

# I - Présentation du champ magnétique

#### 1 - Introduction :

L'électrostatique est l'étude des interactions entre particules chargées immobiles.

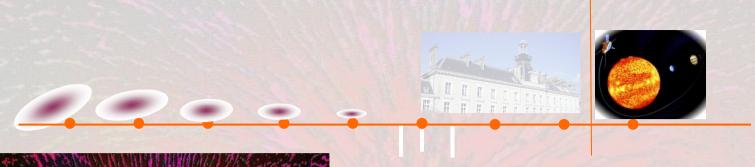
La magnétostatique est l'étude des interactions entre particules chargées en mouvement (en régime indépendant du temps).

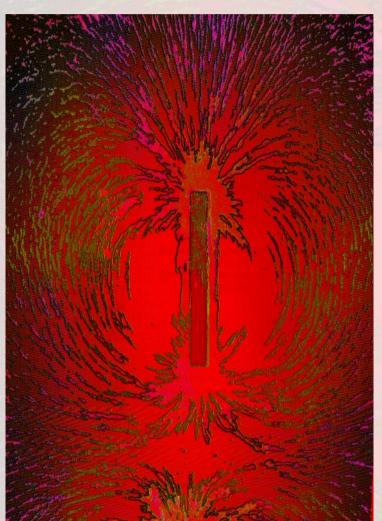
Certains corps aimantés (comme la magnétite, Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>) attire le fer.

L'acier, par frottement contre un aimant naturel, acquiert des propriétés équivalentes.

Des conducteurs parcourus par des courants sont également sources de champs magnétiques.







Les interactions électriques et magnétiques sont étroitement liées (exemple : phénomène d'induction).

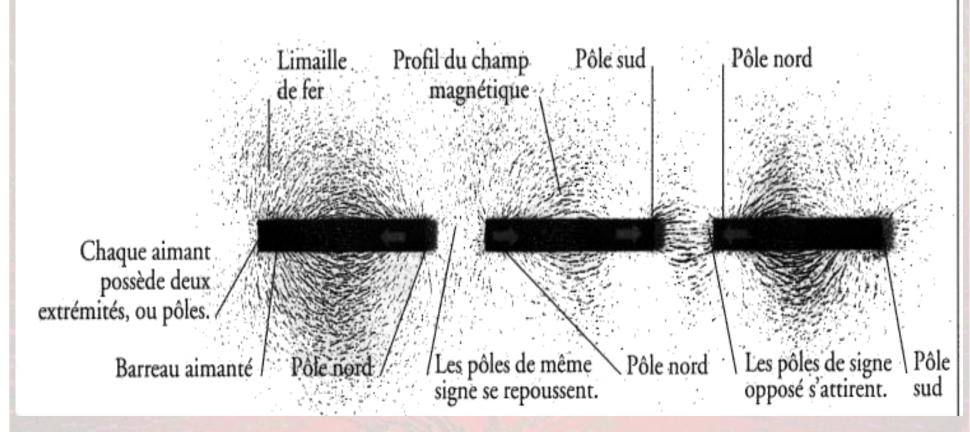
Elles représentent deux aspects différents d'une seule propriété de la matière : sa charge électrique.

Le magnétisme est une manifestation des charges électriques en mouvement.

(Ci-contre : lignes du champ magnétique créé par un barreau aimanté)

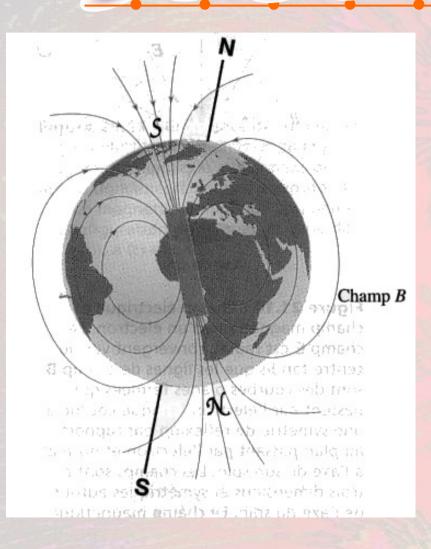


### Lignes de champ magnétique, pôle nord, pôle sud :







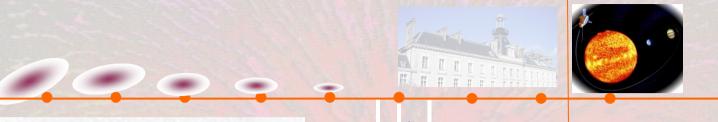


#### Champ magnétique terrestre :

Il ressemble à celui d'un barreau aimanté incliné

Une aiguille de boussole s'aligne dans la direction du champ, approximativement vers le pôle nord géographique, qui n'est pas très loin du pôle magnétique sud de la Terre.

Ce champ s'étend jusqu'à des milliers de kilomètres dans l'espace et possède la symétrie de révolution autour de l'axe du barreau aimanté fictif.











### Dipôles magnétiques :

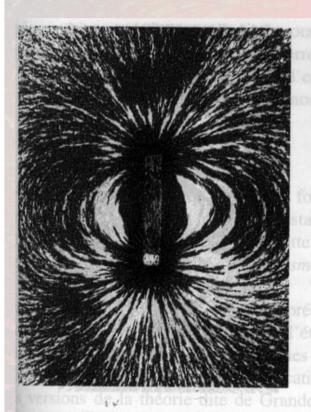
Les fragments d'un barreau aimanté ont toujours deux pôles (un pôle nord et un pôle sud).

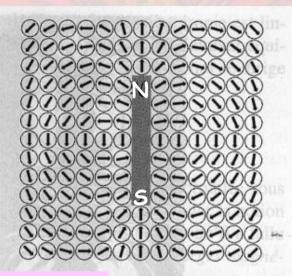
Un aimant se comporte comme s'il était composé de petites unités bipolaires, appelées dipôles magnétiques.

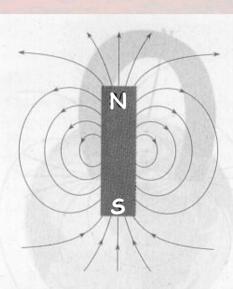
Il n'existe pas de monopôles magnétiques (équivalents des charges électriques ponctuelles).











Le champ autour d'une tige aimantée, illustré par un ensemble de petites boussoles. Ce dessin montre le champ seulement dans un plan. En fait, le champ se trouve dans l'espace à trois dimensions; il a une symétrie de révolution autour de la tige. La photo montre l'alignement de la limaille de fer au voisinage d'une petite tige aimantée. Par convention, le champ d'un aimant sort de son pôle nord et entre par son pôle sud. La photo ne permet pas de distinguer le pôle nord du pôle sud.



### 2 - Définition du champ magnétique :

On considère une particule ponctuelle q placée au point M. Au voisinage d'un aimant ou d'un conducteur parcouru par un courant, elle est soumise à la force magnétique :

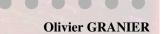
$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette force permet de définir le champ B (par l'intermédiaire de la charge test q, de la même manière qu'en électrostatique).

#### Unités du champ magnétique :

Dans le SI : le Tesla (T)

Le Gauss :  $1G = 10^{-4} T$ 



#### **TABLEAU 21.1 Champs magnétiques**

Source	Champ (T)
Noyau atomique (à sa surface)	
Étoile à neutrons (à sa surface)	≈ 108
Le champ le plus intense produit en laboratoire	
compression explosive ( $\approx 10^{-6} \text{ s}$ )	$1.5 \times 10^{3}$
bobines à impulsion (≈ 10 <sup>-3</sup> s)	100
constant (par courant continu dans un aimant supraconducteu	ır, 1993, MIT) 37,2
constant (courant continu à température ambiante)	23,5
Sans effets aigus sur les bactéries, les souris, ou les insectes de	fruits 14
Grand électroaimant de laboratoire	5
Taches solaires (à l'intérieur)	0,3
Limite d'exposition humaine (sur tout le corps, continu, pour d	es minutes) $\approx 0.2$
Petit aimant de céramique (à proximité)	#####################################
Petite tige aimantée (près des pôles)	n 1934 of monorm 10-2
Soleil (à sa surface)	in them states are 10-2
Sèche cheveux (60 Hz, à proximité)	$1 \times 10^{-3} - 2,5 \times 10^{-3}$
Ouvre-boîtes électrique (60 Hz, à proximité)	$0.5 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3}$
Jupiter (aux pôles)	8 × 10 <sup>-4</sup>
Mixer (60 Hz, à proximité)	$10^{-4} - 0.5 \times 10^{-3}$
Terre (à sa surface)	$0.5 \times 10^{-4}$
Téléviseur couleur (60 Hz, à proximité)	10-4
Ligne haute tension (maximum sous 765 kV, 4 kA)	$\approx 0.5 \times 10^{-4}$
Grille-pain (60 Hz, à proximité)	$0.1 \times 10^{-4} - 1 \times 10^{-4}$
Lumière solaire (quadratique moyen)	$3 \times 10^{-6}$
Réfrigérateur (60 Hz, à proximité)	10-6
Mercure (à la surface de la planète)	$2 \times 10^{-7}$
Corps humain (produit par le)	$\approx 3 \times 10^{-10}$
Espace interstellaire	≈ 10 <sup>-10</sup>
Région protégée par un blindage (plus faible champ mesuré)	$1,6 \times 10^{-14}$





# II - Les sources du champ magnétique

Le but de ce chapitre est d'étudier les champs magnétiques créés par des conducteurs parcourus par des courants.

Ces courants peuvent être volumiques, surfaciques ou linéiques.

### 1 - Répartition volumique de courant :

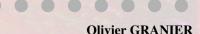
On considère un ensemble de particules de charge q, de densité particulaire n et ayant un mouvement d'ensemble à la vitesse v.

On notera dans la suite :

$$\rho_m = nq$$

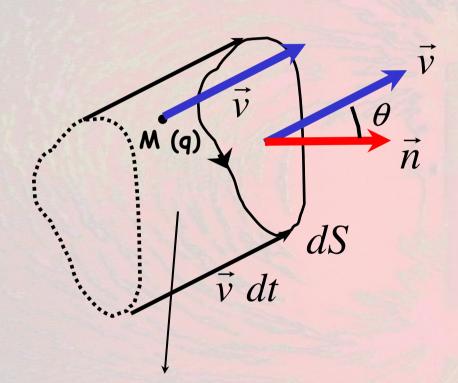
la densité de charges mobiles (exprimée en C.m<sup>-3</sup>).

Comment définir l'intensité qui traverse une surface d5 quelconque?









Volume  $d\tau = (vdt)(dS)\cos\theta$ 

La quantité de charges électriques dq qui traverse la surface élémentaire dS pendant l'intervalle de temps dt est :

$$dq = n d\tau q$$

Soit:

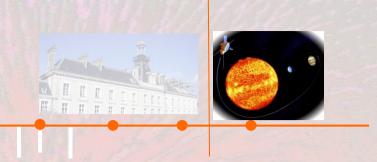
$$dq = nq v \cos \theta dS dt$$

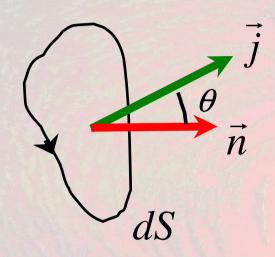
Or:

$$v\cos\theta \, dS = \vec{v}.\vec{n} \, dS \, dt$$

D'où:

$$dq = (nq\vec{v}).\vec{n} dS dt$$





L'intensité électrique di qui traverse la surface dS est ainsi :

$$di = \frac{dq}{dt} = (nq\vec{v}).\vec{n} \ dS$$

On voit que l'intensité s'interprète comme étant le flux du vecteur :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}$$

à travers la surface d5 orientée. Le vecteur j est appelé vecteur densité volumique de courant électrique.

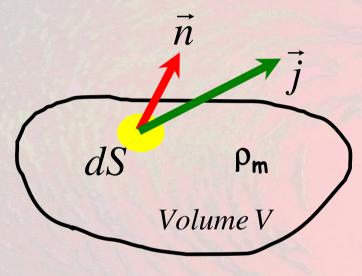
A travers une surface « finie » (S), on écrira (flux total du vecteur j à travers la surface totale S) :

$$i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \ dS$$





### Flux de j et conservation de la charge :



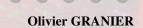
On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).

Soit  $\rho_m$  la densité volumique de charges mobiles dans le milieu. La charge totale Q(t) comprise dans le volume à l'instant t vaut :

$$Q(t) = \iiint_{(V)} \rho_m(M, t) d\tau$$

La conservation de la charge électrique permet d'écrire :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -i(t) \ \hat{a} \ travers \ S$$







#### Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} \rho_m(M, t) \, d\tau \right) = - \oiint_{(S)} \vec{j}.\vec{n} \, dS$$

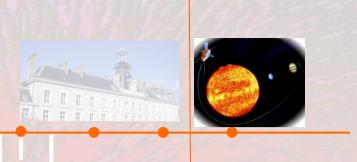
Le volume V étant fixe :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} \rho_m(M,t) \, d\tau \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t} \, d\tau$$

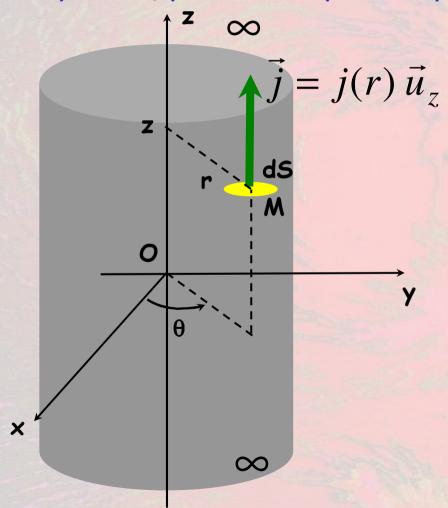
Finalement, le principe de conservation de la charge conduit à :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t} d\tau = - \oiint_{(S)} \vec{j}.\vec{n} dS$$





#### Exemple 1: (cylindre infini parcouru par un courant volumique)



On choisit un vecteur densité de courant dirigé selon (Oz), à symétrie cylindrique (la norme de j ne dépend que la distance r à l'axe (Oz)).

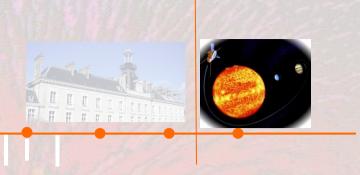
Par exemple:

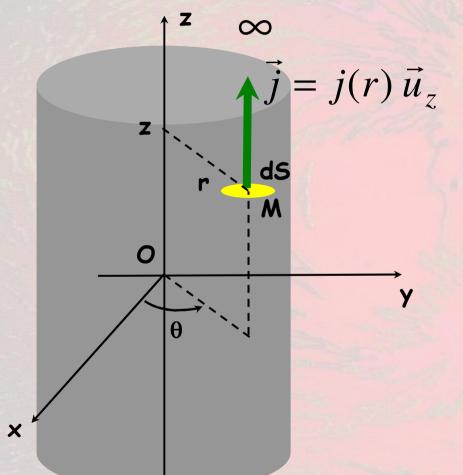
$$\vec{j} = j(r) \vec{u}_z = \frac{r}{R} j_0 \vec{u}_z$$

L'intensité à travers dS est alors :

$$di = j(r)dS = j(r) r dr d\theta$$

Et: 
$$i = \int_0^R j(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$





00

Soit :

$$i = 2\pi \int_0^R \frac{r^2}{R} j_0 dr = \frac{2\pi R^2}{3} j_0$$

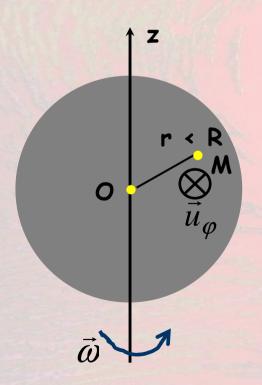
Si le vecteur j avait été constant (et égal à j<sub>0</sub>), alors l'intensité à travers une section quelconque du cylindre aurait été :

$$i = \pi R^2 j_0$$



#### Exemple 2 : (Boule chargée en rotation)

Une sphère de rayon R porte une charge Q uniformément répartie en volume (avec une densité notée  $\rho$ ). Elle tourne autour de l'un de ses diamètres à la vitesse angulaire  $\omega$  constante dans le référentiel du laboratoire.



#### Vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \qquad (\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3})$$

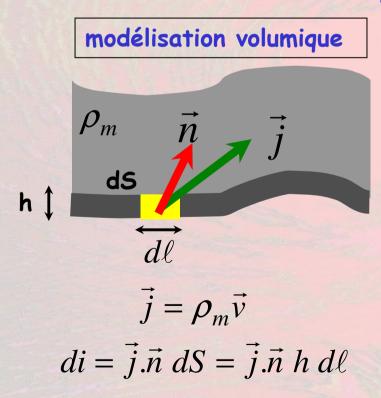
Avec  $\vec{v} = r\omega\sin\theta \,\vec{u}_{\varphi}$ , il vient :

$$\vec{j} = \rho r \omega \sin \theta \vec{u}_{\varphi}$$

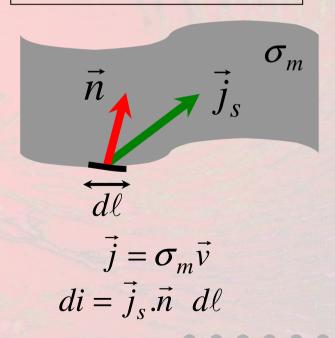


### 2 - Répartition surfacique de courant :

Lorsque la distribution de courants se trouve confinée sur une épaisseur très faible (par rapport aux deux autres dimensions d'espace), on pourra utiliser une modélisation surfacique.



#### modélisation surfacique



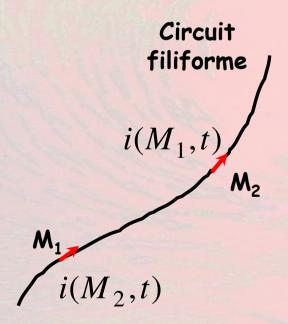




# 3 - Répartition linéique de courant :

Les conducteurs de faible section sont assimilés à des fils.

Le courant « linéique » est alors simplement le courant parcouru par le fil.



Le courant électrique dépend a priori du temps et du point M.

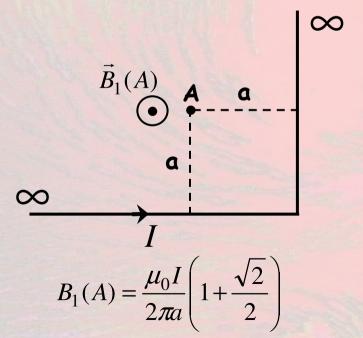


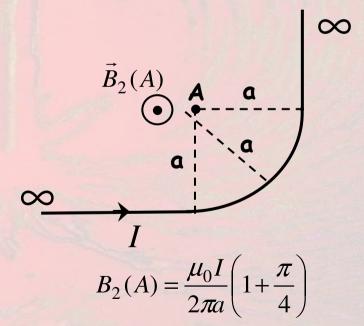


### III - La loi de Biot et Savart

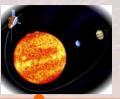
Cette loi a été énoncée en 1820 par les physiciens Biot et Savart.

Ces physiciens ont notamment déterminé les champs magnétiques créés par les deux circuits suivants :



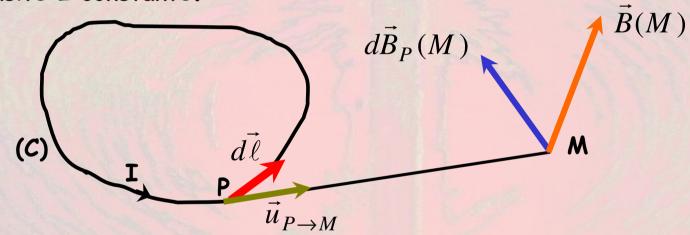






# 1 - Énoncé de la loi de Biot et Savart :

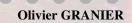
On considère un circuit filiforme fermé (C) parcouru par un courant d'intensité I constante.



$$d\vec{B}_{P}(M) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P \to M}}{PM^{2}}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P \to M}}{PM^2}$$

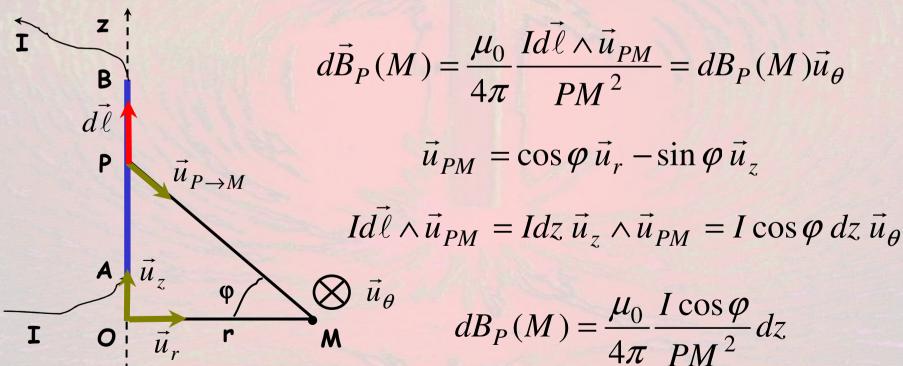
 $\mu_0$ : perméabilité du vide ( $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ SI}$ ,  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ )





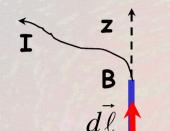
# 2 - Un 1er exemple de calcul de champ : conducteur rectiligne

On considère un segment AB considéré comme un tronçon d'un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité constante I. Le champ élémentaire créé par l'élément  $d\ell$  (centré en P) au point M est :









### On choisit l'angle $\varphi$ comme variable d'intégration :

$$\cos \varphi = \frac{r}{PM}$$
  $donc$   $PM = \frac{r}{\cos \varphi}$ 

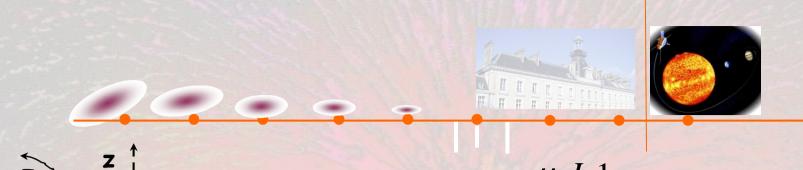
$$\tan \varphi = \frac{z}{r}$$
;  $z = r \tan \varphi$  et  $dz = \frac{r d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ 

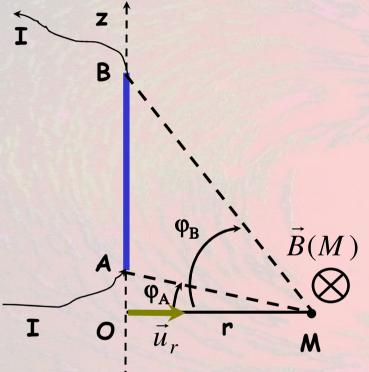
$$\vec{I} = \vec{v}_{r} + \vec{$$

 $\vec{u}_{P \to M}$ 

$$\frac{\vec{B}(M)}{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cos \varphi \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{rd\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$dB_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \cos \varphi \, d\varphi$$





$$dB_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \cos \varphi \, d\varphi$$

### Par intégration :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \cos \varphi \, d\varphi$$

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \left( \sin \varphi_B - \sin \varphi_A \right)$$

Remarque : ce résultat permet de calculer le champ magnétique créé par des circuits polygonaux.







#### Cas du fil infini :

On a alors:

$$\varphi_A \to -\frac{\pi}{2}$$
 et  $\varphi_B \to +\frac{\pi}{2}$ 

Lignes de champ

# Par conséquent :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{u}_{\theta}$$

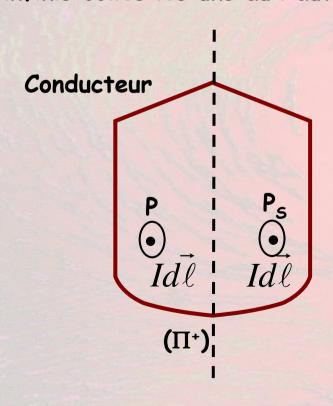


: petit bonhomme d'Ampère

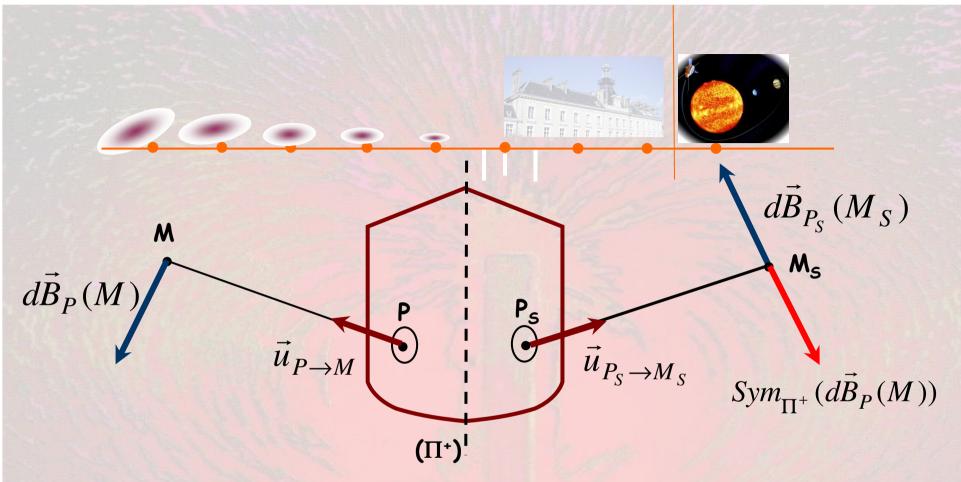


# 3 - Propriétés de symétrie du champ magnétique :

On considère une répartition volumique de courants assimilables à des fils infinis collés les uns aux autres.

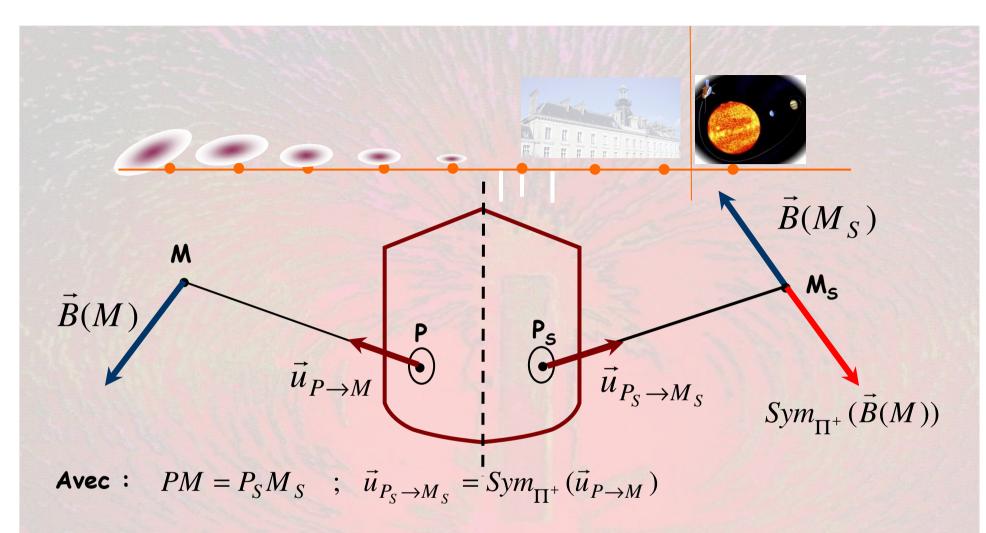


Cette répartition de courants possède un plan de symétrie ( $\Pi^+$ ): aux points P et  $P_s$ , existent les mêmes éléments de courants  $Id\hat{\ell}$ .



M est un point quelconque de l'espace et  $M_{\rm S}$  son symétrique par rapport au plan ( $\Pi^+$ ) :  $M_S = sym_{\Pi^+}(M)$ 

$$d\vec{B}_{P}(M) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P \to M}}{PM^{2}} \quad ; \quad d\vec{B}_{P_{S}}(M_{S}) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P_{S} \to M_{S}}}{P_{S}M_{S}^{2}}$$



Et en utilisant les propriétés du produit vectoriel, on montre que : :

$$d\vec{B}_{P_S}(M_S) = -Sym_{\Pi^+}(d\vec{B}_P(M))$$

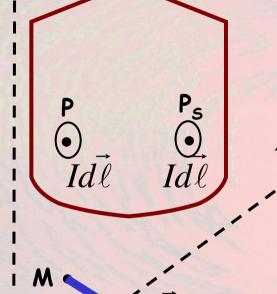
Par intégration, on déduit :

$$\vec{B}(M_S) = -Sym_{\Pi^+}(\vec{B}(M))$$









Plan de

symétrie ∏<sup>+</sup>

Si M appartient au plan ( $\Pi^+$ ), M et M<sub>S</sub> sont confondus.

Par conséquent :

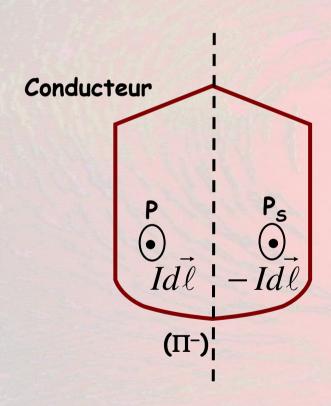
$$\vec{B}(M) = -Sym_{\Pi^+}(\vec{B}(M))$$
 soit  $\vec{B}(M) \perp (\Pi^+)$ 

$$M \in (\Pi^+) \implies \vec{B}(M) \perp (\Pi^+)$$

« C'est le contraire du champ électrostatique! »



On considère une répartition volumique de courants assimilables à des fils infinis collés les uns aux autres.



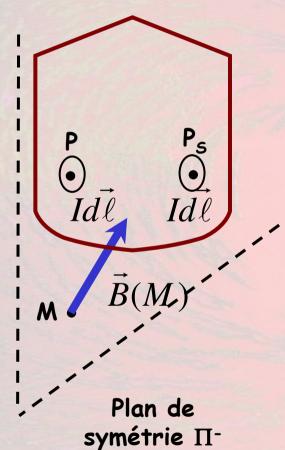
Cette répartition de courants possède un plan d'anti-symétrie ( $\Pi^-$ ): aux points P et  $P_s$ , existent des éléments de courants de sens opposés.

On montre alors que, pour  $M_S = sym_{\Pi^-}(M)$ :

$$\vec{B}(M_S) = Sym_{\Pi^-}(\vec{B}(M))$$







Si M appartient au plan ( $\Pi^-$ ), M et  $M_S$  sont confondus.

Par conséquent :

$$\vec{B}(M) = Sym_{\Pi^{-}}(\vec{B}(M))$$
 soit  $\vec{B}(M) \perp (\Pi^{-})$ 

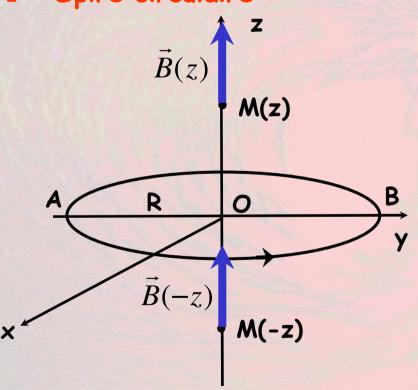
$$M \in (\Pi^-) \implies \vec{B}(M) \in (\Pi^-)$$

« C'est le contraire du champ électrostatique! »



# IV - Calculs classiques de champs magnétiques

### 1 - Spire circulaire:



Une spire circulaire (C) de rayon R est parcourue par un courant constant d'intensité I.

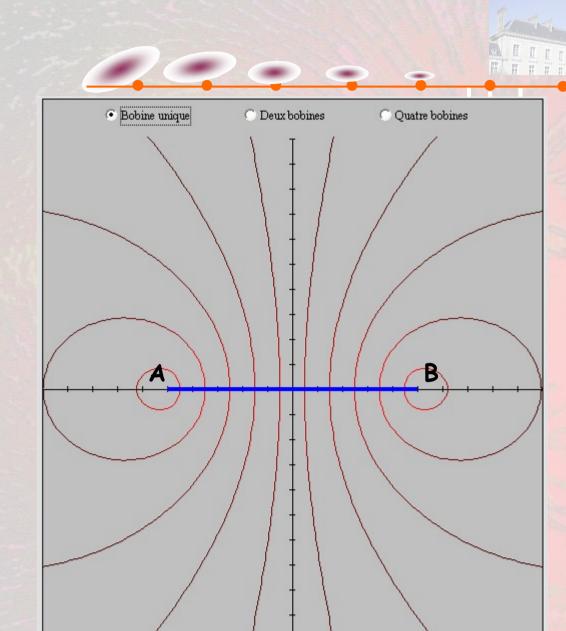
On souhaite calculer le champ magnétique en un point M situé sur l'axe (Oz) de la spire.

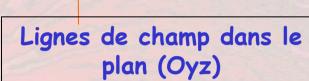
# Étude des symétries :

Tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans d'anti-symétrie, par conséquent :

$$\vec{B}(z) = B(z) \vec{u}_z$$

Le plan (Oxy) est un plan de symétrie pour la répartition de courants, par conséquent :  $\vec{B}(-z) = \vec{B}(z)$ 





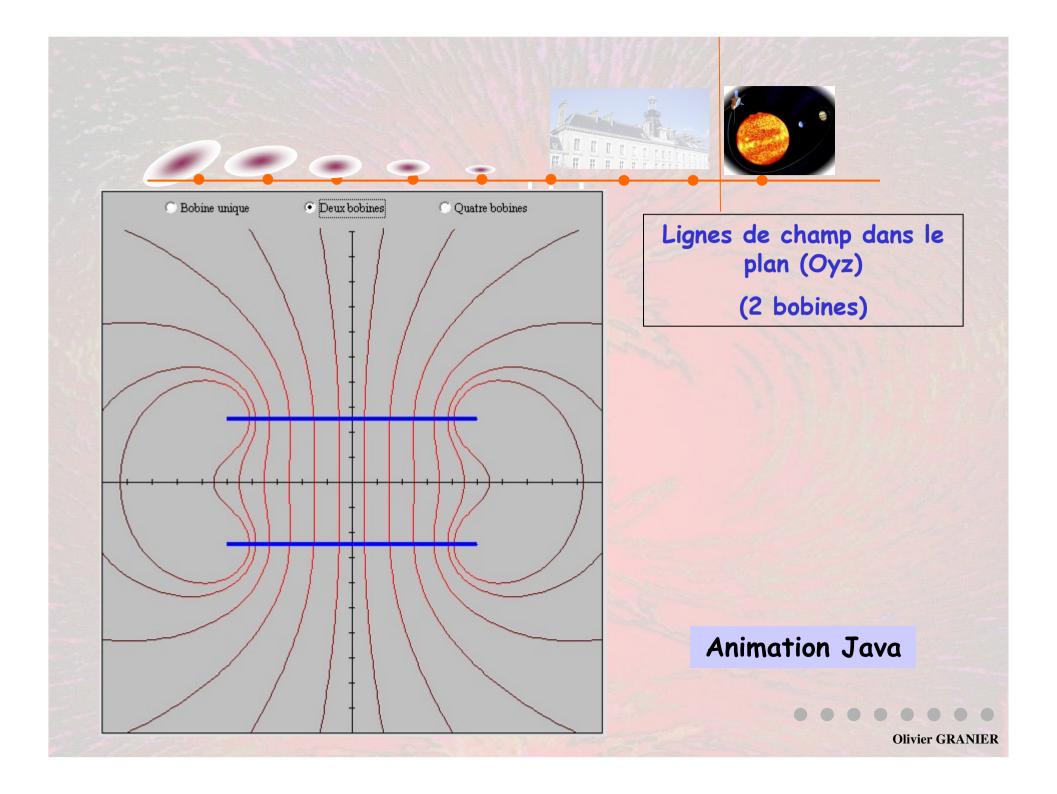
(1 bobine)

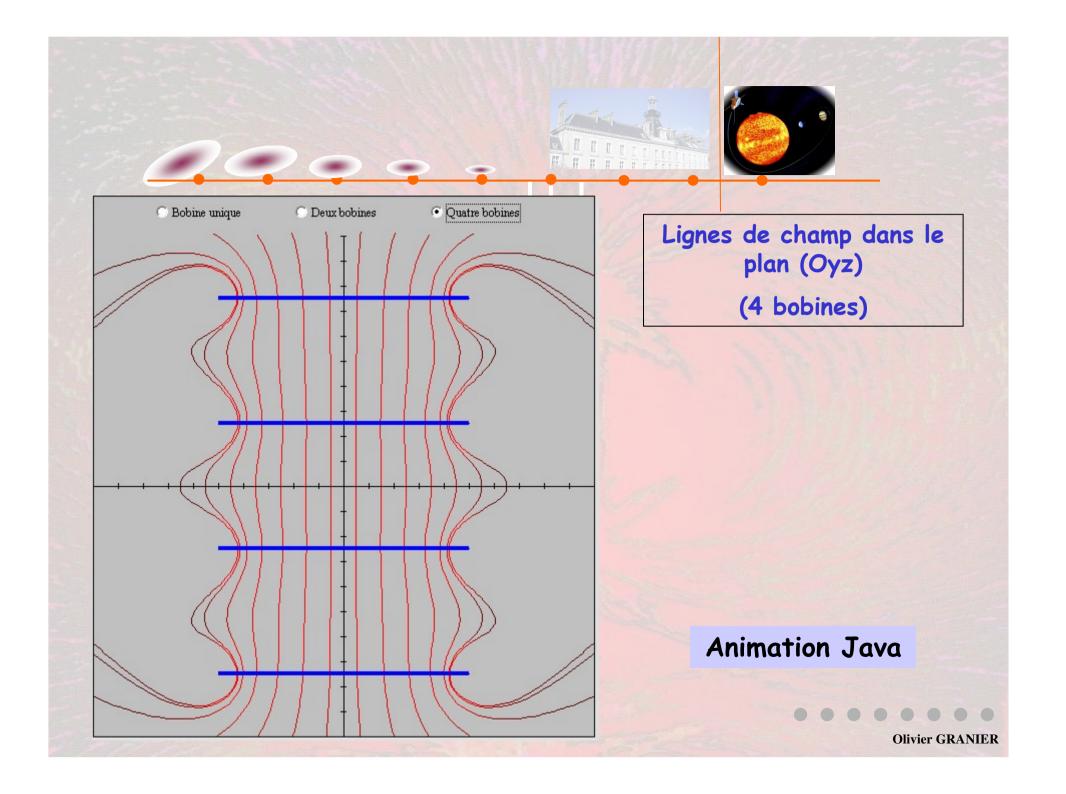
Les lignes de champ sont des lignes fermées.

Les lignes de champ ne divergent pas à partir de leurs sources (les courants) mais tourbillonnent autour de celles-ci.

La règle de la main droite donne l'orientation des lignes de champ.

Animation Java









#### Calcul du champ sur l'axe :

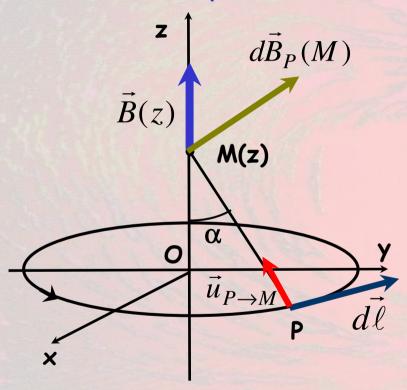
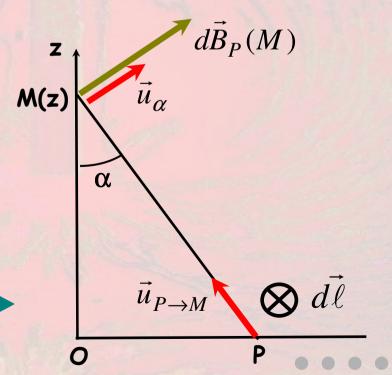


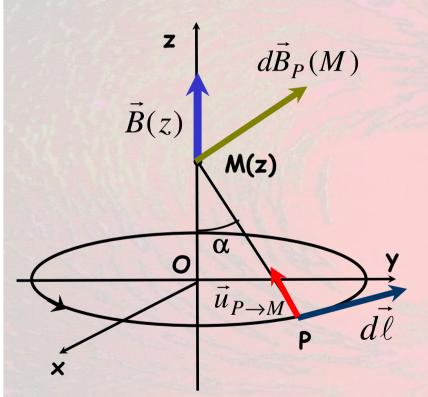
Figure dans le plan méridien (OPM) Le champ élémentaire créé par l'élément de longueur  $d\,\ell$  au point P vaut :

$$d\vec{B}_{P}(M) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P \to M}}{PM^{2}}$$









Les vecteurs  $d\ell$  et  $\vec{u}_{P \to M}$  sont perpendiculaires et le champ élémentaire est porté par  $\vec{u}_{\alpha}$  :

$$d\vec{B}_{P}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{PM^2} \vec{u}_{\alpha}$$

En projection sur l'axe (Oz) :

$$dB_{P,z}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{PM^2} \vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{z}$$

$$dB_{P,z}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{PM^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{PM^2} \sin\alpha$$



# Soit, en intégrant sur le périmètre de la spire (avec PM = cste) :

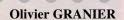
$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(2\pi R)}{PM^2} \sin \alpha$$

Avec  $\sin \alpha = \frac{R}{PM}$ , il vient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \ \vec{u}_z$$

Ou encore, avec  $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

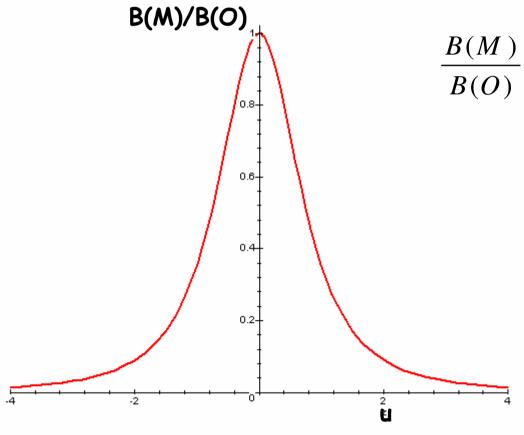






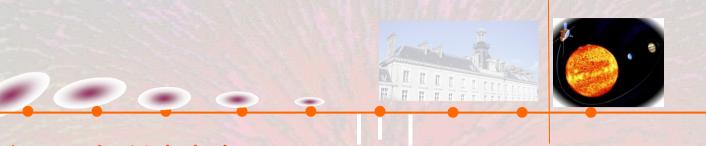
Le champ au centre de la spire est :  $B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R}$ 

La courbe suivante trace l'allure de :

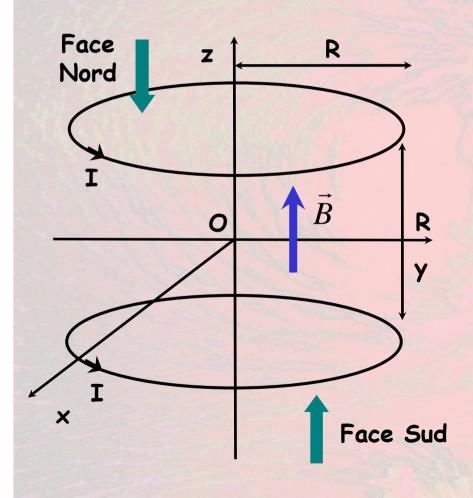


$$\frac{B(M)}{B(O)} = \frac{R^3}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1 + u^2\right)^{3/2}}$$

$$(Avec \ u = \frac{z}{R})$$



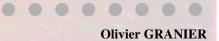
#### 2 - Bobines de Helmholtz:



Deux spires identiques, de rayons R et d'axe (Oz) sont distantes de R.

Elles sont parcourues, dans le même sens, par le même courant d'intensité I.

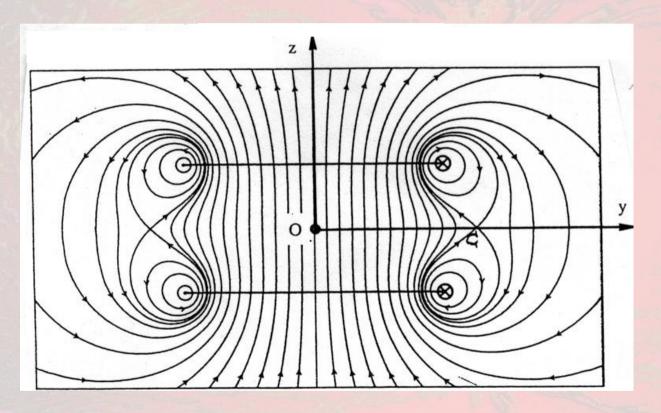
Animation Java





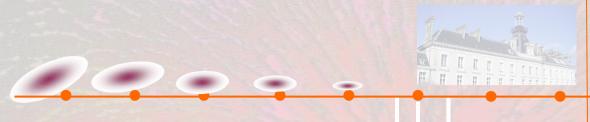


# Lignes de champ:



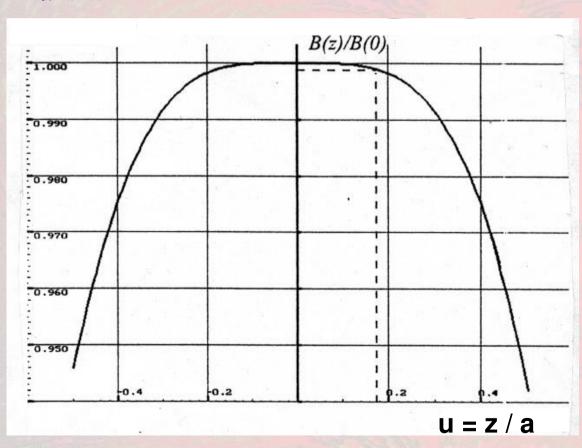
Animation Java

Les lignes de champ sont fermées et tourbillonnent autour des sources. Entre les deux spires, les lignes de champ sont parallèles.

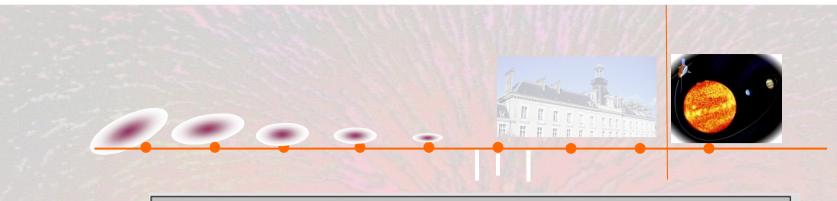


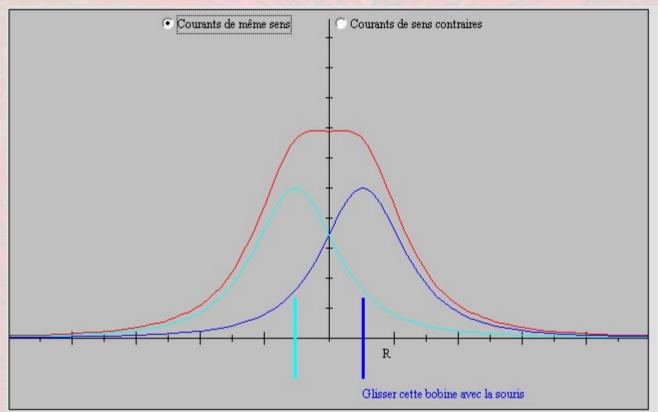


Valeur algébrique du champ magnétique le long de l'axe des bobines de Helmholtz:

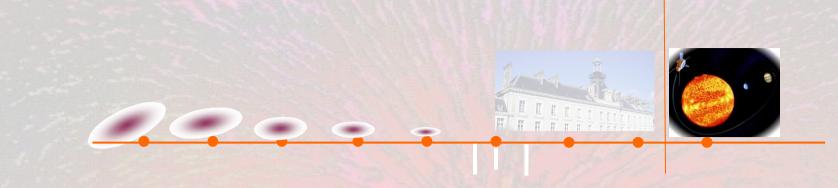


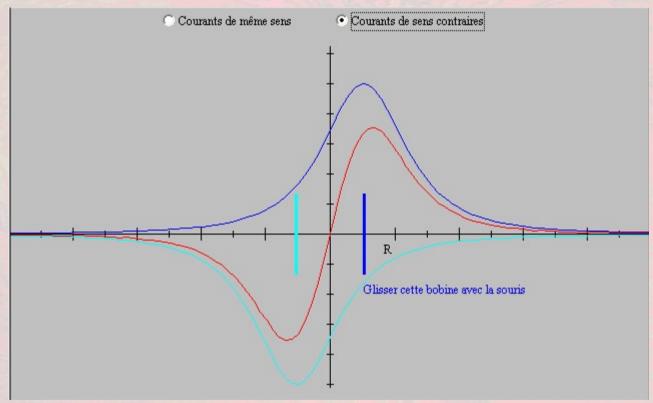
Les bobines de Helmholtz produisent un champ quasiuniforme dans la région intérieure du dispositif.





Animation Java





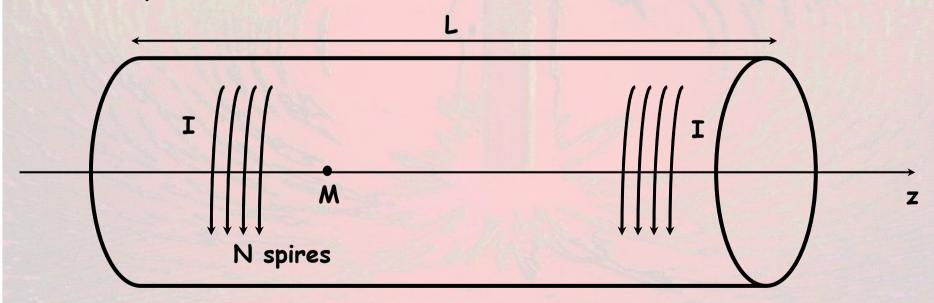
Animation Java



# 3 - Solénoïde fini et infini (à section circulaire) :

Un solénoïde est un circuit constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre dont la section est ici supposée circulaire.

On note L sa longueur, R le rayon de sa section circulaire et N le nombre total de spires.



On calcule le champ en un point M quelconque de l'axe (Oz) (intérieur ou extérieur au solénoïde).

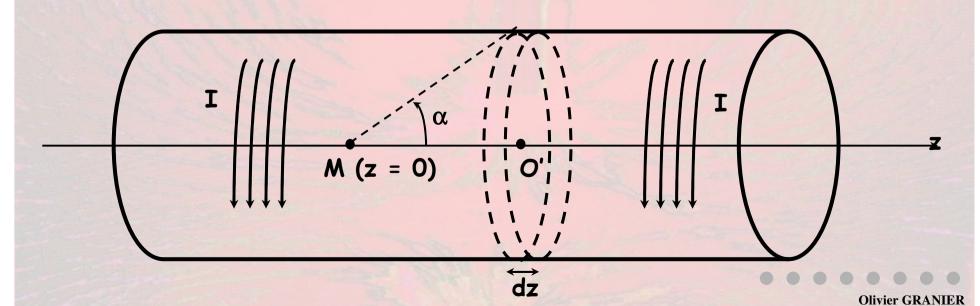


Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'anti-symétrie. Par conséquent :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z$$

La spire centrée sur 0' crée au point M le champ : :

$$\vec{B}_{O'}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \ \vec{u}_z$$



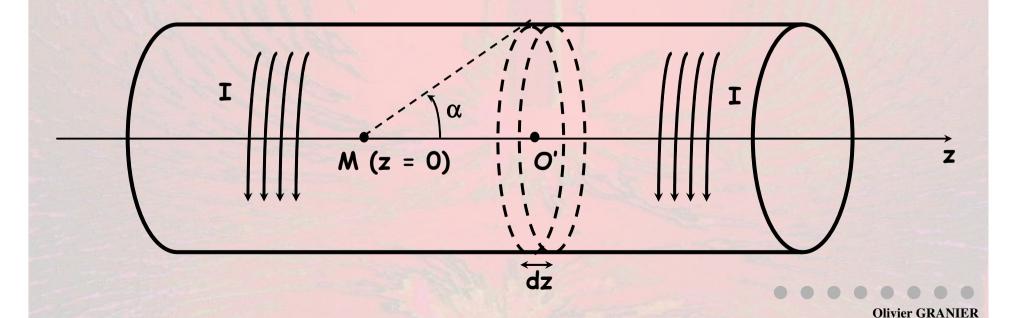




Dans l'élément de longueur dz, il y a (N/L)dz spires. Le champ créé par l'élément dz du solénoïde est ainsi :

$$d\vec{B}(M) = \left(\frac{N}{L}dz\right)\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha \ \vec{u}_z = \frac{\mu_0 nI}{2R}\sin^3\alpha \ dz \ \vec{u}_z$$

Où n = N/L est le nombre de spires par unité de longueur.



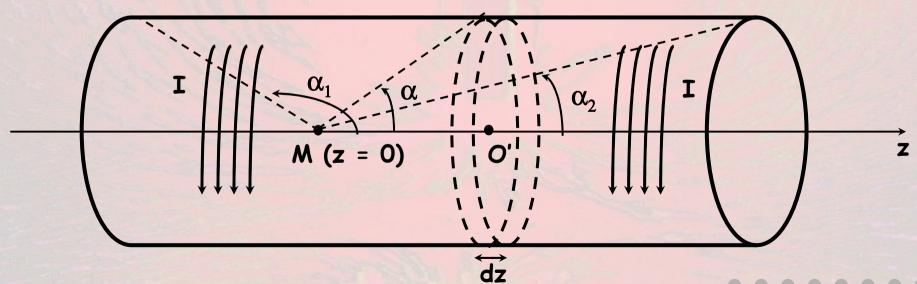




#### On choisit a comme variable d'intégration :

$$z = \overline{MO'}$$
;  $\tan \alpha = \frac{R}{z}$ ;  $z = R \cot \alpha \alpha$ ;  $dz = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ 

$$d\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 nI}{2} \sin \alpha \ d\alpha \ \vec{u}_z$$



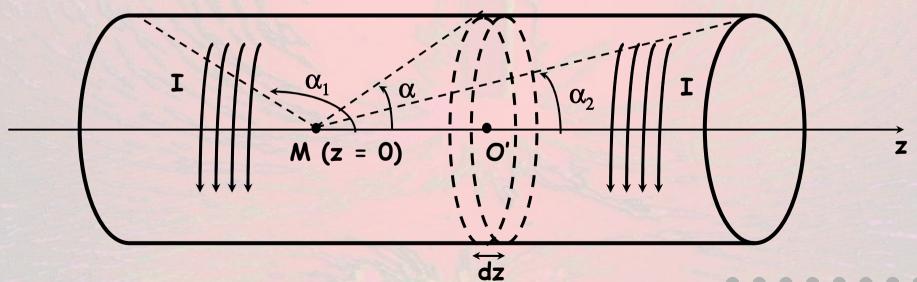




### En intégrant entre les valeurs extrêmes $\alpha_1$ et $\alpha_2$ :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 nI}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \ d\alpha \ \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{u}_z$$







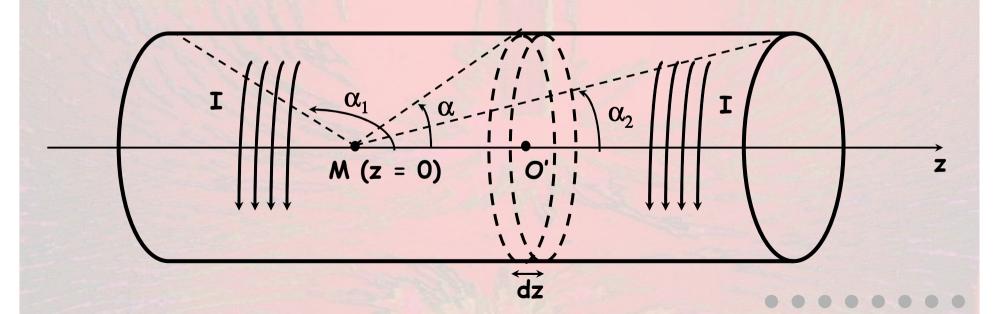
**Olivier GRANIER** 

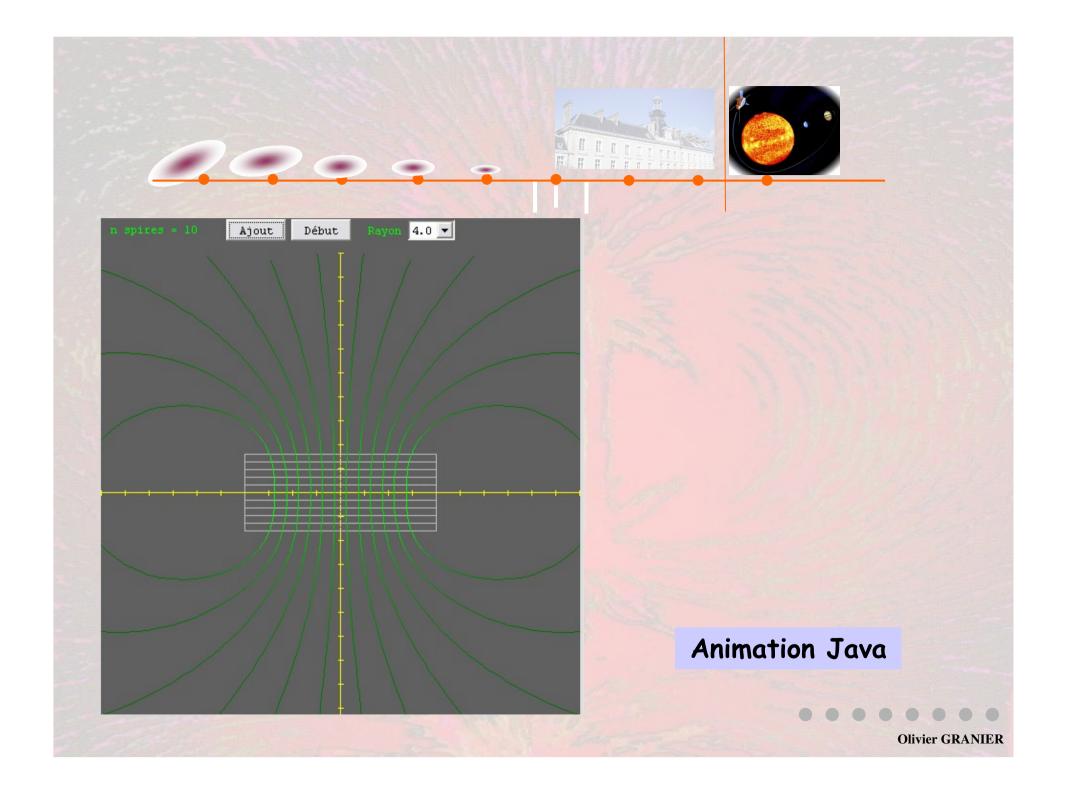
## Pour un solénoïde infini (à section circulaire):

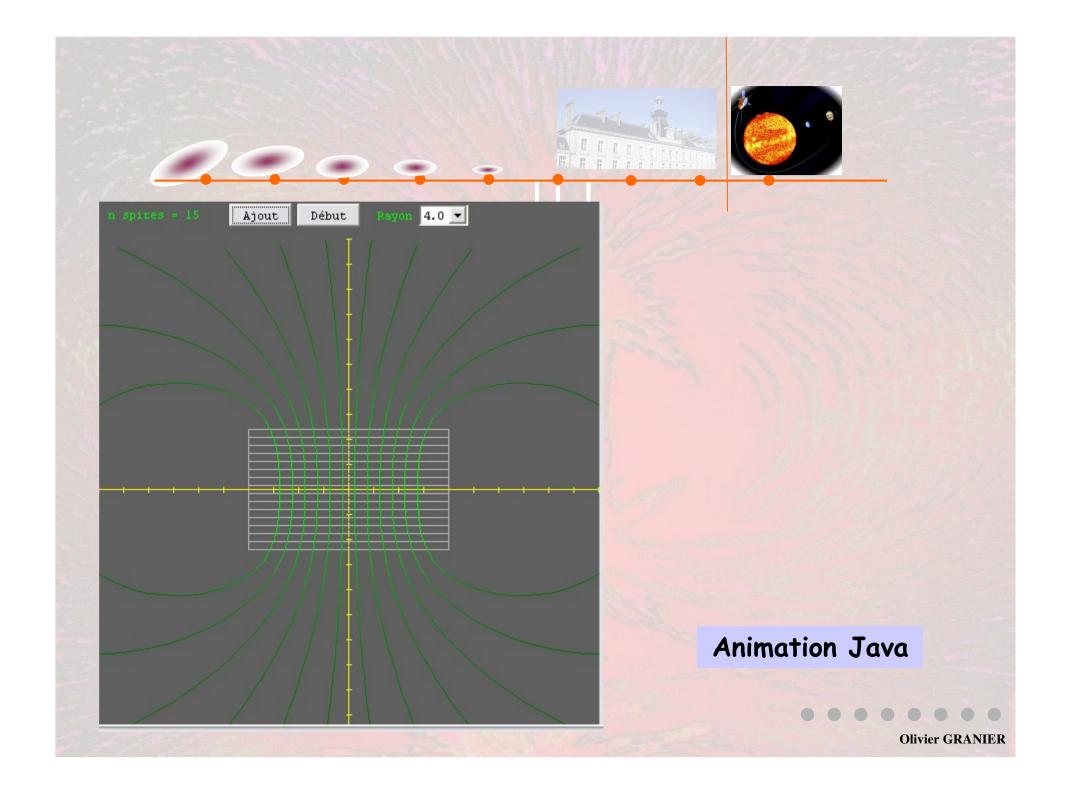
$$\alpha_1 \to \pi$$

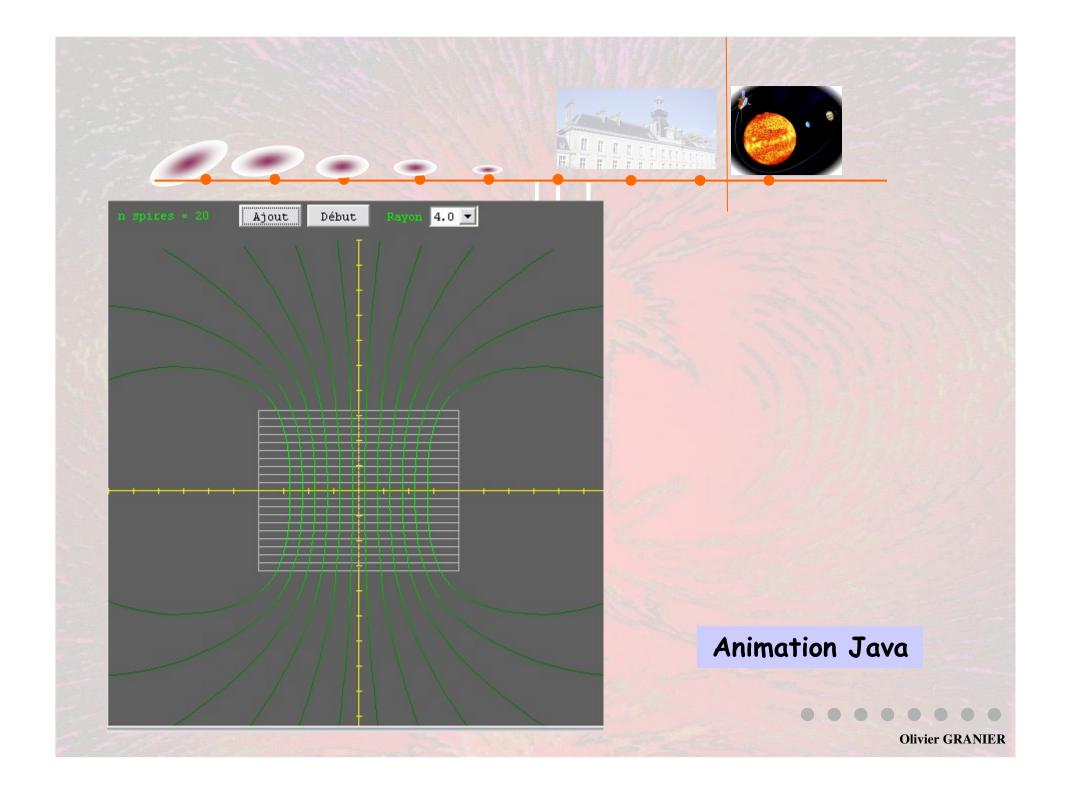
$$\alpha_1 \to \pi$$
 et  $\alpha_2 \to 0$ 

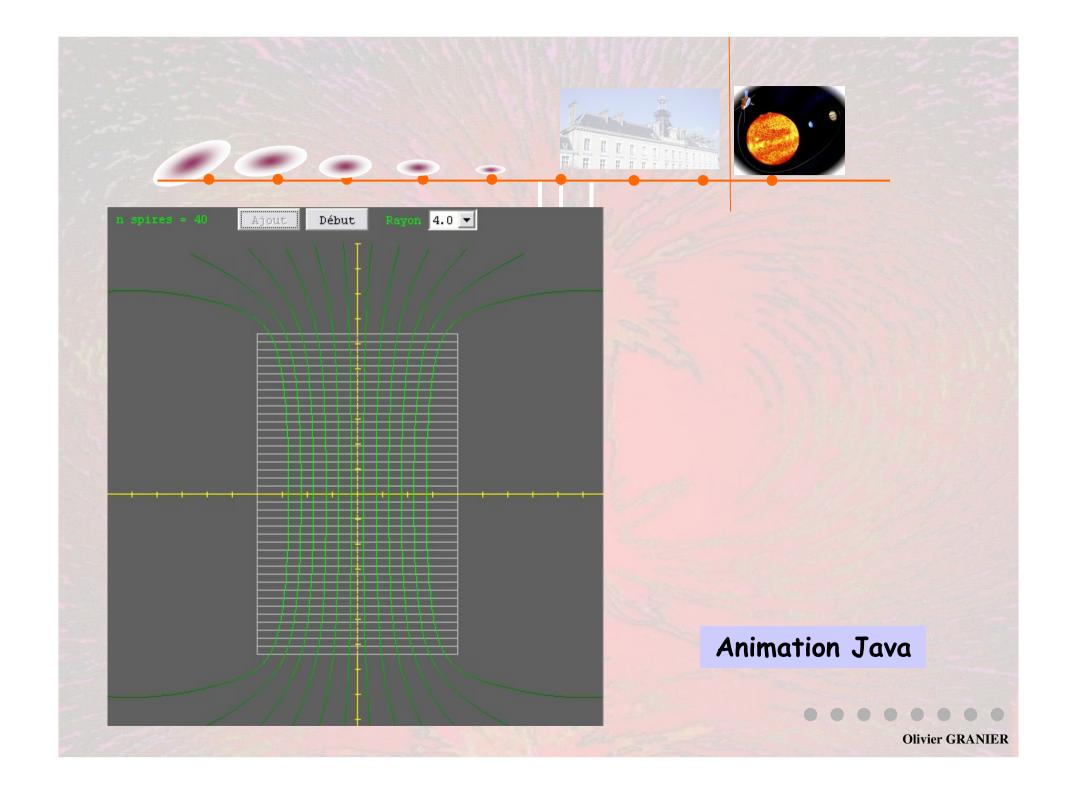
$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$$
 (Champ uniforme)









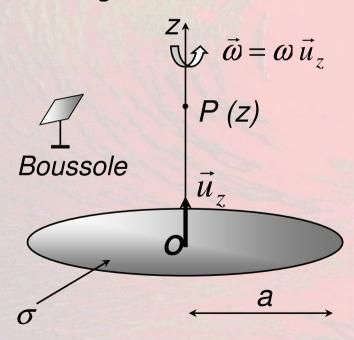






# 4 - Disque de Rowland:

On note O le centre du disque (de rayon a), initialement chargé uniformément en surface avec une densité surfacique o. Le disque tourne autour de l'axe (Oz) perpendiculaire au plan du disque, à la vitesse angulaire constante  $\omega$ .



Déterminer le champ magnétique B(P) créé par le disque en un point P(z) de l'axe (Oz).

Solution (pdf)

