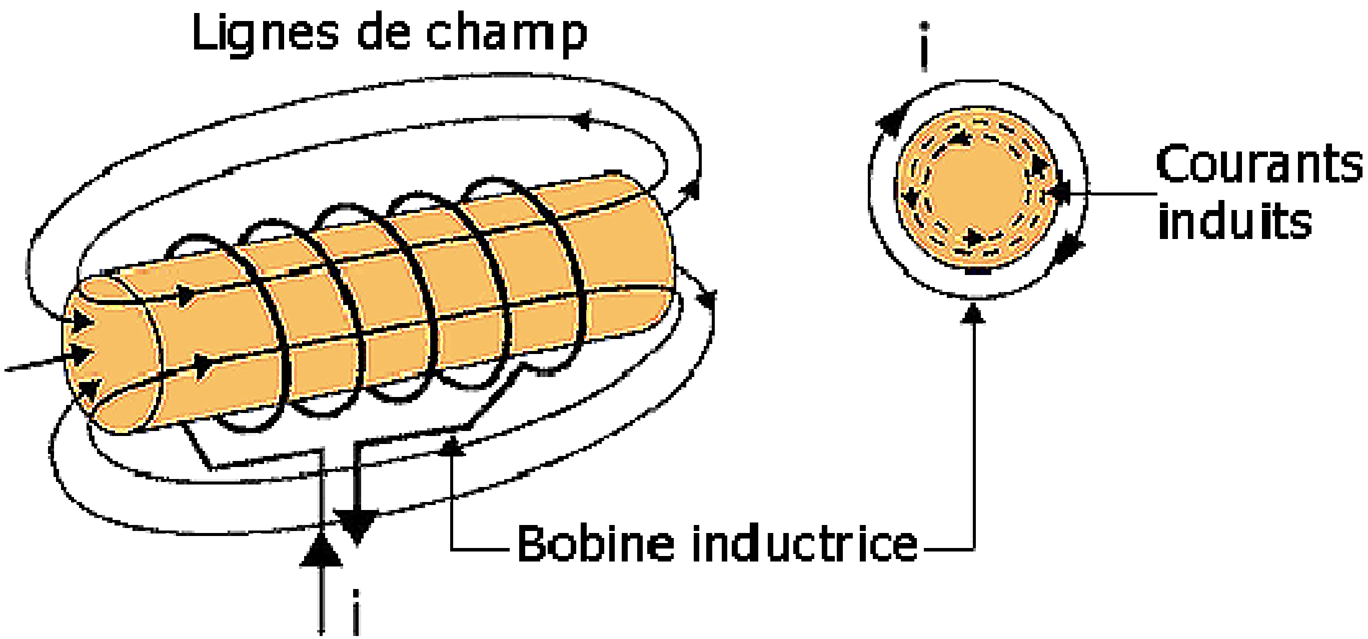
$$m\frac{dv}{dt} = iaB = -\frac{B^2 a^2}{R} v \qquad soit \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 a^2}{mR} v$$

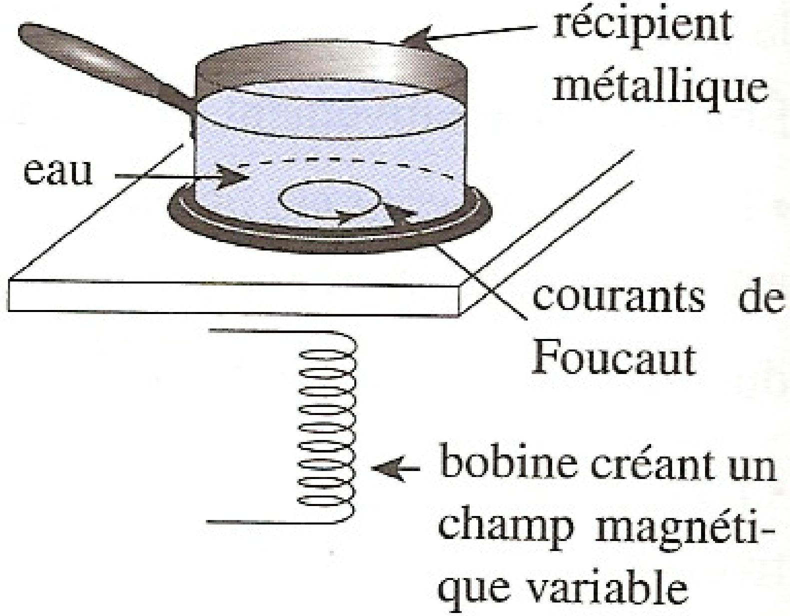
Le terme $\frac{B^2 a^2}{R}$ joue le même rôle qu'un coefficient de frottement fluide. On pose $\tau = \frac{mR}{B^2 a^2}$ (temps caractéristique du régime transitoire), alors :

$$v = v_0\ e^{-\frac{t}{\tau}}$$

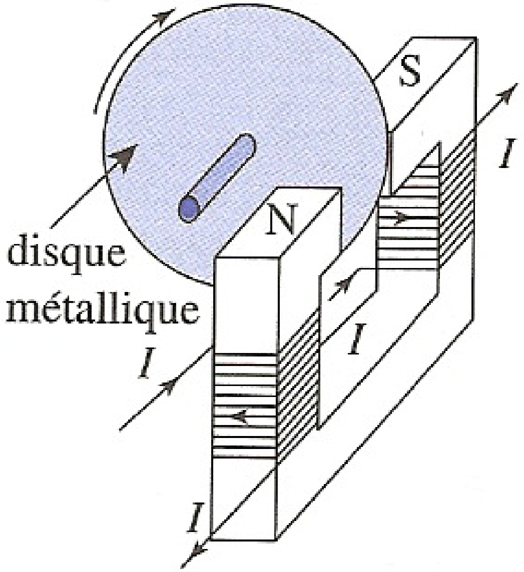
Remarque : (application de la loi de Lenz aux courants de Foucault)

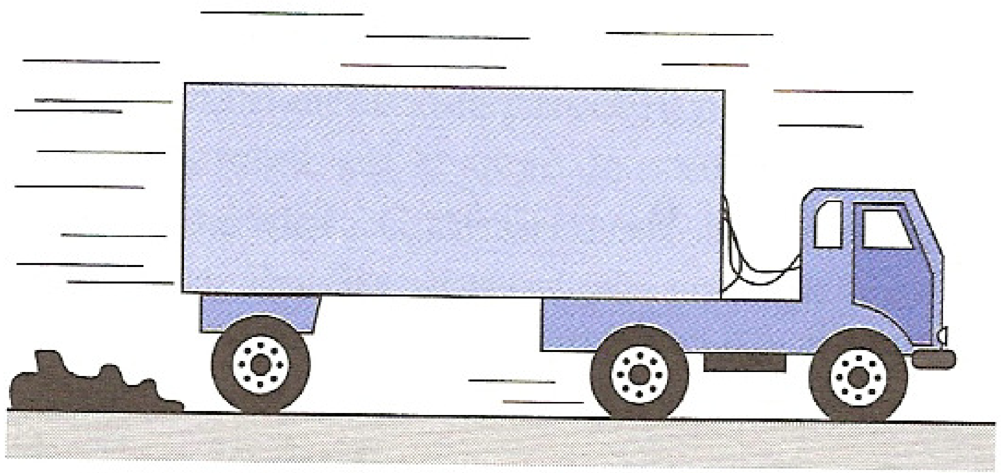
Selon un principe analogue à celui du montage précédent, les courants de Foucault induits dans les conducteurs massifs mobiles dans des champs magnétiques permanents sont à l'origine de forces de Laplace qui tendent à s'opposer au mouvement qui leur donne naissance. Tel est le principe du freinage électromagnétique, utilisé notamment pour les poids lourds et les TGV.





Principe d'une plaque à induction : des courants apparaissent dans le récipient métallique soumis à un champ magnétique variable.





Si aucun courant ne passe dans l'électro-aimant, le disque tourne librement ; dès que l'électro-aimant est excité, le disque est freiné.

Freinage par induction pour certains poids lourds : des courants de Foucault apparaissent dans une pièce (solidaire des roues) en mouvement dans un champ magnétique.

- **Aspect énergétique (exemple de transducteur) :**

On reprend l'équation électrique (E) et l'équation mécanique (M) du circuit :

(E) : $e = Ri = -Bav$ et (M) : $m\dfrac{dv}{dt} = F = iaB$

Afin de faire intervenir des puissances, on multiplie l'équation (E) par i et l'équation (M) par v :

$$ei = Ri^2 = -Bav\, i \quad \text{et} \quad mv\frac{dv}{dt} = Fv = iaBv$$

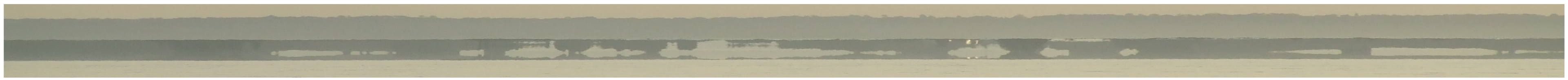
On note $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de la barre ; alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = -Ri^2$$

L’énergie cinétique perdue par la barre se retrouve intégralement sous forme d’effet Joule dans la résistance : la barre joue le rôle de convertisseur d’énergie mécanique en énergie électrique finalement dissipée par effet Joule en chaleur.

On peut également envisager le cas où la barre est initialement fixe et où l’introduction le long du circuit d’une source de tension (une pile par exemple) engendre un courant. La barre se met alors en mouvement sous l’action des forces de Laplace et le même système joue le rôle de récepteur en convertissant cette fois de l’énergie électrique en énergie mécanique ; on a en fait le principe d’un moteur électrique.

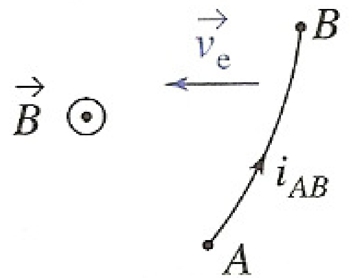
D’une manière générale, on appelle « transducteur électromécanique » un système qui est susceptible de transformer l’énergie mécanique en énergie électrique et réciproquement.



III) Rendement fondamental des transducteurs électromécaniques :

1) Puissance de la fém induite et puissance des forces de Laplace :

On considère un porteur de charge plongé dans un champ magnétique indépendant du temps et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au conducteur, lui-même se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_e$ par rapport au référentiel du laboratoire (R_0).



a. *Portion de fil de résistance ohmique R entre les points A et B en mouvement de vitesse $\vec{v}_e$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur permanent.*

Dans ce référentiel, le porteur de charge a une vitesse ($\vec{v}+\vec{v}_e$) et subit la force de Lorentz $q(\vec{v}+\vec{v}_e)\wedge\vec{B}$ dont la puissance est nulle :

$$\left[q(\vec{v}+\vec{v}_e)\wedge\vec{B}\right].(\vec{v}+\vec{v}_e)=0$$

Cette puissance peut être décomposée en 4 termes dont deux sont nuls :

$$q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}+q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}_e=q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}$$

Dans un volume élémentaire dτ, le nombre de porteurs de charge est n.dτ et la puissance volumique de la force de Lorentz devient :

$$d\vec{f}=nd\tau\left[q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}\right]$$

Le terme $nd\tau\, q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}$ représente la puissance volumique de la force appliquée aux charges due au champ électromoteur $\vec{E}_m=\vec{v}_e\wedge\vec{B}$ évaluée dans le référentiel du conducteur ; en sommant sur tout le volume du conducteur, on obtient la puissance de la fém induite, notée P_e :

$$P_e = \oiiint_{(V)} n d\tau \; q(\vec{v}_e \wedge \vec{B}).\vec{v} = \oiiint_{(V)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).\vec{j} \; d\tau = \oint_{(C)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{\ell} \; i = ei$$

Interprétation du terme $n d\tau \; q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}_e$:

$$n d\tau \; q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}_e = (\vec{j} \; d\tau \wedge \vec{B}).\vec{v}_e$$

Ce terme apparaît comme la puissance de la force de Laplace subie par l'élément de volume dτ.

Finalement, par intégration :

$$P_e + P_L = ei + P_L = 0$$

La puissance de la force électromotrice d'induction est compensée par celle des actions de Laplace exercée sur le circuit.

2) Rendement d’un transducteur électromécanique :

Les moteurs et générateurs électriques sont des convertisseurs de puissance susceptibles de produire de la puissance mécanique à partir d’une source électrique ou de la puissance électrique à partir d’une excitation électrique (des transducteurs électromécaniques).

Théoriquement, les deux sens de conversion sont en général possibles, mais les appareils sont en général adaptés techniquement à un seul mode de fonctionnement.

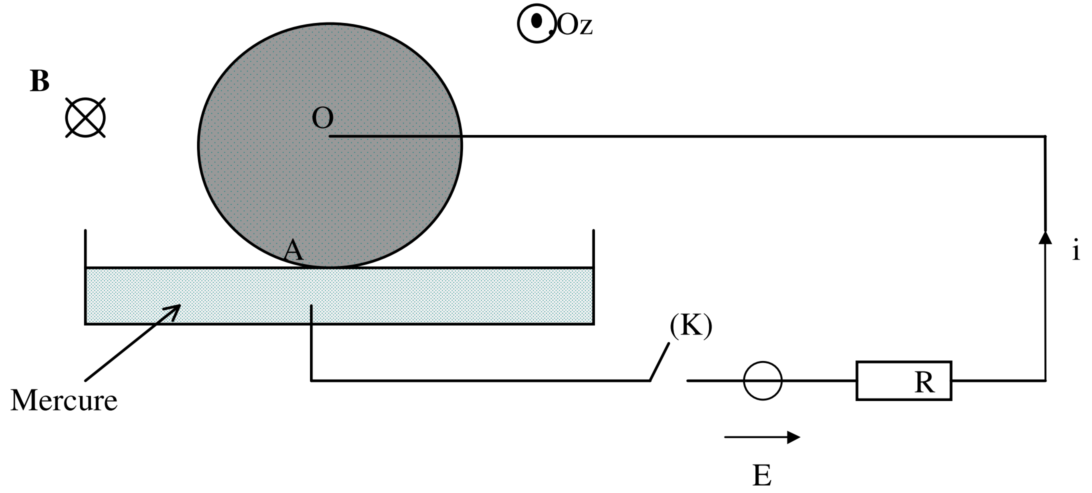
S’il était possible de faire abstraction des résistances, le rendement serait de 100% : en effet, la puissance mécanique est celle des actions de Laplace et la puissance électrique est, en l’absence de résistance, celle de la fém d’induction. D’après le paragraphe précédent, ces deux puissances sont égales en valeur absolue.

On peut ainsi dire que le rendement fondamental d’un transducteur électromécanique est égal à 1.

IV) La roue de Barlow, ancêtre des générateurs et des moteurs électriques :

On envisage un moteur électrique constitué d'un disque métallique de rayon a, libre de tourner autour de son axe horizontal Oz avec un moment d'inertie J et plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B}=-B\mathbf{u}_z$, avec B>0. Ce disque est fermé par un fil électrique issu de son centre O et par un contact avec un bain de mercure en un point A sur un générateur de fém E constante et une résistance R via un interrupteur K. On néglige la résistance du disque et celle du générateur. On néglige l'inductance propre du circuit.

On note i l'intensité du courant et ω la vitesse angulaire de rotation du moteur. Le courant étant nul et la roue au repos, on ferme l'interrupteur K.

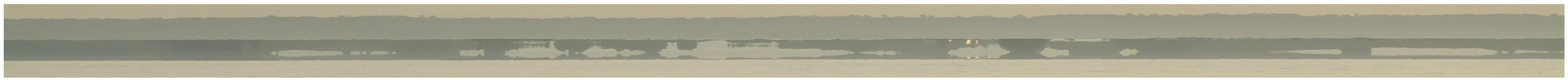


Le disque, parcouru par un courant imposé par le générateur, se met en mouvement (dû aux forces de Laplace dans un champ magnétique) ; ce mouvement va créer une fém d'induction (cas de Lorentz) dont les effets vont s'opposer à la cause de ce mouvement.

Il y a couplage entre i(t) et ω(t) : la roue de Barlow constitue un exemple de « transducteur électromécanique », c'est-à-dire de système susceptible de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique et réciproquement.

Dans un 1er temps (voir à la fin de ce paragraphe), on admet que les forces de Laplace subies par le disque sont équivalentes à celles que subirait un conducteur filiforme confondu avec le rayon OA et parcouru par un courant d'intensité i.

On va établir l'équation différentielle du problème en supposant que la roue est soumise à un couple de frottements de la forme -fω.



Un élément de longueur $d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r$ du conducteur filiforme fictif OA , centré en M, est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = i\;dr\,\vec{u}_r \wedge (-B)\,\vec{u}_z = iB\;dr\,\vec{u}_\theta$$

Le moment élémentaire de cette force par rapport à l'axe (Oz) est :

$$d\Gamma_z = (r\,\vec{u}_r \wedge d\vec{F}).\vec{u}_z = iB\;rdr$$

Le moment total par rapport à l'axe vaut donc :

$$\Gamma_z = \frac{1}{2} iBa^2$$

Le théorème scalaire du moment cinétique donne ensuite (dans le référentiel galiléen du laboratoire) :

$$J\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} iBa^2 - f\omega$$

C'est l'équation différentielle (M) obtenue par les lois de la mécanique.

On va déterminer maintenant l'équation électrique du système.

La fém d'induction qui apparaît peut se calculer selon :

$$e_{OA} = \int_0^a \left(r\omega\, \vec{u}_\theta \wedge (-B\, \vec{u}_z) \right) . dr\, \vec{u}_r = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

On peut également dire que, pour un transducteur électromécanique dans un champ magnétique stationnaire, la puissance des forces de Laplace et la puissance de la fém induite sont opposées. Par conséquent :

$$P_e = ei = -P_L = -\Gamma_z \omega$$

Soit :

$$e = -\frac{\Gamma_z \omega}{i} = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

La loi des mailles dans le circuit électrique équivalent donne l'équation électrique (E) :

$$E - Ri + e = 0 \qquad soit \qquad Ri = E - \frac{Ba^2\omega}{2}$$

En éliminant i entre les équations (E) et (M), on obtient :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}Ba^2\,\frac{E - \dfrac{Ba^2\omega}{2}}{R} - f\omega$$

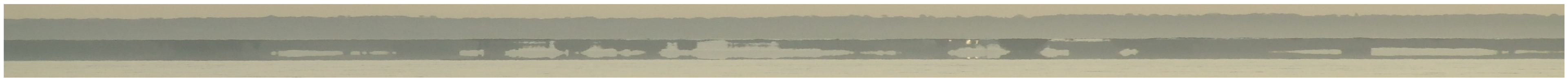
Soit :

$$J\frac{d\omega}{dt} + \left(f + \frac{B^2a^4}{4R}\right)\omega = \frac{Ba^2E}{2R}$$

La roue étant immobile à t = 0, il vient :

$$\omega = \omega_\ell\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad avec \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{f}{J} + \frac{B^2a^4}{4RJ} \qquad et \qquad \omega_\ell = \frac{2Ba^2E}{4Rf + B^2a^4}$$

Le moteur atteint une vitesse angulaire limite ω_ℓ au bout d'un intervalle de temps de l'ordre de τ.



On obtient l'intensité par :

$$i = \frac{1}{R}(E - \frac{Ba^2\omega}{2})$$

Soit :

$$i(t) = \frac{4Ef}{B^2a^4 + 4Rf} + \frac{B^2a^4E}{B^2a^4R + 4R^2f}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On constate que le courant est discontinu à l'instant t = 0 puisque $i(0^+) = \frac{E}{R}$ alors que $i(0^-) = 0$.

Il atteint une valeur permanente :

$$i_\ell = \frac{4Ef}{B^2a^4 + 4Rf}$$

On peut effectuer un bilan énergétique du dispositif : pour cela, on multiplie l'équation (M) par ω et l'équation (E) par i :

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} i\omega B a^2 - f\omega^2 \qquad ; \qquad R i^2 = E i - \frac{B a^2 \omega i}{2}$$

Soit :

$$E i = R i^2 + f\omega^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J\omega^2\right)$$

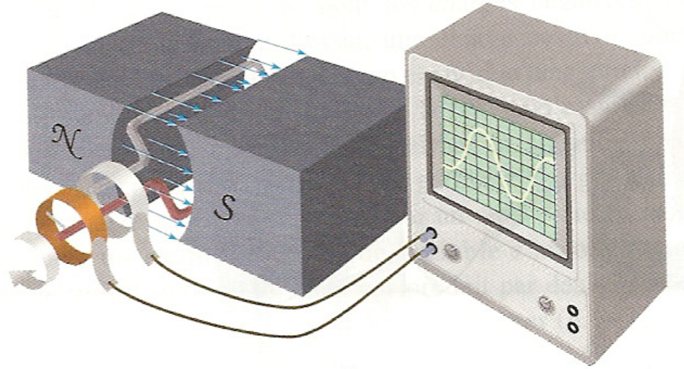
La puissance fournie par le générateur sert à augmenter l'énergie cinétique du disque, une partie étant dissipée sous forme de frottements mécaniques et d'effet Joule.

En régime permanent établi, ce bilan se simplifie sous la forme :

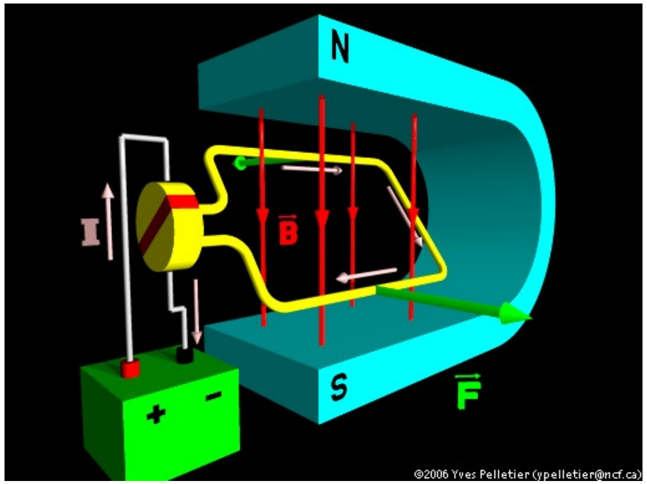
$$E i_\ell = R {i_\ell}^2 + f {\omega_\ell}^2$$

La puissance du générateur compense entièrement les pertes.

Exemples de moteurs :

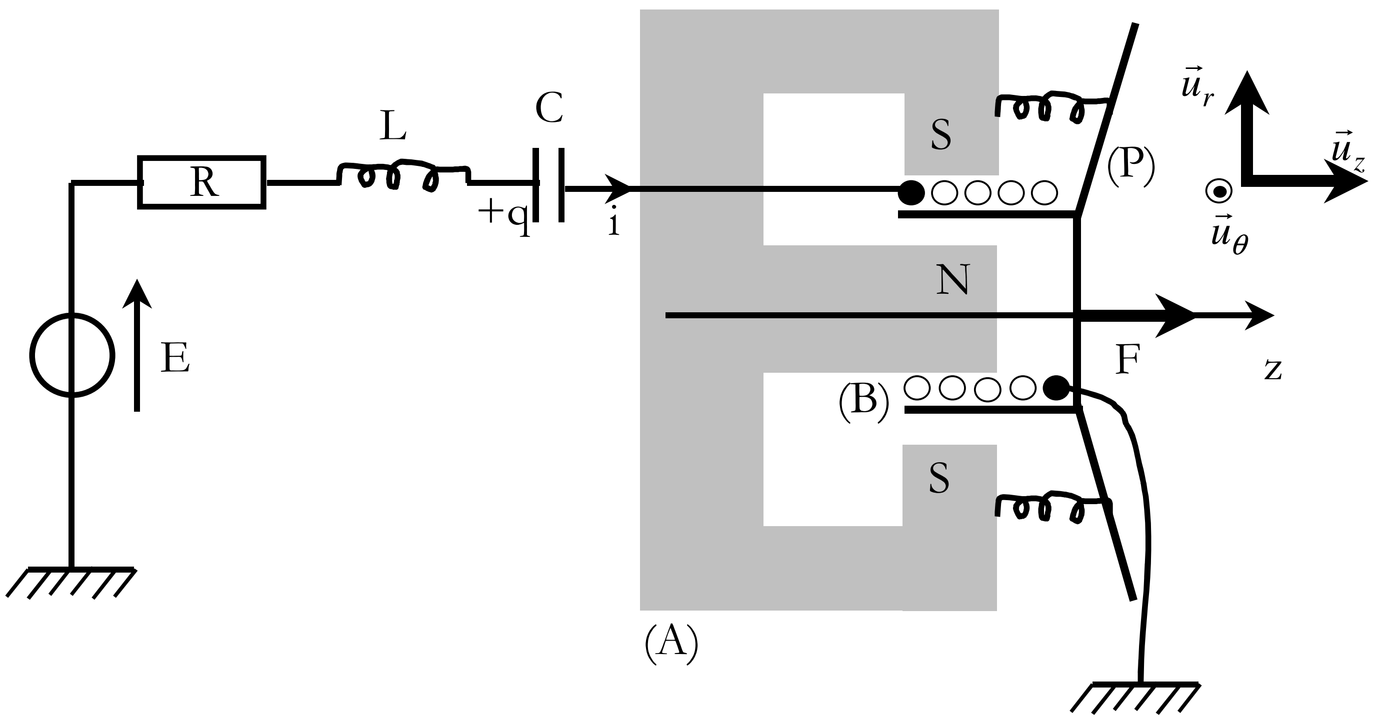


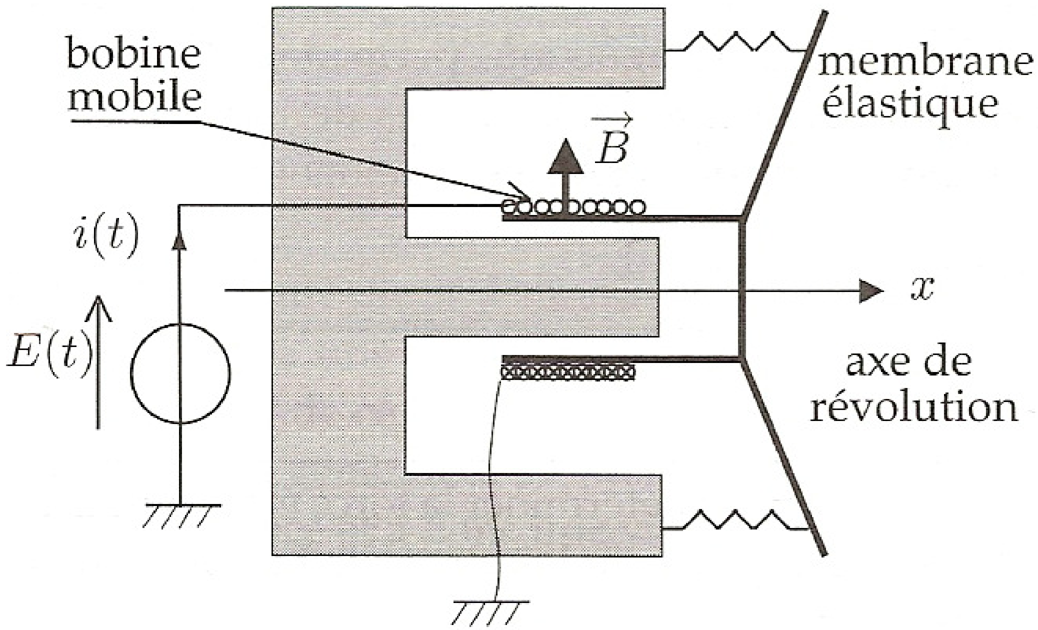
(a)



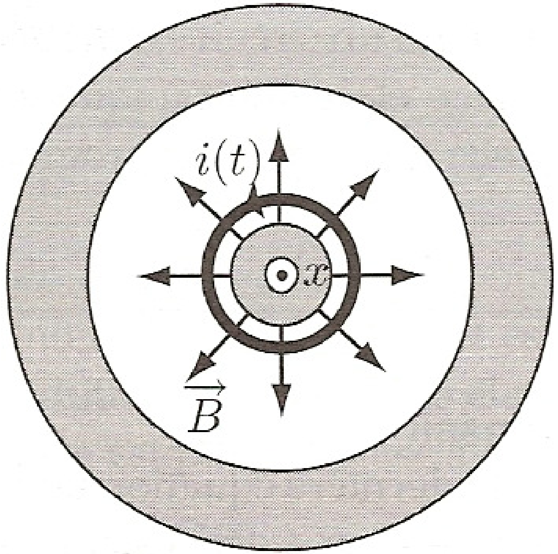
V) Application au haut-parleur électrodynamique (couplage électromécanique), bilan énergétique :

La figure suivante représente un dispositif pouvant servir aussi bien de haut-parleur que de microphone.





Vue de côté



Vue de face

(A) est un aimant permanent possédant une symétrie de révolution d'axe (Oz).

Dans son entrefer règne un champ magnétique radial, dans la région où se déplace le bobinage (B) solidaire du pavillon (P), ce champ s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = B\,\vec{u}_r$$

(P) est un système de masse totale m, susceptible de se déplacer le long de l'axe (Oz).

Il peut être mis en mouvement de translation par l'action d'une force extérieure $F\,\vec{u}_z$.

Il subit en outre des forces dissipatives de somme $-h\,\dot{z}\,\vec{u}_z$, des forces de rappel de somme $-k\,z\,\vec{u}_z$ exercées par un système de ressorts ainsi que des forces de Laplace de somme $\vec{f}$ exercées sur (B).

Ce dernier, constitué d'une longueur totale de fil ℓ , transporte un courant d'intensité i. Négligeant l'hélicité de (B), on admet que chaque élément de fil est représentable en coordonnées cylindriques par :

$$d\vec{\ell} = d\ell\,\vec{u}_\theta$$

(B) est alimenté par une source de tension E à travers un circuit dont on note R, L et C les résistances, inductances et capacités totales (c'est-à-dire relatives à l'ensemble du circuit, (B) compris).

On peut exprimer $\vec{f}$ en fonction de $i = \dot{q}$, B et ℓ. En effet, si l'on somme les forces de Laplace qui s'exercent sur les différents éléments de (B) :

$$d\vec{f} = i\ d\ell\ \vec{u}_\theta \wedge B\ \vec{u}_r = -iBd\ell\ \vec{u}_z \qquad et \qquad \vec{f} = -iB\ell\ \vec{u}_z$$

On en déduit l'équation différentielle (M) vérifiée par z(t) qui traduit le comportement mécanique du système en écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué au pavillon (P) (et projeté sur l'axe (Oz)) :

$$m\ddot{z} = -h\dot{z} - kz - B\ell i + F \qquad soit \qquad m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -B\ell i + F$$

On obtient ainsi l'équation mécanique (M) du système.

Afin d'obtenir l'équation électrique (E), on va exprimer en fonction de $v = \dot{z}$, B et ℓ la fém e induite dans (B). Sur un élément $d\vec{\ell}$ de (B) est induite la fém :

$$de = (\vec{v} \wedge \vec{B}).d\vec{\ell} = (\dot{z}\,\vec{u}_z \wedge B\,\vec{u}_r).d\ell\,\vec{u}_\theta = B\dot{z}\,d\ell$$

et, en intégrant le long de (B) dans le sens positif de i :

$$e = B\dot{z}\ell = B\ell v$$

La loi des mailles donne alors l'équation électrique (E) du circuit :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = B\ell v + E$$

On effectue la combinaison (M).v+(E).i :

$$(m\ddot{z} + h\dot{z} + kz).v + (L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q).i = (-B\ell i + F).v + (B\ell v + E).i$$

On voit que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = Fv + Ei - Ri^2 - hv^2$$

Avec :

$$U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

U représente l’énergie mécanique du système et son énergie électromagnétique.

L’équation précédente traduit la conservation de l’énergie : la dérivée de U est égale à la somme des puissances fournies par les deux sources d’énergie du système (la force extérieure F et la source de tension E) diminuée des puissances dissipées sous forme de frottements (ou d’énergie acoustique lors que le haut-parleur émet un son) ou d’effet Joule.