


PCSI 1 (O.Granier)

Lycée Clemenceau

Régime sinusoïdal forcé

Impédances – Lois fondamentales - Puissance

Olivier GRANIER

➢ Intérêt des courants sinusoïdaux :

Exemple de tensions sinusoïdales : tension du secteur (50 Hz – 220 V) – Les lignes à haute tension – L'émission et la réception des signaux de radio et de télévision font intervenir des courants qui varient sinusoïdalement dans le temps, ….

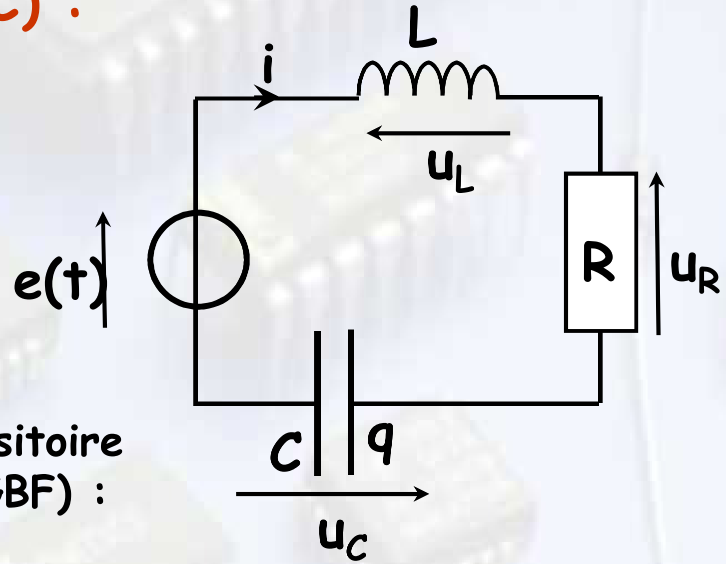
Analyse de Fourier : elle montre que toute tension périodique est une somme de fonctions sinusoïdales ; ainsi, si on sait comment réagit un circuit à une excitation sinusoïdale, alors on connaîtra (par superposition) la réponse de ce circuit à n'importe quelle tension périodique.

Simulation Java sur l'analyse de Fourier :

Simulation Synchronie sur l'analyse de Fourier :

➢ Equation différentielle du circuit (RLC) :

$$u_L + u_R + u_C = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = e(t)$$



Notations :

$$e(t) = E_m \cos \omega t = E_{eff}\sqrt{2}\cos \omega t$$

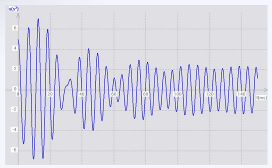
L'intensité i(t) possède (une fois le régime transitoire disparu) la même pulsation que l'excitation (le GBF) :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

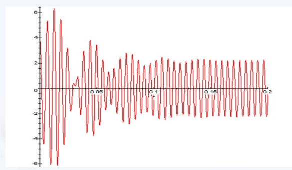
Résolution numérique de l'équation :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_m \cos \omega t$$

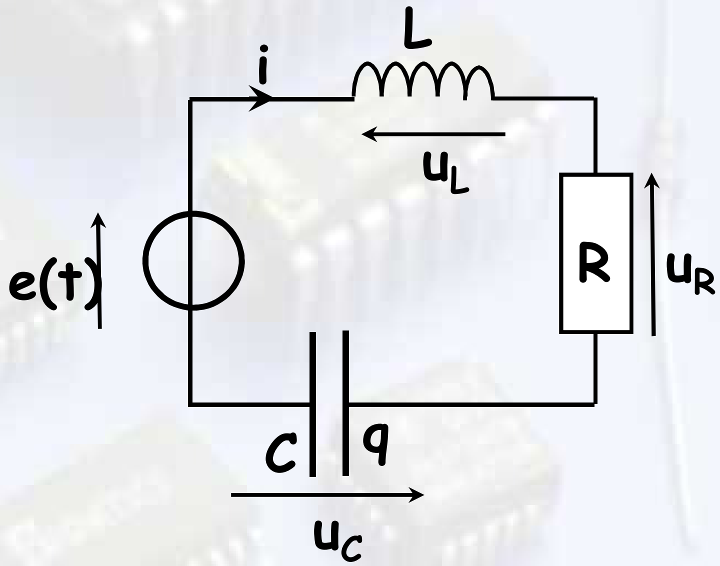
Avec Regressi :



Avec Maple :



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$



φ est le déphasage de i(t) par rapport à la tension excitatrice e(t) du GBF :

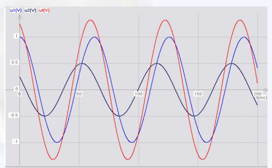
$\varphi > 0$: i(t) est en avance sur e(t)

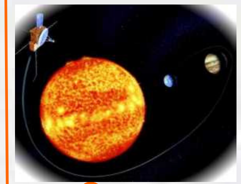
$\varphi < 0$: i(t) est en retard sur e(t)

Animation Cabri (déphasage)

Animation Cabri (somme de 2 tensions)

Animation Regressi (déphasage et somme de deux tensions)





Quelques rappels sur les nombres complexes :

$$\underline{z} = a + jb \qquad (j^2 = -1)$$

$$\underline{z} = |\underline{z}| e^{j\theta} \quad avec \quad |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad et \quad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad et \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(\tan\theta = \frac{b}{a}\right)$$

Le nombre complexe j joue le rôle de i, afin de ne pas confondre avec l'intensité i.

$$\underline{z}_1 = |\underline{z}_1| e^{j\theta_1} \quad ; \quad \underline{z}_2 = |\underline{z}_2| e^{j\theta_2} \quad ; \quad \underline{z} = \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_1} = |\underline{z}| e^{j\theta}$$

$$|\underline{z}| = \frac{|\underline{z}_2|}{|\underline{z}_1|} \quad et \quad \theta = \theta_2 - \theta_1$$

➢ Notation complexe en électricité, impédances complexes :

Tension complexe du GBF :

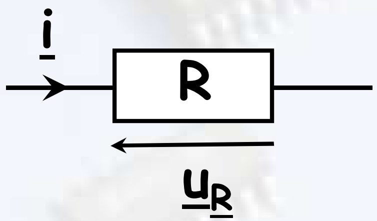
$$\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t} = E_{eff}\sqrt{2}e^{j\omega t} \qquad (e(t) = \mathrm{Re}(\underline{e}(t)) = E_m \cos \omega t)$$

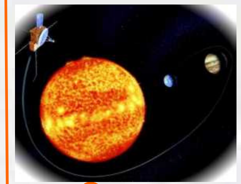
Intensité complexe :

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = I_{eff}\sqrt{2}e^{j(\omega t+\varphi)} \qquad (i(t) = \mathrm{Re}(\underline{i}(t)) = I_m \cos(\omega t + \varphi))$$

Tension complexe aux bornes d'une résistance :

$$\boxed{\underline{u}_R = R\underline{i}}$$



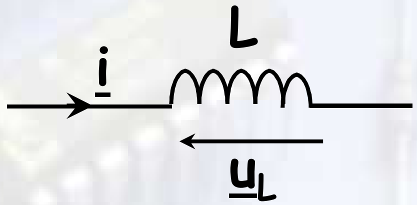


Tension complexe aux bornes d'une bobine d'auto-induction :

Animation Cabri sur L

$$\underline{u}_L = L\frac{d\underline{i}}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right) = L\left(I_m j\omega e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right) = jL\omega\,\underline{i}$$

$$\underline{u}_L = \underline{z}_L\,\underline{i} \qquad avec \qquad \boxed{\underline{z}_L = jL\omega}$$



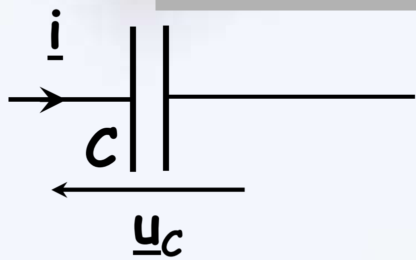
$\underline{z}_L$ est appelée impédance complexe de la bobine **(homogène à une résistance) ; l'équation précédente « généralise » la loi d'ohm en notation complexe.**

Tension complexe aux bornes d'un condensateur :

Animation Cabri sur C

$$\underline{i} = C\frac{d\underline{u}_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(U_{C,m} e^{j(\omega t+\psi)}\right) = jC\omega\,\underline{u}_C$$

$$\underline{u}_C = \underline{z}_C\,\underline{i} \qquad avec \qquad \boxed{\underline{z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$$



$\underline{z}_C$ est appelée impédance complexe du condensateur.

Conclusion :

L'utilisation de la notation complexe permet d'obtenir une relation de proportionnalité entre la tension complexe aux bornes d'un dipôle $\underline{u}$ et l'intensité $\underline{i}$ qui le traverse :

$$\underline{u} = \underline{z}\ \underline{i}$$

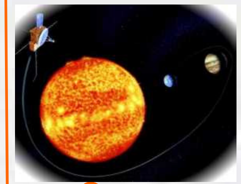
C'est, en quelque sorte, une loi d'ohm généralisée.

Remarque :

Opérateurs « dérivée » et « intégrale » en notation complexe :

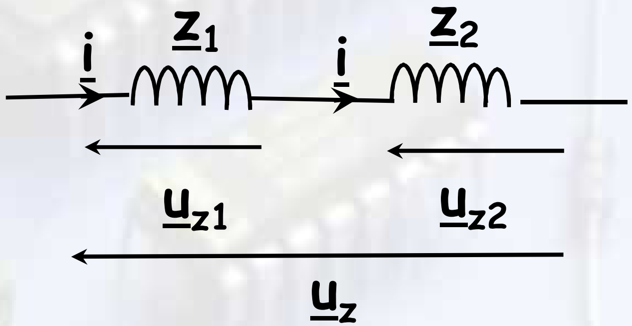
$$\frac{d(\underline{u})}{dt} = j\omega\,\underline{u} \qquad ; \qquad \int \underline{u}\,dt = \frac{1}{j\omega}\underline{u}$$

$$Dérivée \Leftrightarrow produit\ \ par\ \ j\omega \qquad Intégrale \Leftrightarrow division\ \ par\ \ j\omega$$



Associations d'impédances :

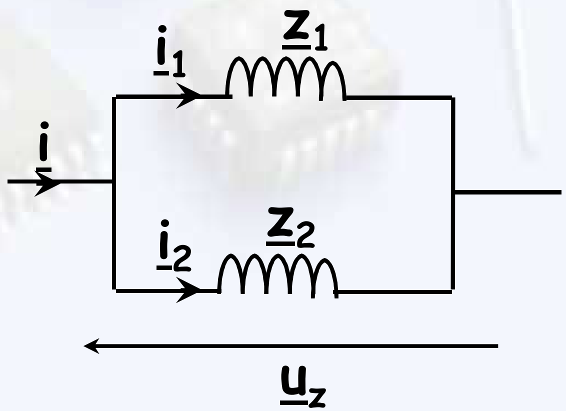
En série : $\underline{u}_z = \underline{u}_{z_1} + \underline{u}_{L_{z2}}$



$\underline{u}_z = (\underline{z}_1 + \underline{z}_2)\underline{i} = \underline{z}_{éq}\underline{i}$ **Avec :** $\boxed{\underline{z}_{éq} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2}$

En parallèle : le raisonnement est identique à celui effectué avec les résistances. Par conséquent :

$$\underline{u}_z = \underline{z}_{éq}\underline{i} \quad avec \quad \boxed{\frac{1}{\underline{z}_{éq}} = \frac{1}{\underline{z}_1} + \frac{1}{\underline{z}_2}}$$



Soit $\underline{y}$ = 1/$\underline{z}$ l'admittance, alors : $\underline{y}_{éq} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$

Condensateur : $\underline{y}_C = jC\omega$ Bobine : $\underline{y}_L = \dfrac{1}{jL\omega}$

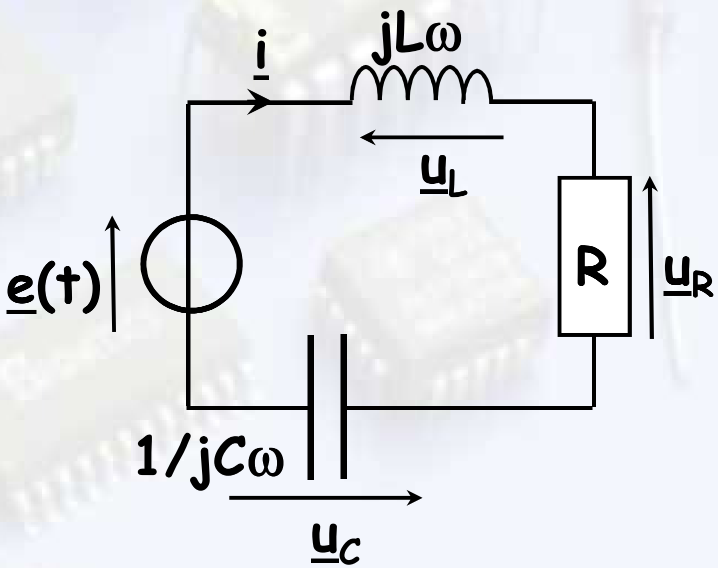
➢ « Résolution » du circuit série (RLC) :

L'écriture de la loi des mailles dans le circuit série RLC, en notation complexe, devient alors :

$$\underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C = R\underline{i} + jL\omega\,\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i} = \underline{e}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{z}} \quad avec \quad \underline{z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$



où $\underline{z}$ est l'impédance du circuit série (RLC), somme des impédances de chacun de ses constituants.

On rappelle les notations :

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad et \qquad \underline{e} = E_m e^{j\omega t}$$

Ainsi :

$$I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{E_m e^{j\omega t}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)} \qquad soit \qquad I_m e^{j\varphi} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Si on note $\underline{z} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) = |\underline{z}|e^{j\theta} = Ze^{j\theta}$**, alors :**

$$I_m e^{j\varphi} = \frac{E_m}{Ze^{j\theta}} = \frac{E_m}{Z}e^{-j\theta} \qquad \textbf{soit} \qquad \varphi = -\theta \qquad et \qquad I_m = \frac{E_m}{Z}$$

L'intensité maximale vaut donc :

$$\boxed{I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}}$$

L'argument θ de l'impédance complexe z vérifie :

$$\cos\theta = \frac{R}{Z} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{Z} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

Le déphasage $\varphi = -\theta$ est donc connu par les relations :

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}} \quad et \quad \cos\varphi = \cos\theta > 0$$

On pose $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ la pulsation pour laquelle φ = 0 (e(t) et i(t) sont en phase) :

* Si $\omega < \omega_0$: le circuit est capacitif et $\varphi > 0$ (i(t) est en avance sur e(t))

* Si $\omega > \omega_0$: le circuit est inductif et $\varphi < 0$ (i(t) est en retard sur e(t), on retrouve bien l'effet de la loi de Lenz).

« Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

En notation complexe, on peut écrire :

- Aux bornes d'un dipôle d'impédance $\underline{z}$ (d'admittance $\underline{y}$) : $\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$ ou $\underline{i} = \underline{y}\,\underline{u}$

- Aux bornes d'un générateur de fém complexe $\underline{e}$ et d'impédance interne complexe $\underline{z}_G$:

$$\underline{u}_G = \underline{e} - \underline{z}_G\,\underline{i}$$

- Aux bornes d'un générateur de courant de courant de court-circuit $\underline{i}_{cc}$ et d'admittance interne complexe $\underline{y}_G$:

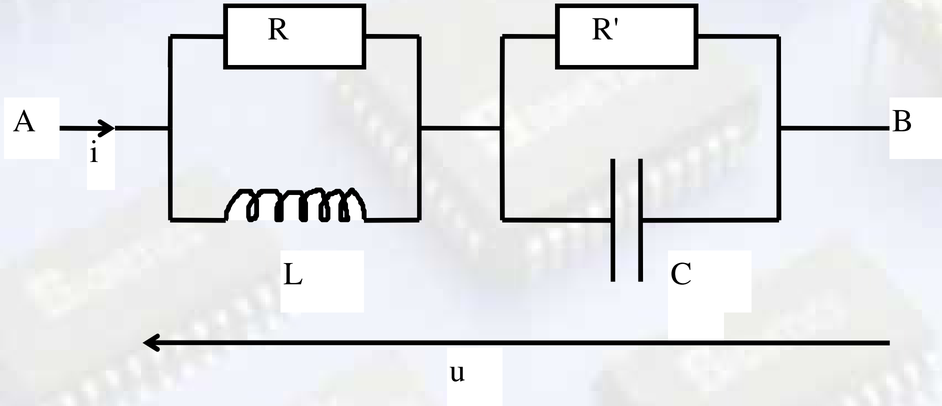
$$\underline{i} = \underline{i}_{cc} - \underline{y}_G\,\underline{u}$$

Ainsi, on obtient pour un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé, des expressions identiques à celles obtenues en régime continu : les impédances (et admittances) prennent la place des résistances (et des conductances).

On pourra utiliser : les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et des mailles), les règles des diviseurs de tension et de courant, les associations série et parallèle de dipôles, les passages de représentation de Thévenin à celle de Norton.

➢ « Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

Calculs d'impédances (ex n°1) :



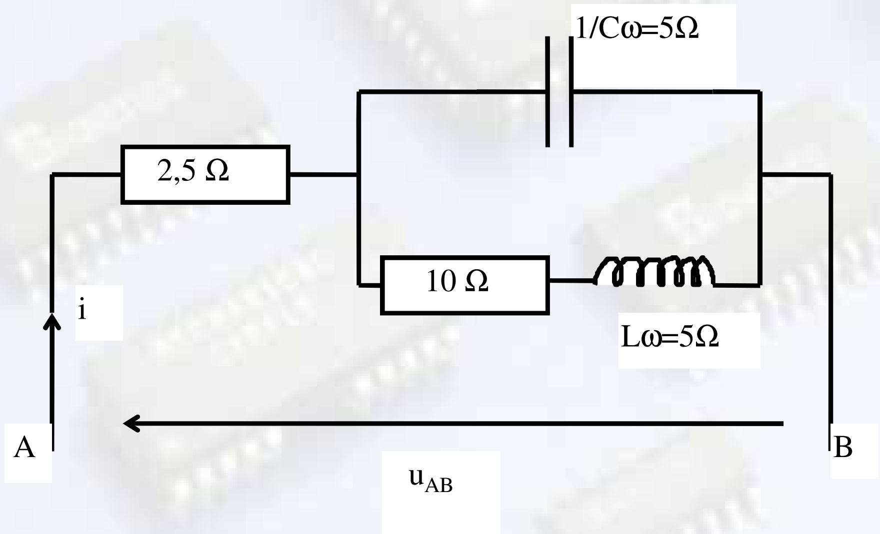
Calculer R et R' pour que u et i soient en phase pour toute valeur de la pulsation.

« Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

Détermination d'intensité instantanée (ex n°2) :

Le dipôle AB est alimenté en courant alternatif sous la tension $V_A - V_B = 100\sin(\omega t)$.

Donner l'expression de l'intensité instantanée i(t) dans le circuit principal en fonction du temps.



« Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

Etude d'un circuit (RLC) (ex n°3) :

On dispose d'un condensateur de capacité $C = 20\ \mu F$, d'une bobine de résistance $R = 10\ \Omega$ et de coefficient d'auto-inductance $L = 0,3$ H, d'un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace 100 V et de fréquence $f = 50$ Hz.

Calculer l'intensité du courant et son déphasage par rapport à la tension quand on applique la tension successivement :

a) Aux bornes du condensateur.

b) Aux bornes de la bobine.

c) A l'ensemble condensateur-bobine en série.

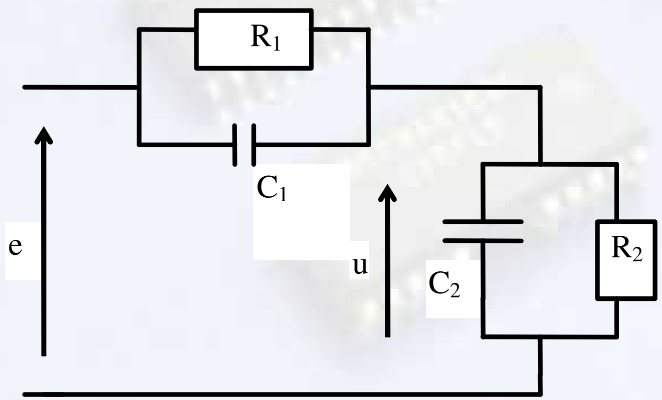
d) A l'ensemble condensateur-bobine en parallèle.

« Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

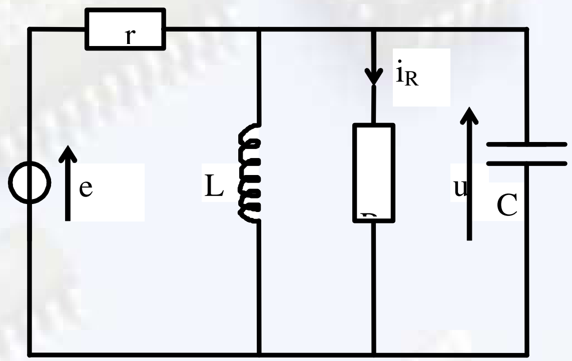
Diviseurs de tension et de courant (ex n°5) :

a) Calculer le rapport u / e du circuit (a). Quelles sont ses valeurs limites quand $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$? Quelle relation doivent vérifier R_1, R_2, C_1 et C_2 pour que ces limites soient identiques ? Que devient alors l'expression de u / e ?

b) Transformer le générateur de tension (e,r) du schéma (b) en un générateur de courant puis calculer le courant i_R. Que valent i_R et φ_R (déphasage de i_R par rapport à e) pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$?



Circuit (a)

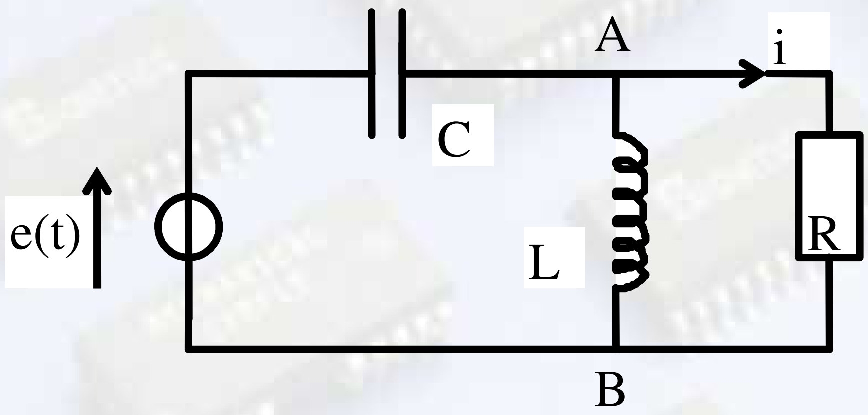


Circuit (b)

➤ « Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

Représentations de Thévenin et de Norton (ex n°6) :

Pour quelle valeur de la pulsation l'intensité traversant R est-elle indépendante de R ? On remplacera le dipôle situé à gauche de AB par sa représentation de Norton.

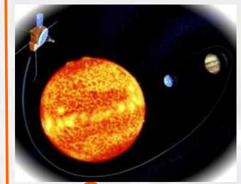


« Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

Pont de Maxwell et Pont de Sauty :

Pont de Maxwell: animation JAVA (JJ.Rousseau)

Pont de Sauty: animation JAVA (JJ.Rousseau)

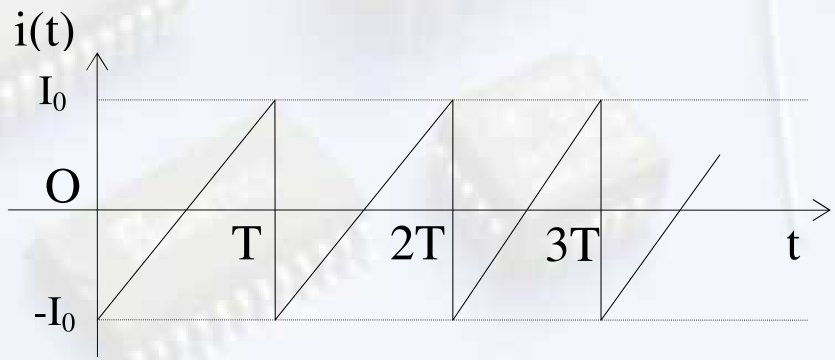


« Résoudre » un circuit en régime sinusoïdal :

Retour sur les valeurs moyennes et valeurs efficaces (ex n°4) :

<u>Courant en dents de scie</u> : on considère i = f(t) donnée par la courbe ci-dessous. Calculer l'intensité moyenne et l'intensité efficace de ce courant en dents de scie.

$$I_{moy} = \langle i(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{Q}{T}$$



L'intensité efficace est l'intensité d'un courant continu qui dissiperait dans une résistance R, en une période, la même énergie que le courant alternatif :

$$P = \int_0^T Ri^2(t)dt = RI_{eff}^2 T$$

D'où

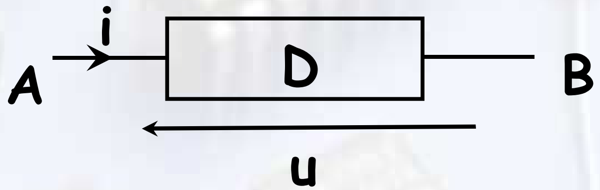
$$I^2{}_{eff} = \langle i^2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt$$

➢ Puissance moyenne en régime sinusoïdal permanent :

Puissance instantanée : la puissance instantanée reçue par le dipôle AB est (en convention récepteur) :

$$p(t) = ui = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$$

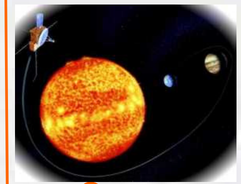
$$p(t) = 2U_{eff} I_{eff} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$$



Rappel : $$\cos a . \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

Donc : $$p(t) = U_{eff} I_{eff} \left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)\right]$$

Ainsi p(t) est une fonction sinusoïdale de pulsation 2ω et donc de période T/2.



Puissance moyenne : $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t)dt$

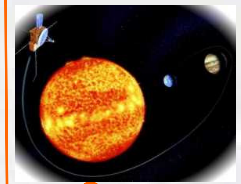
Intérêt ?

$$P = \frac{1}{T} U_{eff} I_{eff} \left(\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)dt + \int_0^T \cos(\varphi)dt \right)$$

$$\boxed{P = U_{eff} I_{eff} \underbrace{\cos(\varphi)}_{}}$$

Facteur de puissance : il dépend de l'impédance du dipôle AB.

Animation Cabri sur le facteur de puissance



Cas particuliers de dipôles :

* Pour une résistance : $P = U_{eff} I_{eff} = R I_{eff}^2 \quad (\cos\varphi = 1)$

* Pour une bobine parfaite : $P = 0 \quad (\cos\varphi = 0 \; car \; \varphi = -\pi / 2)$

* Pour un condensateur : $P = 0 \quad (\cos\varphi = 0 \; car \; \varphi = \pi / 2)$

* Pour un circuit série (RLC) :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad et \quad U_{eff} = Z I_{eff} \qquad donc \qquad P = (Z I_{eff}) I_{eff} (\frac{R}{Z})$$

$$Soit \qquad P = R I_{eff}^2$$

On vérifie bien que la puissance est entièrement dissipée dans la résistance.

* Pour un dipôle d'impédance complexe $\underline{z} = R + jS$:

$$\underline{u} = (R + jS)\underline{i} \quad soit \quad U_{eff} = (R + jS) I_{eff} e^{j\varphi} \quad d'où \quad P = R I_{eff}^2$$

Seule la partie réelle de l'impédance (nécessairement positive) intervient.

* Pour un dipôle d'admittance complexe $\underline{y} = G + jB$:

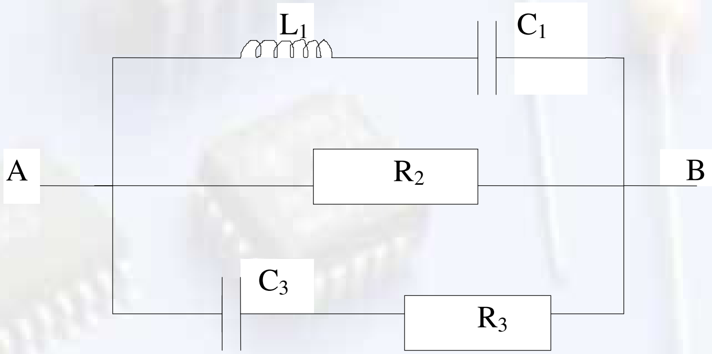
$$\underline{i} = (G + jA)\underline{u} \quad soit \quad I_{eff}\, e^{j\varphi} = (G + jA)U_{eff} \quad d'où \quad P = GU_{eff}^2$$

Seule la partie réelle de l'admittance (nécessairement positive) intervient.

Exercice n°7 :

La figure donne la composition d'un dipôle tel que :

C_1 = 2 µF ; L_1 = 40 µH ; R_2 = 5 Ω ; C_3 = 4 µF ; R_3 = 0,2 Ω



Il est alimenté par un courant sinusoïdal de fréquence f = 120 kHz et la tension efficace aux bornes A et B du dipôle est U_{eff} = 12 V. On demande de calculer :

a) L'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle (i.e. l'inverse de l'impédance complexe du dipôle).

b) Les valeurs efficaces des intensités dans les trois branches.

c) La puissance dissipée dans le dipôle.

Importance du facteur de puissance :

Le facteur de puissance est le terme cosφ ; à ddp imposée, l'intensité efficace I_{eff} nécessaire pour obtenir une puissance donnée dans un dipôle, soit :

$$I_{eff} = \frac{P}{U_{eff} \cos\varphi}$$

sera d'autant plus faible que le facteur de puissance sera proche de 1.

Or diminuer l'intensité, c'est diminuer les pertes par effet Joule dans les fils d'arrivée du courant, des générateurs aux circuits utilisateurs ; d'où l'importance pour EDF à n'alimenter que des circuits de facteur de puissance élevé (généralement, cosφ > 0,9).

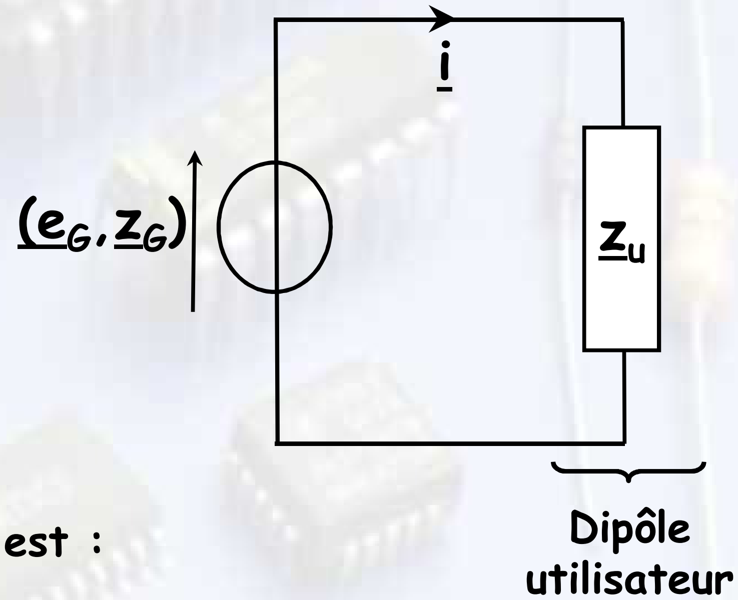
Relèvement d'un facteur de puissance (ex n°8) :

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace Ueff = 200 V. Elle consomme une puissance P = 12 kW. La fréquence est f = 50 Hz et l'intensité efficace 80 A.

a) Sachant que cette installation est du type inductif, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série et avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation.

b) Calculer la capacité C à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à la valeur 0,9.

Adaptation des impédances :



Une chaîne HI-FI (le générateur) est branchée à des enceintes (d'impédance $\underline{z}_u$)

Comment choisir l'impédance des enceintes pour que la puissance reçue par celles-ci soient maximale ? Dans ce cas, on dit qu'il y a adaptation des impédances.

On pose : $\underline{z}_G = R_G + jA_G \quad et \quad \underline{z}_u = R_u + jA_u$

La puissance moyenne reçue par le dipôle utilisateur est :

$$P_u = R_u I_{eff}^2 \qquad avec \qquad I_{eff} = \frac{E_{g,eff}}{\sqrt{(R_u + R_G)^2 + (A_u + A_G)^2}}$$

$$Soit : \qquad P_u = \frac{R_u E_{g,eff}^2}{(R_u + R_G)^2 + (A_u + A_G)^2}$$

Comment rendre P_u maximale, avec E_{eff}, R_G et A_G fixés ?

On a montré que R_G et R_u étaient nécessairement positifs, alors que A_G et A_u peuvent être a priori < 0 (circuit capacitif) ou > 0 (circuit inductif).

On choisit alors $A_u = - A_G$. L'expression de la puissance devient :

$$P_u = \frac{R_u E_{g,eff}^2}{(R_u + R_G)^2}$$

Elle sera maximale si :

$$\frac{dP_u}{dR_u} = 0 \qquad soit \qquad R_u = R_G$$

Les impédances sont alors **conjuguées** :

$$\underline{z}_u = R_u + jA_u = R_G - jA_G = \overline{\underline{z}_G}$$